Matemáticas y su Didáctica para Maestros

Manual para el Estudiante

Edición Febrero 2002

Proyecto *Edumat-Maestros*
Director: Juan D. Godino
http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

MEDIDA DE MAGNITUDES Y SU DIDÁCTICA PARA MAESTROS

Juan D. Godino
Carmen Batanero
Rafael Roa

Proyecto *Edumat-Maestros*
Director: Juan D. Godino
http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

MEDIDA DE MAGNITUDES Y SU DIDÁCTICA PARA MAESTROS

Juan D. Godino
Carmen Batanero
Rafael Roa

MEDIDA DE MAGNITUDES Y SU DIDÁCTICA PARA MAESTROS

Departamento de Didáctica de la Matemática
Facultad de Ciencias de la Educación
Universidad de Granada
18071 Granada

ISBN:84-932510-2-X
Depósito Legal: GR-341/ 2002

Distribución en Internet:
http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

Publicación realizada en el marco del Proyecto de Investigación y Desarrollo del Ministerio de Ciencia y Tecnología, BSO2002-02452.

Índice

Página

Capítulo 2: MAGNITUDES GEOMÉTRICAS

Medida de Magnitudes y su Didáctica para Maestros

Capítulo 1:

MAGNITUDES Y MEDIDA

C: Contextualización Profesional

ANÁLISIS DE PROBLEMAS SOBRE MEDIDA EN PRIMARIA (CAPACIDAD, PESO Y TIEMPO)

Consigna:

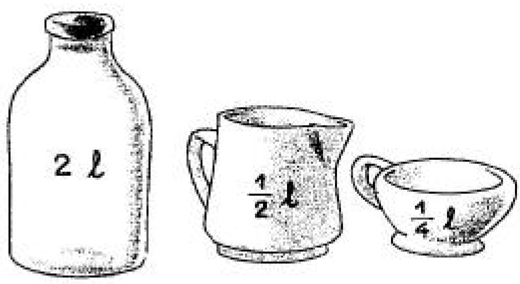
A continuación incluimos algunos enunciados de problemas y ejercicios que han sido tomados de libros de texto de primaria. Para cada uno de ellos:

1) Resuelve los problemas propuestos.
2) Indica los conceptos y procedimientos matemáticos que se ponen en juego en la solución.
3) Clasifica los enunciados en tres grupos según el grado de dificultad que les atribuyes (fácil, intermedio, difícil).
4) Para cada problema enuncia otros dos del mismo tipo, cambiando las variables de la tarea, de manera que uno te parezca más fácil de resolver y otro más difícil.
5) ¿Piensas que los enunciados son suficientemente precisos y comprensibles para los alumnos de primaria? Propón un enunciado alternativo para aquellos ejercicios que no te parezcan suficientemente claros para los alumnos.
6) Consigue una colección de libros de texto de primaria. Busca en ellos tipos de problemas sobre medida no incluidos en esta relación. Explica en qué se diferencian.

Enunciados de problemas incluidos en libros de primaria:

1. Observa la capacidad de los recipientes y contesta:

- ¿Cuántas jarras se pueden llenar con el agua de la botella?
- ¿Cuántas tazas se pueden llenar con el agua de la jarra?
- ¿Cuántas tazas se pueden llenar con el agua de la botella?



2. Por la mañana Mónica bebió medio litro de leche y por la tarde bebió un cuarto de litro de leche. ¿Cuántos centilitros de leche bebió en total?

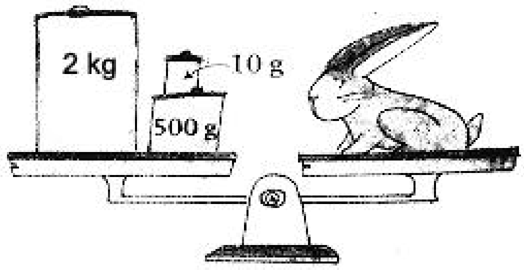
3. Alfredo tomó medio litro de zumo de naranja y su hermana Olga tomó un cuarto de litro. ¿Cuántos centilitros de zumo tomó Alfredo más que Olga?

4. La capacidad de una piscina es de 64 kilolitros. Sólo contiene 59 kilolitros de agua. ¿Cuántos litros de agua le faltan para llenarse?

5. Ricardo compra 6 cajas de espárragos. Cada caja pesa medio kilo. ¿Cuántos gramos pesan las 6 cajas?

6. Calcula el peso en gramos en cada bolsa:

- 2 kg y 250 g =
- 3 kg y 375 g =
- 4 kg y 480 g =
- 5 kg y 750 g =



8. ¿Cuál es el peso en gramos del conejo?

¿Cuánto pesarán aproximadamente cinco conejos?

9. Relaciona con la unidad que expresarías su capacidad o peso.

El peso de un coche	Kilolitros
La capacidad de una piscina	
El peso de una manzana	Litros
La capacidad de una olla	
El peso de un león	Kilos
La capacidad de una bañera	
El peso de un canario	Gramos
La capacidad de la cisterna de un camión	

10. Pepa ha comprado 3 kg de naranjas a 169 ptas el kilo y 4 kg de manzanas a 145 ptas el kilo. ¿Cuánto ha pagado en total?

11¿Qué hora será dentro de 10 minutos? ¿Cuántos minutos tienen que pasar para que el reloj marque las doce y cuarto?

Dibuja relojes que marquen estas horas:

- Las tres y media
- Las seis menos cinco
- Las nueve y cuarto
- Las cuatro y cinco
- Las ocho menos veinte

Escribe cada una de las horas anteriores tal y como aparecen en un reloj analógico.

12. Laura y Miguel nacieron el mismo año. Laura nació el 13 de Febrero y Miguel el 9 de Diciembre. ¿Cuántos días es mayor Laura que Miguel? ¿Cuántas semanas? ¿Cuántos días hay desde el cumpleaños de Miguel hasta final de año?

13. Las niñas y niños de la clase de Ana han salido de excursión a las nueve de la mañana y han vuelto a las cinco de la tarde. ¿Cuántas horas ha durado la excursión?

B: Conocimientos Matemáticos

1. LA MEDIDA COMO PROBLEMA EMPÍRICO, MATEMÁTICO Y DIDÁCTICO

La medida de magnitudes nos obliga a reflexionar sobre el difícil problema de las relaciones entre las matemáticas y la realidad. Los fenómenos físicos y sociales son organizados mediante el lenguaje matemático y ello nos lleva a reflexionar sobre la naturaleza de los objetos matemáticos (problemas, técnicas, símbolos, conceptos, proposiciones, justificaciones, teorías, etc.). Bertrand Russell dedicó varios capítulos de su obra "Principios de la matemática" a reflexionar sobre las nociones de magnitud y cantidad dentro de su enfoque logicista de la matemática.

Las ideas de magnitud, cantidad y medida en diversos contextos

Es importante tener en cuenta que las prácticas y el lenguaje cambian según el contexto institucional en el que se estudia y usa la medida.

