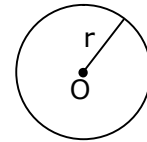


**GUÍA TEÓRICO PRÁCTICA N° 13**

**UNIDAD: GEOMETRÍA**  
**ÁNGULOS EN LA CIRCUNFERENCIA Y TEOREMAS**

**DEFINICIONES**

**CIRCUNFERENCIA:** Dado un **punto O** y una **distancia r**, se llama **circunferencia** de centro **O** y radio **r** al conjunto de todos los puntos del plano que están a la distancia **r** del punto **O**.

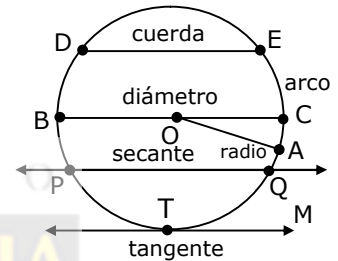


O: Centro  
 r: Radio  
 $C(O,r) = \odot(O,r)$

**RADIO:** Trazo cuyos extremos son el centro de la circunferencia y un punto de ésta ( $\overline{OA}$ ).

**CUERDA:** Trazo cuyos extremos son dos puntos de una circunferencia ( $\overline{DE}$ ).

**DIÁMETRO:** Cuerda que contiene al centro de la circunferencia ( $\overline{BC}$ ). Es la cuerda de mayor longitud.



**SECANTE:** Recta que interseca en dos puntos a la circunferencia ( $\overleftrightarrow{PQ}$ )

**TANGENTE:** Recta que interseca a la circunferencia en un solo punto ( $\overleftrightarrow{TM}$ ). T punto de tangencia.

**ARCO:** Es una parte de la circunferencia determinada por dos puntos distintos de ella ( $\widehat{CE}$ ).

**ÁNGULO DEL CENTRO:** Es todo ángulo interior cuyo vértice es el centro de la circunferencia y sus rayos son radios de la misma ( $\sphericalangle EOD$ ).

**EJEMPLOS**

1. ¿Cuál de las siguientes opciones es **falsa**?

- A) El diámetro de una circunferencia es el doble de su radio
- B) La mayor cuerda de una circunferencia es el diámetro
- C) En circunferencias congruentes los radios son congruentes
- D) Al cortarse dos cuerdas en el centro de la circunferencia forman ángulos del centro
- E) Por tres puntos cualesquiera siempre pasa una circunferencia

2. ¿Cuál de las siguientes opciones es verdadera?

- A) Una cuerda no puede pertenecer a una secante
- B) Una cuerda puede pertenecer a una tangente
- C) La tangente corta en más de un punto a la circunferencia
- D) Los rayos de un ángulo del centro son cuerdas
- E) El diámetro es una cuerda

3. En la circunferencia de centro O (fig. 1) de diámetro  $\overline{AB}$ , el ángulo AOC mide  $54^\circ$ . ¿Cuál es la medida del ángulo BCO?

- A)  $17^\circ$
- B)  $24^\circ$
- C)  $27^\circ$
- D)  $32^\circ$
- E) No se puede determinar

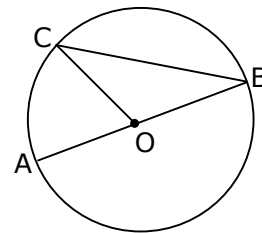


fig. 1

4. Según los datos de la circunferencia de centro en O (fig. 2),  $\alpha + \beta$  es

- A)  $198^\circ$
- B)  $168^\circ$
- C)  $144^\circ$
- D)  $132^\circ$
- E)  $126^\circ$

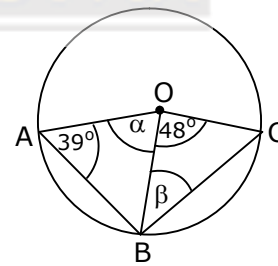


fig. 2

5. En la circunferencia de la figura 3,  $\overline{OD}$  y  $\overline{OC}$  son radios. ¿Cuál(es) de las siguientes relaciones es (son) **siempre** verdadera(s)?

- I)  $\angle ODC \cong \angle OCD$
- II)  $\overline{AE} \cong \overline{OE}$
- III)  $\overline{DE} \cong \overline{CE}$

- A) Sólo I
- B) Sólo II
- C) Sólo III
- D) Sólo I y III
- E) I, II y III

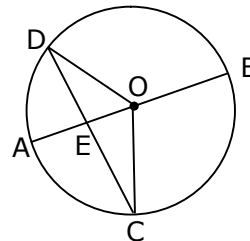
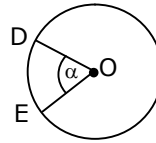


fig. 3

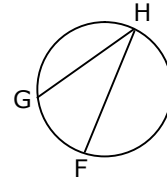
**MEDIDA ANGULAR DE UN ARCO**

En toda circunferencia la medida angular de un arco es igual a la medida del ángulo del centro que subtiende dicho arco.