- En la vida cotidiana y en las ciencias experimentales se habla de magnitudes para referirse a propiedades o cualidades de los objetos o fenómenos susceptibles de tomar diferentes valores numéricos. "Magnitud es cualquier aspecto de las cosas que puede expresarse cuantitativamente, como la longitud, el peso, la velocidad o la luminosidad"; "Cantidad es el aspecto por el que se diferencian entre sí las porciones de la misma cosa o los conjuntos de la misma clase de cosas, por el cual esas porciones o esos conjuntos se pueden medir o contar" (Diccionario de M. Moliner).
- En cambio en las ciencias humanas y sociales esta noción de magnitud y cantidad es demasiado restrictiva, extendiéndose el uso del término magnitud a rasgos de tipo cualitativo (clase social, placer, etc). En este caso, las "cantidades" vienen a ser las distintas modalidades o valores que puede tomar el rasgo o característica del objeto o fenómeno en cuestión.
- En la matemática (pura), como veremos después, con la palabra magnitud se designa un conjunto de objetos abstractos (cantidades) dotado de una cierta estructura algebraica, y medida es un isomorfismo entre dicha estructura y un subconjunto apropiado de números reales.

El profesor, además de conocer estos usos debe saber cómo y por qué enseñarlos en los diferentes niveles educativos, o sea, seleccionar las tareas a proponer, papeles del profesor y de los alumnos, patrones de interacción, tipos de situaciones didácticas a implementar, instrumentos de evaluación, etc.

En lo que sigue tratamos de aportar nuestras ideas y soluciones a estas dos áreas problemáticas - la matemática y la didáctica.

2. PRESENTACIÓN INFORMAL DE LA MEDIDA DE MAGNITUDES

2.1. La actividad de medir. Magnitud y cantidad

Se habla de *medir* (en sentido amplio) para designar la acción de asignar un código identificativo a las distintas modalidades o grados de una característica de un objeto o fenómeno perceptible, que puede variar de un objeto a otro, o ser coincidente en dos o más objetos.

Con esta descripción tenemos en cuenta no sólo la medida habitual de características cuantitativas y continuas como longitud, peso, capacidad, etc., sino que también consideramos "medir" asignar una categoría a rasgos cualitativos como el color de los ojos, la región de nacimiento, el grado de placer que ocasiona un estímulo, etc. Cada modalidad (o grado) es un valor de la variable que representa el rasgo correspondiente.

Magnitud

Habitualmente se suele reservar el nombre de *magnitud* para los atributos o rasgos que varían de manera cuantitativa y continua (longitud, peso, densidad, etc.), o también de manera discreta (p. e. "el número de personas"); las *cantidades* son los valores de dichas variables.

En este caso, *medir* una cantidad consiste en determinar las veces que esa cantidad contiene a la cantidad (o cantidades) que se toman como referencia (unidades de medida). Por ejemplo, decimos que el largo de la mesa es 1 m 40 cm. Al hacer una medición asignamos un número y una unidad de medida, o varias, dependiendo de si la cantidad a medir es múltiplo de la cantidad tomada como referencia o no, y de la precisión deseada.

Ejercicios

1. Pon tres ejemplos de atributos o rasgos de objetos que consideres son magnitudes.

2. Pon tres ejemplos de atributos o rasgos de objetos que consideres que no son magnitudes.

3. Describe los requisitos que se exigen a un atributo de un objeto para que digamos que se trata de una magnitud.

Aunque en la educación primaria y en la vida cotidiana las magnitudes que se estudian y usan son cuantitativas, y por tanto, medibles mediante números, es importante tener en cuenta que otros rasgos de los objetos y fenómenos con los que entramos en contacto admiten también una codificación que refleja las clasificaciones y ordenaciones que se pueden hacer con ellos. Existen técnicas estadísticas que permiten encontrar relaciones entre los valores de tales variables cualitativas y ordinales.

Cantidad de magnitud

Es importante distinguir los objetos particulares poseedores de un rasgo (un valor concreto), de la clase de objetos que tienen el mismo valor o cantidad de dicho rasgo.

- Por ejemplo, el largo y ancho de este folio DIN A4 es directamente perceptible por la vista y por el tacto.
- En cambio la clase de los folios DIN A4, no es "un objeto" perceptible. Es una norma que declara DIN A4 a cualquier hoja de papel rectangular que mida 21 cm de ancho por 29'7 cm de largo.

Con el término *cantidad* nos referimos habitualmente al valor que toma la magnitud en un objeto particular (el largo de esta mesa es 1'3 m); pero también hablamos de una longitud o distancia entre dos puntos de 1'3 m. En este caso la cantidad de longitud (o simplemente, la longitud) de 1'3 m hace referencia a cualquier objeto de la clase de todos los objetos que se pueden superponer exactamente con el largo de nuestra mesa, al menos imaginariamente.

Ejercicios

4. Para cada uno de los tres ejemplos de magnitudes que has dado en el ejercicio 1, indica tres ejemplos de cantidades de dichas magnitudes.

2.2. Situaciones de medida

El primer punto de reflexión de la enseñanza de la medida debe ser clarificar los tipos de situaciones o tareas que han llevado, y continúan llevando, al hombre a realizar la actividad de medir ciertas características de los objetos perceptibles. Si queremos que los alumnos entiendan la razón de ser de la medida debemos enfrentarles a dichas situaciones, no tanto para que ellos reinventen por sí mismos las técnicas, sino para que puedan dominar los procedimientos de medida y atribuir un sentido práctico al lenguaje y normas que regulan la actividad de medir.

Situaciones de comunicación

La situación problemática característica de la medida es la de *comunicación* a otras personas separadas en el espacio o en el tiempo, de cuántas cosas tenemos, o de cuál es el tamaño (dimensiones) de los objetos y cómo cambian las cantidades como consecuencia de ciertas transformaciones.

La imposibilidad o dificultad de trasladar la colección o el objeto en cuestión en el espacio o en el tiempo, debido al tamaño o naturaleza de los mismos, lleva a tomar un objeto (o varios) de referencia que sí se pueden trasladar o reproducir. Dichos objetos de referencia son las unidades o patrones de medida.

> Ejemplo: Podemos usar una simple cuerda para informar a otras personas (o a nosotros mismos) del ancho de un mueble para ver si cabe en una pared, o las marcas hechas sobre un palo para informar y recordar cuántas ovejas tenemos en el redil en un momento dado.

Comparación y cambio

Otro tipo de situaciones de medida es la *búsqueda de relaciones* entre cantidades de dos o más magnitudes, actividad que caracteriza el trabajo del científico experimental.

> Ejemplos: ¿Cómo varía el espacio recorrido por un cuerpo al caer por un plano inclinado en función del tiempo transcurrido?
>
> También en la vida diaria se presentan estas situaciones de búsqueda de relaciones entre cantidades: Si esta porción de fruta (1 kg) cuesta 80 céntimos, ¿cuánto debo cobrar a un cliente por esta bolsa?

Afortunadamente no todas las situaciones son distintas unas de otras, sino que hay tipos de situaciones o tareas para las que se pueden usar las mismas técnicas e instrumentos. Se cuenta de la misma manera las ovejas del redil, o el número de árboles de la finca; se mide igual el largo de este folio que el ancho de la mesa. Nos interesa identificar, describir y enseñar estas invariancias de situaciones, técnicas y lenguaje (oral y escrito) para legar a las generaciones venideras nuestros *artefactos de medida*, incluyendo el lenguaje de la medida.

Ejercicios

5. Pon tres ejemplos de situaciones prácticas en las que sea necesario medir las cantidades de una magnitud.

6. Para cada uno de los ejemplos de la pregunta 5 indica las unidades de medida que se consideran habitualmente como más adecuadas.

7. Indica los instrumentos convencionales para medir las cantidades que has elegido en la pregunta 5.

8. Describe la diferencia entre "magnitud", "cantidad de magnitud" y "medida de una cantidad".

2.3. Escalas de medida y tipos de magnitudes

Escala nominal: Hay rasgos cuyas distintas modalidades permiten clasificar los objetos y fenómenos a los cuales se atribuyen, pero dichos valores no se pueden ordenar ni tiene sentido realizar acciones de agregación o de separación con ellos. Se dice que, en estos casos, se usa una escala de medida nominal. Los códigos asignados funcionan como etiquetas identificativas, pero no se puede operar algebraicamente con ellos. No tiene sentido agregar el color azul con el negro cuando hablamos del color de los ojos de un grupo de personas.

Escala ordinal. Hay otros rasgos cuyas cantidades o valores se pueden ordenar de mayor a menor, pero no se pueden agregar. Por ejemplo, en una cola para entrar a un espectáculo podemos observar el lugar que ocupa cada persona (1º, 2º, 3º, ...); aquí no tiene sentido tomar dos personas "agregarlas" y decir el orden que ocupa "el objeto agregado". En estos casos se dice que la escala en la que se mide el rasgo correspondiente es ordinal.

Magnitudes intensivas. Existen rasgos para los que tiene sentido agregar los objetos que los soportan pero la cantidad del rasgo en el objeto agregado no es proporcionalmente aditiva. Esto ocurre, por ejemplo, con la temperatura, la presión, la densidad. Podemos mezclar dos cantidades iguales de un líquido a temperaturas de 20º y 30º, respectivamente, y la cantidad que se obtiene agregando los dos líquidos sigue teniendo el rasgo de la temperatura, pero ésta no es la suma de las temperaturas de los líquidos en cuestión. En estos casos se habla de magnitudes intensivas.

Magnitudes extensivas. En otros rasgos, como la longitud, el peso, el área, etc.; estas magnitudes se pueden describir como "proporcionalmente agregables", y la escala de medida correspondiente se dice que es de razón. También se habla en este caso de magnitudes extensivas o sumables: la cantidad de magnitud de un objeto compuesto de partes se obtiene agregando las cantidades de cada parte (esta operación de agregación se considera también como *suma* de cantidades).

Ejercicios

9. Hemos realizado una encuesta a un grupo de alumnos. Indica cuáles de las siguientes características corresponden a una escala de medida nominal y ordinal. ¿Cuáles corresponden a magnitudes extensivas?: Peso, religión, número de hermanos, deporte preferido, número de orden de nacimiento respecto a sus hermanos, color de pelo, talla, piso en que vive.

10. La altitud sobre el nivel del mar, ¿es una magnitud extensiva?

2.4. Precisión y errores de medida

Al medir cantidades de magnitudes continuas cometemos *errores* por diversas causas –que van desde el propio procedimiento hasta fallos de la persona que mide. Por tanto, los valores que obtenemos son aproximados. El error de una medida también puede estar motivado por los errores sistemáticos del instrumento, que pueden deberse a defectos de fabricación, variaciones de la presión, la temperatura o la humedad. Estos errores no pueden eliminarse totalmente y para que su valor sea lo más pequeño posible se realizan pruebas de control que consisten en cotejar las medidas con las de un objeto patrón.

En el proceso de medir es necesario, por tanto, estimar el error que se comete al tomar ese valor. La *precisión* de un instrumento de medida es la mínima variación de magnitud que se puede determinar sin error. Un instrumento será tanto *más preciso* cuanto mayor sea el número de cifras significativas que puedan obtenerse con él.

- Para *estimar* la medida de una cantidad, acercándose lo más posible al valor exacto, hay que repetir la medida varias veces, calcular el valor medio y los errores absolutos y las medidas de dispersión correspondientes.
- El *error absoluto* de una medida cualquiera es la diferencia entre el valor medio obtenido y el hallado en la medida.
- El *error de dispersión* es el error absoluto medio de todas las medidas. El resultado de la medida se expresa como el valor medio "más, menos" el error de dispersión
- Metrología es la ciencia que tiene por objeto el estudio de las unidades y de las medidas de las magnitudes; define también las exigencias técnicas de los métodos e instrumentos de medida.

Ejercicio

11. Nueve estudiantes han pesado un objeto en la clase de ciencias, usando la misma escala. Los pesos registrados por cada estudiante (en gramos) se muestran a continuación:

6.2 6.3 6.0 6.2 6.1 6.5 6.2 6.1 6.2

- Los estudiantes quieren determinar con la mayor precisión posible el peso real del objeto. ¿ Qué harías para calcularlo ?
- Determina el error absoluto de cada una de las medidas y el error de dispersión

2.5. Sistemas irregulares y regulares de unidades de medida

Cuando la medida no es entera hay que recurrir a un encuadramiento.

Ejemplo: Si deseamos medir el largo de la mesa usando como unidad el largo de un folio DIN A4 diremos que la medida está entre 6 y 7 folios. Si esta medida es demasiado grosera para el fin que pretendemos podemos tomar una unidad más pequeña, por ejemplo, el ancho del folio, o la anchura de un alfiler. En este último caso podríamos precisar que el largo de la mesa está comprendido entre 1400 y 1401 anchos de alfiler.

En el ejemplo anterior, también podemos usar las tres unidades, afirmando que el largo de la mesa mide 6 largos de folio, 1 ancho de folio y entre 150 y 151 alfileres. Esta manera de expresar la medida, usando varias unidades para aumentar la precisión se dice que es una *expresión compleja* de medida.

En este ejemplo hemos usado un *sistema irregular* de unidades de medida, lo que plantea problemas a la hora de realizar cálculos y conversiones entre las distintas unidades. Por ello es aconsejable adoptar *sistemas regulares* de unidades. Un sistema regular para la longitud podría ser, siguiendo con el ejemplo del largo de un folio como unidad principal, tomar como primera subunidad la mitad del folio, la siguiente, la mitad de la mitad, etc., y como sobreunidades (múltiplos), el doble de un folio, cuatro folios, etc.

En principio cualquier sistema regular podría ser válido y cómodo para expresar las mediciones, pero hay razones que justifican el uso de un sistema común y universalmente aceptado de medidas. Ello permite comunicar los resultados de las medidas a cualquier parte, sin necesidad de llevar consigo las unidades adoptadas. Decir que la masa de un objeto es 3 u_2 1 u_1 supone no decir nada a quien desconoce las unidades u_2 y u_1, de manera que se impone el uso común de un sistema de medida previamente acordado. Estos sistemas de medida reciben el nombre de *legales*, pues su uso ha sido regulado mediante leyes.

Nuestro sistema legal y el de todo el mundo, a excepción de los países anglosajones que se encuentran en proceso de cambio, es el *Sistema Métrico Decimal*, que naturalmente es un sistema regular en el que los cambios se realizan de diez en diez (decimal) en las magnitudes lineales, y según potencias de diez en las otras magnitudes.

Ejercicios

12. Virginia avanza un metro, aproximadamente, cada dos pasos. En un paseo ha recorrido 1 hm, 8 dam, 9 m y 50 dm. a) ¿Cuántos pasos ha dado, aproximadamente? b) Expresa la medida compleja dada en este enunciado para la distancia recorrida por Virginia usando como única unidad el metro.