$$\widehat{DE} = \sphericalangle EOD = \alpha$$



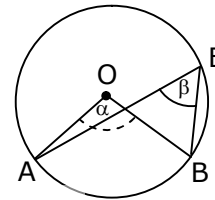
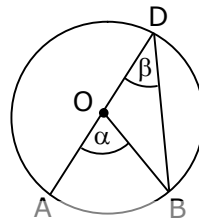
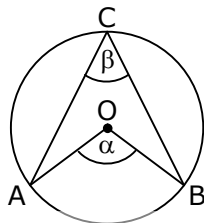
**ÁNGULO INSCRITO:** Es todo ángulo cuyo vértice es un punto de la circunferencia y parte de sus rayos son cuerdas de ésta ( $\sphericalangle FHG$ ).



**TEOREMA**

Todo ángulo inscrito en una circunferencia tiene como medida la mitad del arco que subtiende el mismo arco.

$$\beta = \frac{1}{2} \alpha$$



O: centro de la circunferencia

**EJEMPLOS**

1. En la circunferencia de centro O (fig. 1), se cumple que  $\widehat{BA} \cong \widehat{DC}$  y  $\widehat{AED} + \widehat{CB} = 3\widehat{BA}$ . Entonces, la medida del  $\sphericalangle x$  es

- A)  $45^\circ$
- B)  $60^\circ$
- C)  $72^\circ$
- D)  $84^\circ$
- E)  $90^\circ$

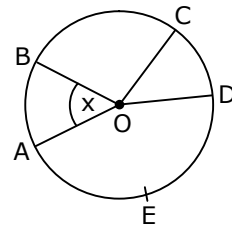


fig. 1

2.  $\overline{AC}$  y  $\overline{BE}$  son diámetros de la circunferencia de centro O (fig. 2). Si  $\sphericalangle BOA = 2\sphericalangle COB$ , entonces el  $\sphericalangle CDB$  mide

- A)  $30^\circ$
- B)  $35^\circ$
- C)  $45^\circ$
- D)  $60^\circ$
- E)  $120^\circ$

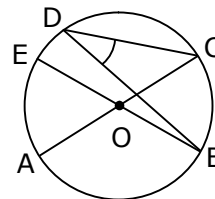


fig. 2

3. Según los datos entregados en la circunferencia de centro O de la figura 3, ¿cuánto mide el ángulo  $\alpha$ ?

- A)  $35^\circ$   
 B)  $40^\circ$   
 C)  $70^\circ$   
 D)  $120^\circ$   
 E)  $150^\circ$

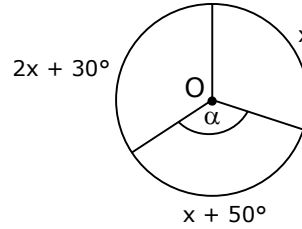


fig. 3

4. En la circunferencia de centro O de la figura 4,  $\alpha + \beta = 90^\circ$ . Entonces, la medida de  $\beta$  es

- A)  $15^\circ$   
 B)  $30^\circ$   
 C)  $45^\circ$   
 D)  $60^\circ$   
 E)  $75^\circ$

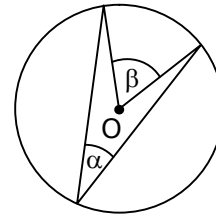


fig. 4

5. En la circunferencia de centro O (fig. 5),  $\overline{AC}$  es diámetro. Entonces, la medida de  $\alpha$  es

- A)  $10^\circ$   
 B)  $20^\circ$   
 C)  $40^\circ$   
 D)  $80^\circ$   
 E)  $140^\circ$



fig. 5

6. En la circunferencia de centro O y diámetro  $\overline{BC}$  de la figura 6, ¿cuánto mide el  $\angle BCA$ ?

- A)  $22^\circ$   
 B)  $34^\circ$   
 C)  $36^\circ$   
 D)  $44^\circ$   
 E)  $68^\circ$

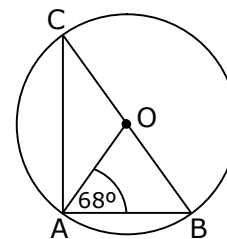


fig. 6

7. En la circunferencia de centro O de la figura 7,  $\angle BOA = 70^\circ$  y  $\angle COB = 40^\circ$ . ¿Cuánto mide el ángulo ABC?

- A)  $140^\circ$   
 B)  $125^\circ$   
 C)  $120^\circ$   
 D)  $110^\circ$   
 E)  $95^\circ$

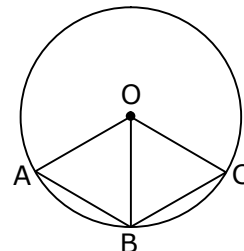
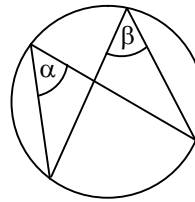


fig. 7

**TEOREMA**

Todos los ángulos inscritos en una circunferencia que subtenden un mismo arco tienen igual medida.

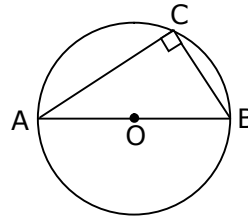
$$\alpha = \beta$$



**TEOREMA**

Todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.

$$\angle BCA = 90^\circ$$

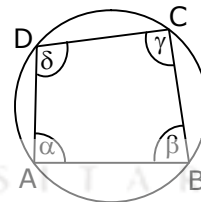


O: centro de la circunferencia

**TEOREMA**

En todo cuadrilátero inscrito en una circunferencia, los ángulos opuestos son suplementarios.

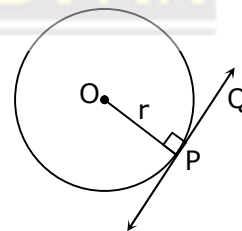
$$\begin{aligned} \alpha + \gamma &= 180^\circ \\ \beta + \delta &= 180^\circ \end{aligned}$$



**TEOREMA**

La recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio en el punto de tangencia.

$$\overline{QP} \text{ tangente en } P \Rightarrow \overline{QP} \perp \overline{OP}$$



**EJEMPLOS**

1. En la figura 1,  $\angle TPQ = 140^\circ$  y  $\angle QRP = 15^\circ$ . ¿Cuánto mide el  $\angle PQT$ ?

- A)  $15^\circ$
- B)  $20^\circ$
- C)  $25^\circ$
- D)  $30^\circ$
- E)  $35^\circ$

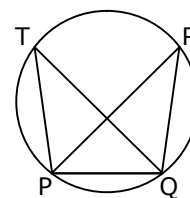


fig. 1

2. Si en la circunferencia de la figura 2,  $\angle \alpha + \angle \beta + \angle \gamma = 90^\circ$ , entonces la medida de  $\beta$  es

- A)  $15^\circ$
- B)  $30^\circ$
- C)  $45^\circ$
- D)  $60^\circ$
- E)  $90^\circ$

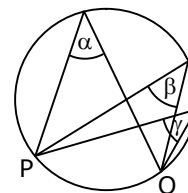


fig. 2

3. En la figura 3, el cuadrilátero ABCD está inscrito en la circunferencia. Entonces,  $\angle x =$

- A)  $30^\circ$
- B)  $65^\circ$
- C)  $115^\circ$
- D)  $130^\circ$
- E) no se puede determinar su medida.

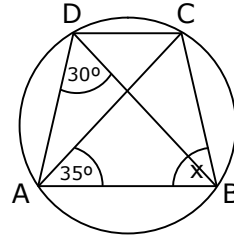


fig. 3

4. En la figura 4,  $\overline{AC}$  es diámetro de la circunferencia de centro O. ¿Cuánto mide el ángulo BCA?

- A)  $15^\circ$
- B)  $25^\circ$
- C)  $35^\circ$
- D)  $55^\circ$
- E)  $70^\circ$

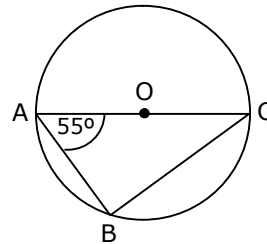


fig. 4

5. En la figura 5,  $\overline{PT}$  es tangente a la circunferencia de centro O, en T. ¿Cuánto mide el  $\angle OPT$ ?

- A)  $10^\circ$
- B)  $20^\circ$
- C)  $30^\circ$
- D)  $40^\circ$
- E)  $50^\circ$



fig. 5

6. En la circunferencia de centro O de la figura 6,  $\overline{PA}$  y  $\overline{PB}$  son tangentes en A y B, respectivamente. ¿Cuánto mide el ángulo BCA?