13. Indica la magnitud, las cantidades, y las unidades de medida que se ponen en juego en el problema 12.

2.6. Significado de la medida de magnitudes

A continuación presentamos una síntesis de los “objetos" (perceptibles y abstractos), así como las acciones (reales y mentales) que se ponen en juego en el proceso de medida de magnitudes. Se ejemplifican en el caso de la magnitud peso.

(1) Fenomenología (situaciones, tareas):

Son las situaciones en las cuales se tiene necesidad de medir cantidades. Una situación prototípica que motiva la medida del peso puede ser: Si un kilo de trigo vale 0'2 euros, ¿cuánto valdrá mi cosecha? Si un gramo de oro vale 30 euros, ¿cuánto me pagarán por este anillo?

(2) Elementos perceptibles (objetos reales, notaciones):

- Objetos materiales soportes de la cualidad que se mide, unidades de medida, instrumentos de medida.
- Objetos lingüísticos /notacionales: 'peso', 'gramo', g, hg, kg, escrituras alfanuméricas para expresar cantidades y medidas.

(3) Acciones (operaciones, técnicas):

- La acción de medir efectivamente requiere el dominio de una técnica que depende de los instrumentos de medida. Las destrezas requeridas en el caso del peso para el manejo de la balanza de platillos son bien distintas de una balanza de resorte o una balanza electrónica.
- Se requiere hacer cálculos aritméticos (sumas y productos del número de unidades por su valor).

(4) Conceptos y proposiciones (atributos, propiedades):

- La cualidad designada con el nombre 'peso' atribuible a todos los objetos materiales. "Todo cuerpo pesa", es una abstracción empírica de cierto tipo de experiencias con los objetos materiales.
- Desde el punto de vista matemático se puede describir como un conjunto de objetos homogéneos entre cuyos elementos se puede definir una suma y una ordenación que le dota de la estructura de semimódulo (M, +, ≤).
- Cantidad de peso de un objeto material; todos los objetos que equilibran una balanza se dice

que tienen la misma cantidad de peso. Cada uno de los elementos del conjunto M.
- Tipos de magnitudes (discretas, continuas, absolutas, relativas), extensivas, intensivas.
- La medida como una clase de acciones reguladas que establece la equivalencia entre una cantidad y una colección de cantidades tomadas como unidades.
- La medida como aplicación del conjunto M en un conjunto numérico.
- Unidad de medida; cantidad usada como elemento de comparación reiterada.
- Valor de la medida con una unidad particular (número real positivo).
- Medida concreta (el par, [número, unidad de medida]).
- Invariantes del proceso de medida como función matemática:
  $m_u(a+b) = m_u(a) + m_u(b)$; $m_u\,(ka) = km_u(a)$.
- La precisión de la medida empírica. Si la pesa menor de la que disponemos es el gramo y el fiel de la balanza al colocar 51g está a un lado y al poner 52g está al otro lado decimos que el peso está comprendido entre 51 y 52 gramos y que el error que se comete al medir el peso es menor que 1g.
- Sistema métrico decimal (en realidad se trata de otro complejo praxeológico).

(5) Argumentos y pruebas:
- Justificaciones de las técnicas de medida, de la necesidad de un sistema convenido de unidades y de los invariantes matemáticos característicos.

Ejercicio

14. En una prueba escrita un alumno escribe:
$625/5 = 125 = 125$ cm
a) ¿Es correcta esta expresión?
b) ¿Qué explicaciones y comentarios darías a este alumno?

2.7. Conexiones entre distintas magnitudes

Magnitudes discretas y número natural

En muchas situaciones prácticas nos interesamos por una característica de las colecciones de objetos que podemos designar como "la numerosidad", ¿cuántos árboles hay en este bosque?, ¿cuántas personas hay en la sala?, etc. Como respuesta a estas situaciones hemos inventado diversas técnicas de contar, siendo la más eficaz, y generalmente usada, pronunciar la llamada "cantinela numérica": uno, dos , tres, ..., o escribir los símbolos, 1, 2, 3, ...

Ejemplo: Si estamos tratando con conjuntos de personas decimos, por ejemplo, que hay 35 personas, si tratamos con árboles, 235 árboles, etc. Estas expresiones corresponden a cantidades de las magnitudes discretas "número de personas", "número de árboles" (o bien, la cantidad o numerosidad de ....).

Observa que hay que diferenciar entre las *cantidades de estas magnitudes* y las palabras o símbolos, 1, 2, 3, ... que sólo son instrumentos lingüísticos para contar. Con ellos se opera (suman, restan, multiplican, dividen, se comparan, obteniendo una estructura algebraica bien caracterizada), pero estas operaciones son de una naturaleza esencialmente diferentes a las operaciones que se pueden realizar con las cantidades de magnitudes discretas (agregar, componer, descomponer, etc.). Hay un isomorfismo formal entre (N, +, ≤) y cualquier magnitud discreta, de manera que podemos decir que el conjunto de cantidades de cualquier magnitud discreta es un "conjunto naturalmente ordenado".

Pero esta identificación formal no debe llevar a considerar a (N, +, ≤) como otra magnitud discreta. Los números naturales son el sistema de simbolos usados para medir las magnitudes discretas, pero ellos en sí mismos, no deberían ser considerados como una magnitud, a pesar de que tengan la misma estructura matemática.

Masa y peso

Desde un punto de vista físico, masa y peso son magnitudes diferentes. La masa de un cuerpo es el contenido en materia de dicho cuerpo (dejamos sin aclarar qué es la materia), mientras que el peso es la fuerza con que la Tierra (u otro cuerpo) atrae a un objeto. La diferencia se aclara porque objetos de la misma masa tienen un peso diferente en la Luna que en la Tierra, o situado uno en una montaña elevada. Sin embargo, objetos de igual masa situados en un mismo lugar de la Tierra tienen el mismo peso.

La identificación de ambas magnitudes a nivel popular es muy grande y muchas expresiones usuales lo ponen de manifiesto. En la práctica escolar es imposible que ambas características de los cuerpos puedan ser distinguidas; además, los instrumentos usados para medir masas en realidad miden pesos, por lo que no parece procedente hacer distinciones entre ambas magnitudes en los niveles de educación primaria.

Ejercicios

15. Marta compra 9 botes de mermelada. Cada bote pesa un cuarto de kilo. ¿Cuántos gramos pesan los 9 botes? ¿Cuánto pesarán estos botes en la Luna? ¿Seguirán teniendo la misma masa?

16. Para hacer una tarta Iván utiliza 125 g de harina y 250 g de azúcar. ¿Cuántos kilos de harina y azúcar se necesitan para hacer 8 tartas iguales?

Volumen y capacidad

El término *volumen* se usa para designar la característica de todos los cuerpos de ocupar un espacio. Se trata de una magnitud extensiva, derivada, cuya unidad principal es el metro cúbico (m^3). Se usa la palabra *capacidad* para designar la cualidad de ciertos objetos (recipientes) de poder contener líquidos o materiales sueltos (arena, cereales, etc.).

En realidad no se trata de una magnitud diferente del volumen: la capacidad de un recipiente coincide con el volumen del espacio interior delimitado por las paredes del recipiente, y viceversa, el volumen de un cuerpo coincide con la capacidad de un recipiente que envolviera completamente a dicho cuerpo. Cuando se habla de capacidades la unidad principal es el litro (l) que es el volumen de 1 dm^3.

Ejercicios

17. Un depósito contiene 8 kilolitros de agua. Se han sacado 489 litros. ¿Cuántos litros de agua quedan en el depósito? ¿Cuántos metros y centímetros cúbicos?

18. Identificación de situaciones de medida y referentes
- Citar distintas situaciones y buscar el referente más adecuado para comparar capacidades.
- Citar las unidades no estándares más utilizadas en distintos contextos (casa, colegio, ...) para la medida de capacidades.
- Hacer una lista de unidades de capacidad y capacidades a medir y relacionar cada una con la unidad más adecuada.
- Citar tres situaciones de medida de capacidades y decir cuál es el error máximo admisible.
- Citar varios instrumentos de medida de capacidad.

19. Estimar medidas extremas o especiales de capacidad (una cucharita de café, capacidad de un maletero, etc.).

Área y superficie

Con frecuencia estas palabras se usan de manera indistinta, pero es necesario distinguir dos conceptos diferentes, aunque relacionados. Si nos fijamos en los cuerpos o figuras geométricas debemos distinguir entre la forma que tienen (esférica, piramidal, rectangular, plana, alabeada, etc.) y la mayor o menor extensión que ocupan. La palabra *superficie* se debería reservar para designar la forma del cuerpo o figura (superficie plana, alabeada, triangular), mientras que la palabra *área* debería designar la extensión de la superficie. El rasgo o característica de los cuerpos que se mide cuantitativamente es el área o extensión.

2.8. El Sistema Internacional de unidades (SI)

Este es el nombre adoptado por la XI Conferencia General de Pesos y Medidas (celebrada en París en 1960) para establecer un sistema universal, unificado y coherente de unidades de medida, basado en el sistema mks (metro-kilogramo-segundo). Este sistema se conoce como SI, iniciales de Sistema Internacional. En la conferencia de 1960 se definieron los patrones para seis unidades fundamentales y dos unidades complementarias; en 1971 se añadió una séptima unidad fundamental, el mol. En la tabla 1 se indican las unidades fundamentales y complementarias.

Tabla 1: Magnitudes fundamentales y complementarias

Magnitud	Nombre de la unidad básica	Símbolo
Longitud	Metro	m
Masa	Kilogramo	kg
Tiempo	Segundo	s
Intensidad de corriente electrica	Amperio	A
Temperatura termodinámica	Kelvin	K
Cantidad de sustancia	Mol	mol
Intensidad luminosa	Candela	cd
Magnitudes complementarias:		
Ángulo plano	Radián	rad
Ángulo sólido	Estereoradián	sr

2.9. Medida directa e indirecta de cantidades

Las cantidades de una magnitud pueden ser medidas en unos casos *directamente* usando los instrumentos de medida (el metro, sus múltiplos y divisores para las longitudes; el kg, sus múltiplos y divisores para el peso, etc.). Esta medición directa quiere decir aplicando reiteradamente las unidades de medida hasta lograr cubrir la longitud que se quiere medir, hasta conseguir equilibrar la balanza, etc., y según la precisión deseada.

En otros casos, si el objeto en cuestión no puede medirse directamente, bien por su tamaño, forma, etc., pero se puede descomponer en partes o secciones cuya medida se conoce, podemos determinar la medida del objeto mediante operaciones aritméticas. Se habla entonces de *medida indirecta*.

> Ejemplo: No hace falta recubrir una superficie de losetas para determinar el área de dicha superficie. Ésta se puede determinar con frecuencia mediante el cálculo sobre las dimensiones de la superficie.

Una vez definida la unidad de medida para ciertas magnitudes, a partir de estas unidades se pueden definir las correspondientes a otras magnitudes. Las primeras se conocen como magnitudes fundamentales y las segundas como magnitudes derivadas. El carácter fundamental o derivado de una magnitud no es intrínseco a la misma. Un sistema de unidades establece y define con precisión cuáles son las unidades fundamentales.

Ejercicios

20. Citar tres situaciones en las que sea útil la estimación de medidas.

21. Indica cuál es aproximadamente el consumo medio mensual de agua en una familia estándar de cuatro miembros.

Medida indirecta de áreas y volúmenes

El estudio escolar de las magnitudes área y volumen debe incluir una primera etapa de identificación de la característica correspondiente de los objetos (superficies y volúmenes de cuerpos y figuras geométricas), siguiendo el proceso que se describe más adelante. Pero en la práctica las cantidades de áreas y volúmenes se miden de manera indirecta mediante el cálculo a partir de las medidas lineales de las dimensiones de las figuras o cuerpos. Así, la medida del área de un rectángulo se calcula multiplicando la longitud de la base por la altura (A = b x a), y el volumen de un ortoedro, multiplicando las longitudes de las tres aristas que concurren en un vértice (V = a x b x c).

Ejercicios

22. Con una cuerda de 16 m de longitud y anudada en sus extremos. ¿Cuánta superficie se puede cercar como máximo? ¿Y como mínimo?

3. DESCRIPCIÓN ALGEBRAICA DE LAS MAGNITUDES Y SU MEDIDA

En matemáticas trabajamos con objetos no perceptibles, como conceptos, proposiciones, algoritmos, teoremas, aunque los representamos mediante palabras y símbolos.

Diversas corrientes filosóficas analizan la naturaleza de los objetos matemáticos, que conciben bien como entes ideales, abstracciones, entidades mentales, entidades lingüísticas, etc. Nosotros no entramos en esta problemática. Sólo señalamos que los conceptos abstractos, no son arbitrarios, sino que provienen de nuestras formas de actuar en el mundo perceptible que nos rodea. Por ello las matemáticas son útiles, nos resuelven problemas de la vida diaria y son imprescindibles.

A continuación estudiaremos cómo se matematiza la medida de las magnitudes extensivas (como longitud, peso, área o volumen), que hasta ahora la hemos descrito en forma empírica.

Los conceptos de magnitud y cantidad se definen matemáticamente de la siguiente forma:

> *"Una magnitud es un semigrupo conmutativo y ordenado, formado por clases de equivalencia que son sus cantidades"*

A continuación recorremos a grandes rasgos los pasos que han conducido a esa concisa formalización, para hacer comprensible la definición anterior.

Relación de equivalencia

Una noción esencial dentro de la matemática es el de *relación de equivalencia* y la de c*lase de equivalencia* asociada a una relación.

- Cuando en un conjunto de objetos fijamos nuestra atención en una característica o cualidad determinada, puede ocurrir que algunos objetos posean esa cualidad y que otros no la posean.

- Cuando dos objetos la poseen decimos que están *relacionados* o que son iguales para dicho aspecto parcial.
- El conjunto de objetos relacionados forman una *clase de equivalencia*.

Conceptos

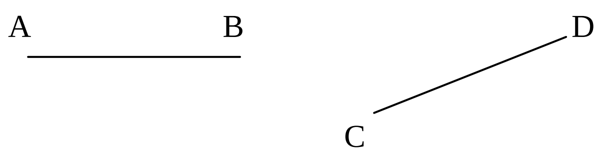
Para poder distinguir las diversas clases de equivalencia, nuestra mente crea un *concepto*, o sea, un nuevo ente abstracto para representar a todos los objetos homogéneos (que tienen algo en común). Cada concepto se designa por un nombre especial, y decimos que dos objetos tienen en común el carácter o cualidad X, cuando son equivalentes en la relación que ha dado origen a dicho concepto X.