- A)  $25^\circ$
- B)  $50^\circ$
- C)  $65^\circ$
- D)  $100^\circ$
- E)  $130^\circ$

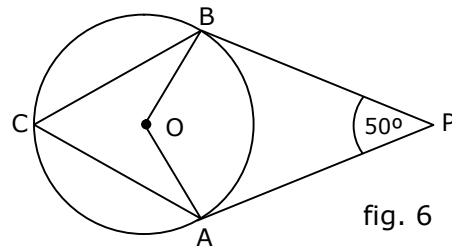


fig. 6

7. En la figura 7, el cuadrilátero ABCD está inscrito en la circunferencia. Si  $\beta = 145^\circ$  y  $\alpha = \beta - \delta$ , entonces  $\gamma$  es igual a

- A)  $35^\circ$
- B)  $45^\circ$
- C)  $55^\circ$
- D)  $60^\circ$
- E)  $70^\circ$

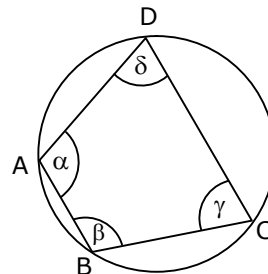


fig. 7

### ANGULO INTERIOR EN LA CIRCUNFERENCIA

El ángulo interior de la circunferencia es aquel que se forma al cortarse interiormente dos cuerdas, como se muestra en la figura 1, y su medida corresponde a la semisuma de los arcos que subtiende.

$$\alpha = \frac{\widehat{BA} + \widehat{CD}}{2}$$

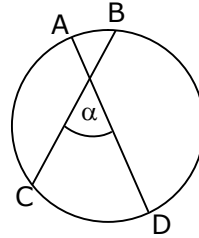


fig. 1

### ANGULO EXTERIOR EN LA CIRCUNFERENCIA

El ángulo exterior es aquel que tiene su vértice en un punto exterior de la circunferencia, pudiendo ser sus rayos, tangentes o secantes a la misma, como se muestra en la figura 2, y su medida corresponde a la semidiferencia de los arcos que subtiende.

$$\beta = \frac{\widehat{DC} - \widehat{AB}}{2}$$

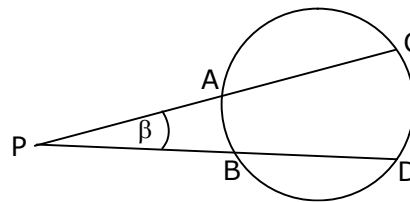


fig. 2

### ANGULO SEMI INSCRITO

El ángulo semi-inscrito es aquel cuyo vértice está sobre la circunferencia, sus rayos lo forman una cuerda  $\widehat{AC}$  y una recta L tangente en A, como se muestra en la figura 3, su medida corresponde a la mitad del arco que subtiende.

$$\delta = \frac{\widehat{AC}}{2}$$

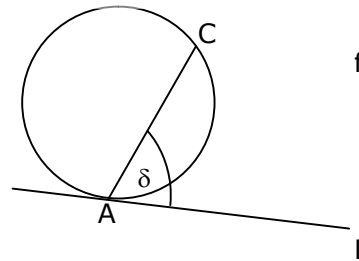


fig. 3

### EJEMPLO

1. En la circunferencia de la figura 4, la recta L es tangente en B, el ángulo DBC mide  $50^\circ$  y  $\widehat{EB} = 140^\circ$ , entonces el valor de  $x + y$  es

- A)  $70^\circ$
- B)  $80^\circ$
- C)  $90^\circ$
- D)  $100^\circ$
- E)  $120^\circ$

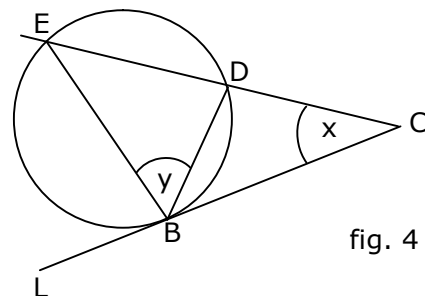


fig. 4

**EJERCICIOS**

1. En la circunferencia de centro O de la figura 1,  $\overline{AC}$  y  $\overline{BD}$  son diámetros. Si el ángulo DOC mide  $80^\circ$ , ¿cuánto mide el ángulo ABO?

- A)  $20^\circ$
- B)  $30^\circ$
- C)  $40^\circ$
- D)  $45^\circ$
- E)  $50^\circ$

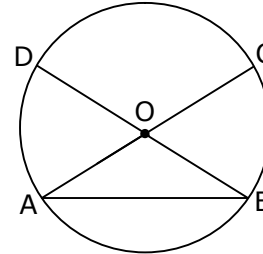


fig. 1

2. En la circunferencia de centro O y diámetro  $\overline{DB}$  de la figura 2, ¿cuánto mide el ángulo COA?

- A)  $70^\circ$
- B)  $100^\circ$
- C)  $120^\circ$
- D)  $140^\circ$
- E)  $160^\circ$

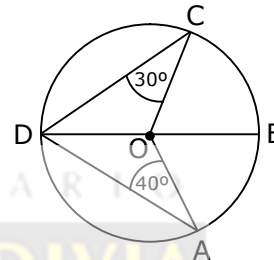


fig. 2

3. En la circunferencia de centro O de la figura 3,  $\angle BAC + \angle BDC = 80^\circ$ . Entonces, el  $\angle BOC$  mide

- A) falta información.
- B)  $80^\circ$
- C)  $60^\circ$
- D)  $40^\circ$
- E)  $20^\circ$

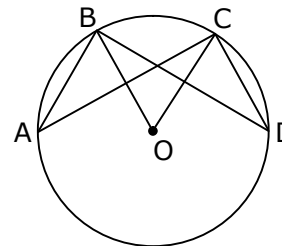


fig. 3

4. O y O' son los centros de las circunferencias de la figura 4. Si  $\angle DAC = 40^\circ$ , ¿cuánto mide el ángulo ACD?

- A)  $10^\circ$
- B)  $20^\circ$
- C)  $25^\circ$
- D)  $40^\circ$
- E)  $50^\circ$

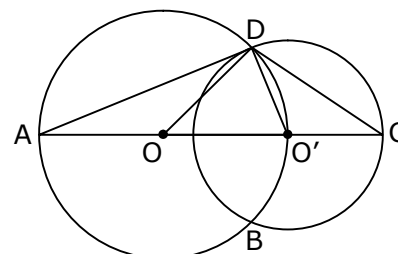


fig. 4



5. En la circunferencia de centro O de la figura 5, ¿cuánto mide el ángulo OPR?

- A)  $35^\circ$
- B)  $40^\circ$
- C)  $45^\circ$
- D)  $50^\circ$
- E)  $70^\circ$

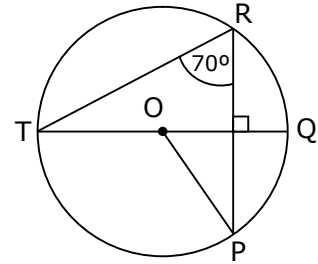


fig. 5

6. En la circunferencia de centro O de la figura 6,  $\vec{CA}$ ,  $\vec{AB}$  y  $\vec{CB}$  son secantes. Si  $\alpha = 80^\circ$  y  $\beta = 50^\circ$ , entonces el ángulo x es igual a

- A)  $65^\circ$
- B)  $75^\circ$
- C)  $90^\circ$
- D)  $100^\circ$
- E)  $130^\circ$

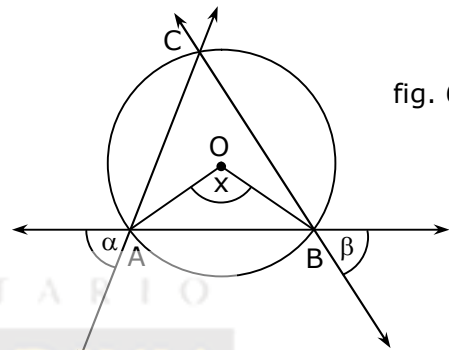


fig. 6

7. En la figura 7, O es el centro de la circunferencia. Si  $\angle ORQ = 36^\circ$  y  $\angle ROP = 54^\circ$ , ¿cuánto mide el  $\angle RTP$ ?

- A)  $63^\circ$
- B)  $72^\circ$
- C)  $108^\circ$
- D)  $117^\circ$
- E)  $144^\circ$

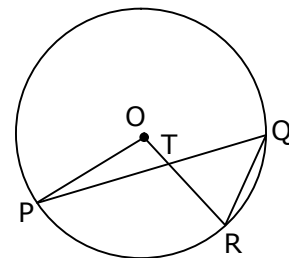


fig. 7

8. En la circunferencia de la figura 8, el ángulo ACD mide  $10^\circ$  y el arco BC mide  $100^\circ$ , la medida del ángulo x es

- A)  $45^\circ$
- B)  $55^\circ$
- C)  $60^\circ$
- D)  $65^\circ$
- E)  $100^\circ$

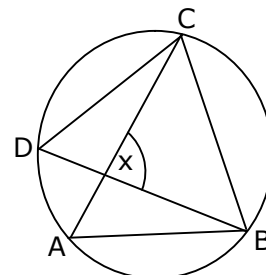


fig. 8

9. En la figura 9,  $\angle BCA = 40^\circ$  y  $\angle CDB = 30^\circ$ . ¿Cuánto mide el  $\angle ABC$ ?

- A)  $60^\circ$
- B)  $90^\circ$
- C)  $100^\circ$
- D)  $110^\circ$
- E)  $120^\circ$

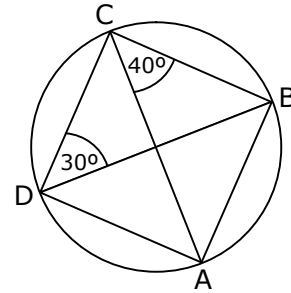


fig. 9

10. En la figura 10,  $\overline{MQ}$  es diámetro y  $\angle TNQ = 16^\circ$ . ¿Cuánto mide el  $\angle MQT$ ?

- A)  $74^\circ$
- B)  $64^\circ$
- C)  $45^\circ$
- D)  $32^\circ$
- E)  $16^\circ$

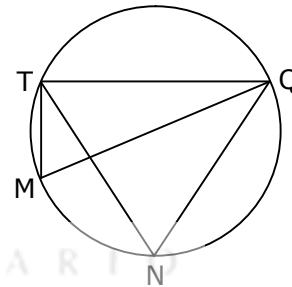


fig. 10

11. En la figura 11, O es el centro de la circunferencia. Si  $\overline{BE} \parallel \overline{CD}$  y  $\angle COA = 110^\circ$ , entonces ¿cuánto mide  $\alpha$ ?