La importancia de estas nociones para la teoria de las magnitudes radica en que el concepto de *cantidad* se corresponde con el de una clase de equivalencia definida por una cierta relación en un conjunto de objetos apropiado. A continuación analizamos la definición algebraica dada de magnitud, cantidad, y también el de medida, mediante el ejemplo de la magnitud longitud.

3.1. Construcción de la magnitud longitud

Partimos del mundo de los objetos y fenómenos perceptibles (por ejemplo, una colección de tiras de cartón) o también de objetos matemáticos, como los segmentos fijos del plano.

Sea O el conjunto de dichas bandas y de todos los objetos de los que podemos percibir la cualidad llamada longitud (largo, ancho, profundidad, distancia, etc.). A este conjunto también pertenecerán los segmentos fijos AB, CD, etc.:



Al construir este conjunto O = {AB, CD,....}, reconocemos una cualidad particular que permite discriminar si un objeto pertenece o no a O. Se pone en juego un proceso de abstracción empírica, ya que en ella intervienen objetos y acciones perceptibles.

Longitud

En el conjunto de objetos O, unas bandas (o segmentos) son superponibles entre sí y sus extremos coinciden. De manera más precisa decimos que: *"Dos segmentos están relacionados si son congruentes, esto es, si es posible superponerlos mediante un movimiento de tal modo que coincidan sus extremos"*.

Físicamente podemos realizar la comparación y comprobar la igualdad o desigualdad y decimos que establecemos una *relación de equivalencia* en el conjunto O (se cumplen las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva). Como consecuencia obtenemos clases de objetos que son iguales entre sí respecto de la cualidad *longitud*.

Cantidad de longitud

Matemáticamente denotamos la relación de equivalencia en O por una letra -I, por ejemplo-, obteniéndose de ese modo un nuevo conjunto formado por las distintas clases formadas.

- Se habla de *conjunto cociente* O/I = L y cada elemento de este conjunto se dice que es una cantidad de longitud (abreviadamente, la misma longitud).

- Representaremos las distintas clases por los símbolos [a], [b], ... Como se ha indicado, cada clase queda caracterizada porque sus elementos tienen todos algo en común, la misma "*cantidad de longitud*". Suelen llamarse también "segmentos generales".

Para definir este nuevo concepto hemos usado el proceso que en matemáticas recibe el nombre de "definición por abstracción". Para que un niño pueda comprender ese nuevo concepto es preciso ponerle ante una colección variada de objetos que posean la cualidad o característica que interesa abstraer, y otros que no lo posean.

En algunos textos de matemáticas, al usar las definiciones por abstracción, se identifica el concepto con la clase de equivalencia correspondiente. Asi se dice que una cantidad de longitud es la clase [a], [b], [c],.. Sin duda existe una correspondiencia biyectiva entre clase y propiedad característica, pero en realidad son "objetos" netamente diferenciados. Proceder a esta identificación de una manera implicita, nos parece un error didáctico grave, aunque para un matemático, acostumbrado a la abstracción esta identificación, "clase de equivalencia" — "propiedad característica" — "concepto abstracto", sea de gran utilidad.

Medida y unidad de medida

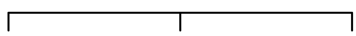
En el trabajo con magnitudes es necesario comparar distintas cantidades. La comparación se ve facilitada si se toma una cierta cantidad [u] como referente o término de comparación y se determina cuantas veces contiene una cantidad dada [a] a [u]. Este número de veces, si existe, es lo que se llama "*medida*" de la cantidad [a] con la *unidad* [u]. Medir cantidades es esencial en el proceso de cuantificación de la realidad, proceso que se ve facilitado por la reducción de las cantidades a números, con los cuales podemos tratar como si se tratara con las cantidades originales.

Para ello será necesario definir una operación de sumar cantidades, y que esta suma tenga propiedades deseables de asociatividad y commutatividad, para que se pueda hablar de magnitud.

Suma de segmentos

Los segmentos AB y BC son *consecutivos*. Se caracterizan porque su intersección es vacía.

A B C $AB \cap BC = Ø$



Diremos que el segmento $AC = AB \cup BC$ es la suma de ambos y se expresa:

$$AC = AB + BC$$

Suma de longitudes

En el conjunto de los segmentos generales, que representaremos por L, podemos definir una operación o ley de composición interna: "suma de segmentos generales".

Para ello extendemos la suma de segmentos consecutivos al caso de segmentos generales y al de cantidades de longitud.

Dados dos segmentos generales [a] y [b] (caracterizados cada uno de ellos por una longitud), siempre es posible encontrar dos representantes consecutivos y que, por tanto, se pueden sumar. Este nuevo segmento suma pertenece a una nueva clase de equivalencia, que por definición se considerará el segmento general (cantidad de longitud) suma de [a] y [b]. O sea,

$$[c] = [a] + [b]$$

Como L es el conjunto de las cantidades de longitud (o conjunto de longitudes) se acaba de definir la *suma de longitudes*.

Propiedades de la suma de longitudes

Asociativa: [a] + ([b] + [c]) = ([a] + [b]) + [c]

Conmutativa: [a] + [b]=[b] + [a]

Elemento neutro: Considerando como “segmento” un punto de la recta (intersección de dos segmentos fijos consecutivos) es claro que la unión: AA $\cup$ AB = AB**.** En consecuencia, el segrmento general cuyo representante es AA se comporta como el elemento neutro de 1a suma de longitudes.

Estas propiedades permiten afirmar que (L, **+)** es un semigrupo conmutativo con elemento neutro.

Ordenación de longitudes

Las distintas cantidades de longitud se pueden comparar entre sí. Cuando dos segmentos fijos se superponen y sus extremos no coinciden decimos que uno es mayor o menor que el otro. En este caso, siempre es posible encontrar un segmento fijo DF, que sumado al CD permite completar lo que le falta hasta “cubrir” al AB.

C D F Por tanto, CD $\leq$ AB, pues existe DF tal que CD + DF = AB (1)

A B

Esta definición de ordenación se generaliza al caso de los segmentos generales o longitudes. Decimos que [a] $\leq$ [b] si existen dos representantes AB $\in$ [a], DC $\in$ [b], tal que la relación (1) se cumple, y por tanto, podemos expresar que:

$$[a] + [d] = [b]$$

Esta relación binaria cumple las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva, y por tanto, se trata de una relación de orden. La ordenación es total, esto es, dos longitudes cualesquiera son comparables, y compatible con la suma:

$$[a] \leq [b] \quad y \quad [c] \leq [d] \quad \text{implica que} \quad [a] + [c] \leq [b] + [d]$$

Como consecuencia, la terna (L, +, $\leq$) es un semigrupo conmutativo, totalmente ordenado.

Multiplicación de cantidades de longitud por números naturales

La operación de sumar una cantidad de longitud consigo misma se puede realizar repetidamente, obteniéndose otra cantidad. La propiedad asociativa permite atribuir un significado preciso a la expresión:

(2) $[a] + [a] + ..^{(n} ... [a]$

sumando primero dos sumandos, después sumando a este resultado el tercero, y así sucesivamente. La expresión (2) se puede representar abreviadamente por n[a]. De este modo se acaba de definir un producto de cantidades de longitud por números naturales, lo que con lenguaje algebraico se expresa diciendo que hemos establecido una 1ey de composición externa:

$$N \times L \xrightarrow{f} L$$

$$n.[a] \longrightarrow [a] + [a] + ..^{(n} ... [a]$$

Propiedades del producto de longitudes por números naturales

1) n.([a] + [b]) = n.[a]+ n.[b]
2) (n+m)[a] = n.[a] + m.[a]
3) 1.[a] = [a]
4) n.(m[a]) = (n.m)[a]

Como consecuencia de estas propiedades, y de que (L, **+)** es un semigrupo, la terna (L, +, .) es un semimódulo sobre el semianillo N de los números naturales.