- A)  $55^\circ$
- B)  $110^\circ$
- C)  $125^\circ$
- D)  $135^\circ$
- E)  $140^\circ$

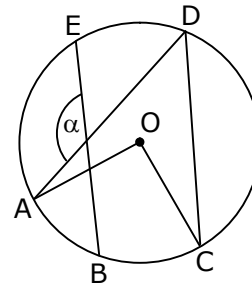


fig. 11

12. En la figura 12,  $\overline{CB} \parallel \overline{DA}$ . Si  $\widehat{CD} = 80^\circ$ , entonces ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) **siempre** verdadera(s)?

- I)  $\angle BCA = 40^\circ$
- II)  $\angle BEA = 80^\circ$
- III)  $\widehat{DA} = 100^\circ$

- A) Sólo I
- B) Sólo II
- C) Sólo I y II
- D) Sólo II y III
- E) I, II y III

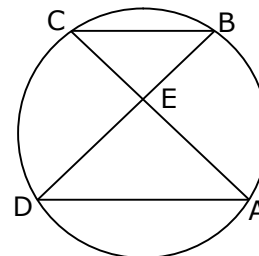


fig. 12

13. O es centro de la circunferencia de la figura 13,  $\angle QOP = \angle ROQ = \angle SOR$  y  $\angle RSO = 72^\circ$ . ¿Cuánto mide el ángulo PTQ?

- A)  $54^\circ$
- B)  $36^\circ$
- C)  $35^\circ$
- D)  $27^\circ$
- E)  $18^\circ$

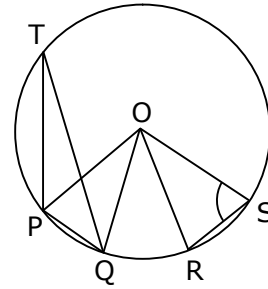


fig. 13

14.  $\widehat{BC}$  es un cuarto de circunferencia con centro en A (fig. 14). Si  $\overline{BD} = \overline{AB}$ , entonces el  $\angle CAD$  mide

- A)  $15^\circ$
- B)  $30^\circ$
- C)  $45^\circ$
- D)  $60^\circ$
- E)  $75^\circ$

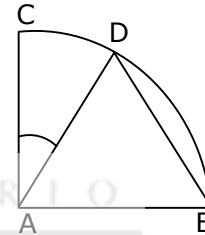


fig. 14

15. En la figura 15, la circunferencia tiene centro en O. La medida del ángulo  $x$  es

- A)  $12,25^\circ$
- B)  $12,5^\circ$
- C)  $25^\circ$
- D)  $37,5^\circ$
- E)  $50^\circ$

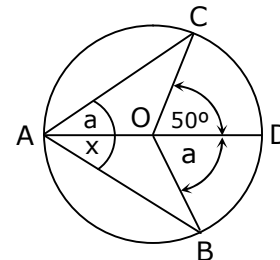


fig. 15

16. En la figura 16, la recta L es tangente en C a la circunferencia circunscrita al triángulo ABC, el valor de  $\alpha + \beta$  es

- A)  $70^\circ$
- B)  $90^\circ$
- C)  $100^\circ$
- D)  $120^\circ$
- E)  $140^\circ$

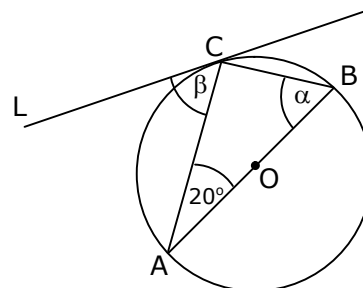


fig. 16

17. En la figura 17, ¿cuánto mide el ángulo inscrito  $\beta$ ?

- A)  $28^\circ$
- B)  $40^\circ$
- C)  $55^\circ$
- D)  $80^\circ$
- E)  $110^\circ$

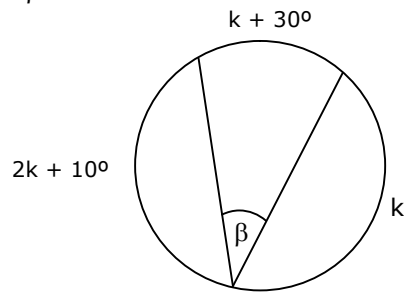


fig. 17

18. En la circunferencia de centro O de la figura 18, ¿cuánto mide  $\beta$ ?

- A)  $40^\circ$
- B)  $70^\circ$
- C)  $80^\circ$
- D)  $100^\circ$
- E)  $140^\circ$

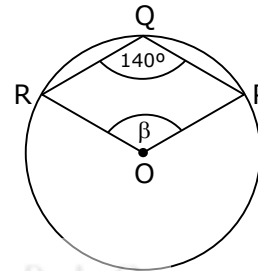


fig. 18

19. En la circunferencia de centro O,  $\angle BCD = 125^\circ$  (fig. 19). Entonces, el  $\angle DAB$  mide

- A)  $45^\circ$
- B)  $55^\circ$
- C)  $60^\circ$
- D)  $65^\circ$
- E) no se puede determinar.

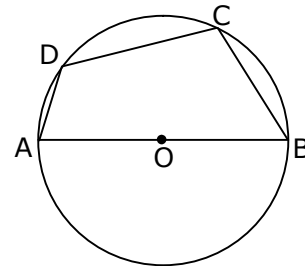


fig. 19

20. En la circunferencia de centro O,  $\overline{AB}$  es diámetro y  $\angle BCD = 130^\circ$  (fig. 20). Entonces, la medida del ángulo  $x$  es

- A) faltan datos para determinarlo.
- B)  $40^\circ$
- C)  $55^\circ$
- D)  $65^\circ$
- E)  $70^\circ$

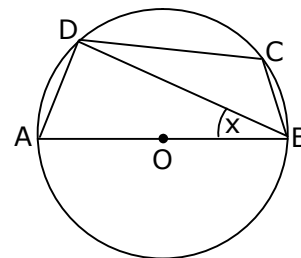


fig. 20

21. En la circunferencia de centro O (fig. 21),  $\angle BOA = 2\angle ABD$ . ¿Cuánto mide el ángulo BCA?

- A)  $22,5^\circ$
- B)  $30^\circ$
- C)  $40^\circ$
- D)  $45^\circ$
- E)  $90^\circ$

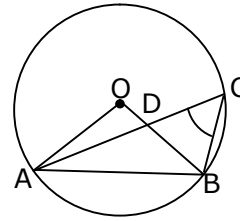


fig. 21

22. Si en la circunferencia de centro O de la figura 22, el ángulo inscrito BCA mide  $80^\circ$ , ¿cuánto mide el ángulo ABO?

- A)  $10^\circ$
- B)  $20^\circ$
- C)  $25^\circ$
- D)  $50^\circ$
- E)  $70^\circ$

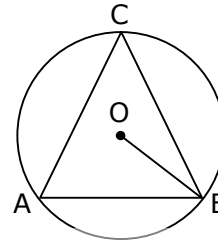


fig. 22

23. En la figura 23,  $\overleftrightarrow{DE}$  es tangente a la circunferencia de centro O, en D. ¿Cuál es el valor del  $\angle x$ ?

- A)  $36^\circ$
- B)  $26^\circ$
- C)  $18^\circ$
- D)  $12^\circ$
- E) Falta información

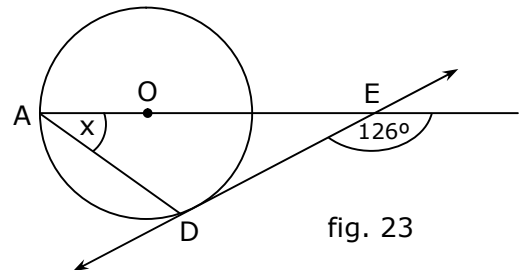


fig. 23

24. En el cuadrilátero ABCD inscrito en la circunferencia de la figura 24,  $\alpha - \gamma = 120^\circ$ . Si  $\beta = \frac{\alpha}{2}$ , ¿cuánto mide el ángulo x?

- A)  $30^\circ$
- B)  $75^\circ$
- C)  $105^\circ$
- D)  $150^\circ$
- E)  $155^\circ$

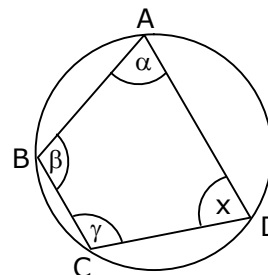


fig. 24

25. En la circunferencia de centro  $O$  de la figura 25,  $\overline{AB}$  es diámetro y  $\widehat{CA} \cong \widehat{BD}$ . Si  $\widehat{CA} = 3m + 10$  y el  $\angle ADC = 3m - 10$ , entonces  $\angle x + \angle y =$