5) (Propiedad arquimediana) : Dados [a], [b], con [a] distinta de la cantidad nula, existe un número n $\in$ N tal que n.[a] > [b].

Ejercicios

23. Identificación de situaciones y referentes de medida:
- Citar distintas situaciones y buscar el referente más adecuado para comparar cantidades de longitud.
- Citar las unidades no estándares más utilizadas en distintos contextos (casa, colegio,...) para la medida de longitudes.
- Hacer una lista de unidades de longitud y objetos a medir y relacionar cada objeto con la unidad más adecuada.
- Citar tres situaciones de medida de longitudes y decir cuál es el error máximo admisible.
- Citar varios instrumentos de medida de longitud.

24 Estimar medidas extremas o especiales de longitud (grosor de un folio, distancias entre planetas, etc.).

3.2. Definición general de magnitud. Tipos de magnitudes

Las propiedades estudiadas para el conjunto de las cantidades de longitud, con las operaciones de suma de 1ongitudes, producto por números naturales y la ordenación de longitudes se cumplen en otros casos, lo que permite abstraer la noción de magnitud.

Para que en un conjunto de objetos homogéneos hablemos de magnitud es preciso que sea posible definir una suma, dotada de unas propiedades particulares, resultando magnitudes distintas según las propiedades algebraicas que se cumplan.

- Así, en el conjunto de vectores libres del plano la ordenación inducida por la suma no es total, y hablamos de magnitud vectorial.
- La propiedad arquimediana no se cumple en algunos semigrupos que se consideran magnitud: “cantidad de personas”, “cantidad de días”, etc.
- En otros casos, existe para cada cantidad su opuesta o simétrica para la suma. Tal es el caso de los segmentos orientados (vectores libres de la recta).

En consecuencia, la definición más general posible de magnitud (cuantitativa y extensiva) es la siguiente;

Magnitud es un semigrupo conmutativo con elemento neutro y ordenado (M,+, £)
(La ordenación puede ser total o parcial)

Magnitud relativa y absoluta:

Si (M, +) es grupo se dice que la magnitud es relativa. Si sólo es semigrupo se dice que es absoluta.

Magnitud absoluta escalar:

Si en la magnitud (M, +, $\leq$) el orden es total y arquimediano se dice que es una magnitud absoluta escalar.

Semigrupo de elementos positivos de una magnitud relativa

Sea (G, +) un grupo conmutativo y G_+ un subconjunto de G tal que

a) (G_+, +) es un semigrupo.
b) Para todo $g\in G$ se verifica que $g\in G_+$, o bien $-g\in G_+$

En este caso, la relación $\leq$ dada por, $g\leq g' \Leftrightarrow g'-g\in G_+$ es de orden total y compatible con la suma, y en consecuencia (G,+,$\leq$) es una magnitud relativa.

Al conjunto G_+ se le llama s*emigrupo de elementos positivos*, respecto de esa ordenación.

Magnitud relativa escalar:

Diremos que la magnitud relativa (M, +, $\leq$) es una magnitud escalar si el semigrupo (M_+, +) de los elementos positivos, respecto de la ordenación total $\leq$ es arquimediano.

Magnitud vectorial:

Las magnitudes que no son escalares se llaman *vectoriales*. Se puede demostrar que todo semigrupo (respectivamente, grupo) totalmente ordenador y arquimediano es isomorfo a un subsemigrupo (respectivamente, grupo) del semigrupo (R_+, +) de los números reales positivos (respectivamente, (R, +)).

Como consecuencia, teniendo en cuenta la biyección existente entre puntos de la recta y R se puede afirmar que las magnitudes escalares son aquellas que se pueden representar mediante "escalas", es decir, mediante un subconjunto de puntos de una recta.

Producto de cantidades por números enteros y racionales. Magnitudes divisibles

Dada $m\in M$ y el entero negativo $-p\in Z$, definimos
(-p)m = -(pm), si existe esa cantidad.

De modo similar se define el producto por racionales. Si

$$(z/p)\in Q\ (p>0), \qquad (z/p)m = m' \Leftrightarrow zm = pm' \text{ (si existe)}$$

Las magnitudes para las que, para todo $m\in M$, existe el producto por números racionales se dice que son magnitudes divisibles. Como ejemplos pueden citarse la longitud, tiempo, masa, etc. No es divisible la magnitud "número de personas", "número de días", etc.

<u>Proposicion:</u> El conjunto $S(M) = \{(z/p)\in Q\ /\ \forall\ m\in M,\ (z/p)m\in M\}$ es un subsemianillo unitario

del semianillo de los números racionales. Este conjunto recibe el nombre de *semianillo de medición* de la magnitud M.

Magnitudes discretas y continuas

La magnitud M se dice que es "discreta" si existe un intervalo abierto $(r,t) = \{q\in Q/r<q<t\}\subset Q$ disjunto con el semianillo de medición S(M). En este caso, cualquier cantidad se puede expresar como múltiplo de una determinada que se llama unidad de medida.
Las magnitudes que no son discretas se llaman continuas.

Proposición: La magnitud (M,+) es un semimódulo sobre su semianillo de medición S(M).

Las magnitudes escalares pueden caracterizarse también a partir de la noción de *base* de una magnitud.

Se llama base de una magnitud a un subconjunto $B = \{g_1, g_2, ..., g_n\}\subset M$, tal que para todo $m\in M$, existe una colección de números $\{s_1, s_2, ..., s_n\}\in S(M)$, unívocamente determinada, tales que,

$$M = s_1g_1 + s_2g_2 + ... + s_ng_n$$

Una magnitud es escalar si posee una base unitaria. Esta base recibe el nombre de unidad de medida.

3.3. Pasos para construir una magnitud

Según se ha podido observar, en el proceso de definición de la magnitud longitud se han recorrido unos pasos o etapas que son características en la construcción de cualquier magnitud. En síntesis son las siguientes:

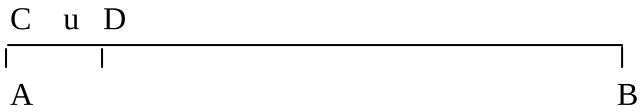
1. Identificar el conjunto de objetos sobre los que se abstrae el concepto de cantidad .
2. Definir la relación de equivalencia por medio de la cualidad común que nos interesa.
3. Estos dos primeros pasos implican "homogeneizar" el conjunto de objetos, agrupándolos en clases de equivalencia, obteniendo como consecuencia el conjunto de las cantidades que será el conjunto cociente correspondiente.
4. Definir la suma de cantidades y estudiar sus propiedades.
5. Relación de ordenación y propiedades.
6. Definir la operación externa, producto por números.
7. Clasificación de la magnitud: absoluta, relativa, escalar, vectorial, discreta, continua.

Ejercicio

24. Hacer una descripción resumida de la construcción de las siguientes magnitudes:
a) Peso
b) Amplitud angular
c) Área de polígonos
d) Volumen de poliedros
e) Número de días
f) Dinero

3.4. Medida de magnitudes

La noción de medida surge de situaciones como las siguientes: necesitamos saber cuántas veces es más grande el segmento AB que el segmento u de extremos C y D.