- A)  $170^\circ$   
 B)  $160^\circ$   
 C)  $150^\circ$   
 D)  $140^\circ$   
 E)  $120^\circ$

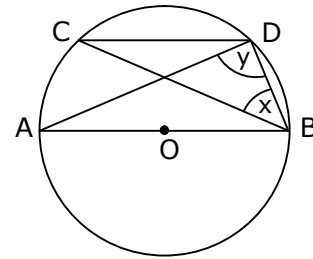


fig. 25

26. En la circunferencia de centro  $O$  de la figura 26, se puede conocer la medida de  $\alpha$  si:

- (1)  $\angle BOA = 2\alpha$   
 (2)  $\angle ABO = \alpha$

- A) (1) por sí sola  
 B) (2) por sí sola  
 C) Ambas juntas, (1) y (2)  
 D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)  
 E) Se requiere información adicional

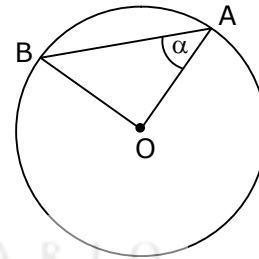


fig. 26

27. En la circunferencia de centro  $O$  de la figura 27,  $\overline{AD}$  y  $\overline{BC}$  son diámetros. Se puede conocer el valor del ángulo  $x$  si:

- (1)  $\widehat{CA} = 110^\circ$   
 (2)  $\angle BCA + \angle BDA = 70^\circ$

- A) (1) por sí sola  
 B) (2) por sí sola  
 C) Ambas juntas, (1) y (2)  
 D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)  
 E) Se requiere información adicional

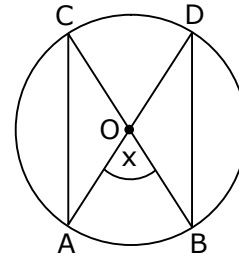


fig. 27

28.  $\overline{AB}$  es diámetro de la circunferencia de centro  $O$  (fig. 28). La medida del  $\angle CBA$  se puede determinar si:

- (1)  $\overline{AB} = 2\overline{AC}$   
 (2)  $\angle BOC = 2\angle COA$

- A) (1) por sí sola  
 B) (2) por sí sola  
 C) Ambas juntas, (1) y (2)  
 D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)  
 E) Se requiere información adicional

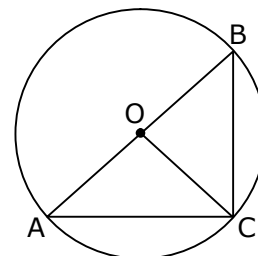


fig. 28

29. En la figura 29, el cuadrilátero ABCD está inscrito en la circunferencia. Se puede saber la medida del  $\angle CDA$  si :

- (1)  $\angle BCD = 80^\circ$
- (2)  $\angle DAB = 100^\circ$

- A) (1) por sí sola
- B) (2) por sí sola
- C) Ambas juntas, (1) y (2)
- D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
- E) Se requiere información adicional

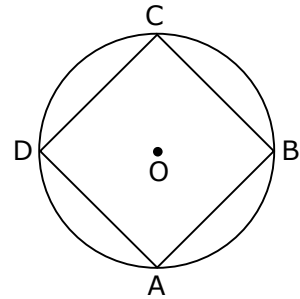


fig. 29

30. En la circunferencia de centro O de la figura 30, A y B son puntos de tangencia. Se puede determinar la medida del  $\angle BOA$  si :

- (1)  $\angle PBO = \angle OAP$
- (2)  $\angle BOA = 3\angle APB$

- A) (1) por sí sola
- B) (2) por sí sola
- C) Ambas juntas, (1) y (2)
- D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
- E) Se requiere información adicional

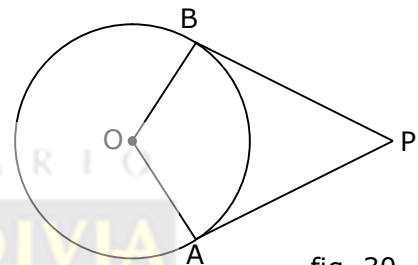


fig. 30

**RESPUESTAS**

Ejemplos Págs.	1	2	3	4	5	6	7
1 y 2	E	E	C	B	A		
3 y 4	C	A	D	D	C	A	B
5 y 6	C	B	C	C	A	C	E
7	B						

**EJERCICIOS PÁG. 8**

1. E	11. C	21. D
2. D	12. C	22. A
3. B	13. E	23. C
4. C	14. B	24. C
5. D	15. B	25. D
6. D	16. E	26. A
7. A	17. C	27. D
8. C	18. C	28. D
9. D	19. B	29. E
10. A	20. B	30. B

**DMONMA17**

**Puedes complementar los contenidos de esta guía visitando nuestra web**  
<http://www.pedrodevaldivia.cl/>