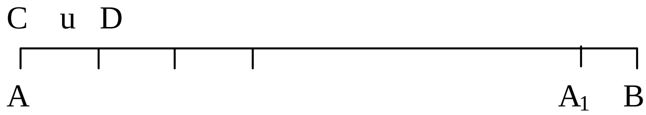


Para ello llevamos el segmento u, sucesivamente, a partir del extremo A, hasta alcanzar o sobrepasar el otro extremo B. Pueden ocurrir los casos siguientes:

1. *Medida entera:* Si se obtiene que AB = nu, siendo n un número natural, se dice que la medida del segmento AB con la unidad u es igual a n.

En caso contrario, se verificará que nu < AB < (n+1)u.

2. *Medida racional:* Si el segmento AA_1 es talque AA_1= un,



tendremos, por tanto, que AA_1 <AB <(n+1)u. Por tanto, A_1B < u.

Se sabe que el teorema de Thales permite dividir un segmento en partes iguales. Si dividimos u en d partes iguales, esto es, u = du_1, y medimos A_1B con la nueva unidad u_1, se obtendrá:

$n_1u_1 \leq A_1B \leq (n_1+1)u_1$, siendo $0\leq n_1\leq d$

Si $n_1u_1 = A_1B$, esto es, la medida de A_1B con u_1 como unidad es n_1, y por tanto,

$AB = (n + n_1/d)\ u$

y se dice que el *número racional* $(n+n_1/d)$ es la medida de AB con la unidad u.

3. *No existe medida racional*

En caso contrario, se toma otra unidad más pequeña, que, generalmente, se obtiene volviendo a dividir u_1 en d partes iguales. Como consecuencia se ve que al medir AB con una unidad u se obtiene una sucesión de números racionales:

(1) $n, \quad n+n_1/d, \quad n+n_1/d + n_2/d^2, \ldots, \quad n+n_1/d + n_2/d^2 + \ldots + n_r/d^r + \ldots$

finita o infinita. En el primer caso, esto es, cuando se termina en el último término escrito en (1), se verifica que:

$AB = (n + n_1/d + \ldots + n_r/d^r)u$

y se dice que la medida del segmento AB con la unidad u es el número racional,

$(n + n_1/d + \ldots + n_r/d^r)$

lo que se expresa abreviadamente así:

$\mu_u(AB) = (n + n_1/d + \ldots + n_r/d^r)$

Cuando existe la medida racional se dice que la cantidad correspondiente es *conmensurable* con la unidad u.

Pero puede ocurrir que la sucesión (1) sea infinita, en cuyo caso el proceso de medida utilizado no nos da un número, sino una sucesión de números racionales. Si la sucesión (1) posee límite se puede tomar este límite como medida del segmento AB con la unidad u, pero puede ocurrir que la sucesión (1) no tenga límite, como ocurre con el caso que se presenta cuando el segmento AB es la diagonal de un cuadrado de lado u. En este caso diremos que la cantidad AB es *inconmensurable* con la unidad u.

Números irracionales

Por tanto, hay casos en que no se puede medir una cantidad de una magnitud empleando para ello un número racional, y esto no sólo en el ejemplo que acabamos de ver de la longitud, sino en la mayor parte de las magnitudes físicas, químicas, etc.

La necesidad de poder asignar un número a todas las cantidades de las magnitudes conduce a ampliar el campo de los números racionales construyendo unos nuevos entes, los números irracionales, que serán las medidas de las cantidades inconmensurables con la unidad u.

Definición de medida

Estas ideas intuitivas se pueden formalizar por medio de las siguientes definiciones y proposiciones:

Definición: Se llama *medida* de la cantidad m de una magnitud escalar, respecto de la unidad u, al número $q \in S(M)$, tal que $m = qu$.

Proposición: La aplicación μ_u : M ------ S(M) que asocia a cada cantidad de una magnitud escalar su medida respecto de u, es un isomorfismo de (M,+) en [S(M), +]

Proposición (Cambio de unidad de medida): Si u y u' son dos unidades de medida de una magnitud escalar, tales que $\mu_{u'}(u) = k$, entonces

$$\mu_{u'}(m) = k\, \mu_u(m)$$

El isomorfismo entre magnitud escalar y números permite asignar a cada cantidad un número y recíprocamente, con lo que su manejo puede reducirse al de los números. Además, de este modo podemos extender el campo de operaciones posibles con cantidades (multiplicación y cociente de cantidades), incluso de cantidades distintas.

Medida de magnitudes discretas

Las magnitudes discretas son aquellas en que cada cantidad se puede expresar como múltiplo de una tomada como unidad de referencia. O sea, para toda $m \in M$ y dada $u \in M$, existe $n \in N$ tal que $m = un$. Como consecuencia, se puede establecer una medida de un modo inmediato:

$$\mu_u (m) = \mu_u (un) = n.$$

Si la magnitud discreta es relativa, su estructura algebraica es de grupo, y por tanto, su semianillo de medición será Z.

Observación: Para determinar una cantidad de una magnitud no es suficiente dar su medida, es necesario expresar la unidad a la cual se refiere. Por ejemplo, c = 17 Hl, a = -30º, p = (1/4) kg, son cantidades de capacidad, amplitud de ángulos orientados y peso, respectivamente.

4. TALLER DE MATEMÁTICAS

1. La equivalencia entre la longitud de un palillo y una cerilla es 2 palillos es igual a 3 cerillas (2p = 3c). Después de efectuar mediciones de dos longitudes l y l', realizadas, respectivamente, con cerillas y palillos se ha obtenido que:

$$3p < l < 4p$$
$$4c < l' < 5c$$

¿Qué se puede decir de l y l'? ¿Cuál es mayor?

2. Una misma longitud h ha sido medida con palillos y, a continuación con capuchones de bolígrafos Bic, obteniéndose que:

$$5p < h < 6p$$
$$11c < h < 12c$$

¿Qué se puede decir de las medidas efectuadas?

3. Suponga que {l, s, t, u, v} es un sistema de medida de longitudes regular, en el que los cambios se hacen de cuatro en cuatro.

a) Traduzca a escritura compleja correcta la siguiente medida:

2l 4s 6t 5u 8v

b) Reduzca esa escritura a unidades s.
c) Reduzca esa escritura a unidades l.
d) Reduzca esa escritura a unidades v.
e) Reduzca esa escritura a unidades u.

4. Suponga que tomamos como unidad de medida la cuarta parte del ancho de un folio, y que formamos un sistema regular con cambios de dos en dos. Construya una cinta métrica con dicho sistema cuya longitud máxima sea el largo de cuatro folios. Ponga sobre la cinta las graduaciones intermedias.

Reflexione sobre las dificultades que va encontrando en la graduación de la cinta, y piense que el sistema métrico decimal es tan desconocido para el niño como éste lo es para usted.

5. Piense qué procedimientos utilizaría para estimar:

a) La longitud de un tramo de calle.
b) La longitud de la fachada del Monasterio de la Cartuja.
c) La altura de una estantería.
d) La distancia de su casa al bar más próximo.
e) El ancho de un cuadro.

6. Identificación de situaciones de medida y referentes de la magnitud peso:

- Citar distintas situaciones y buscar el referente más adecuado para comparar cantidades de peso.
- Citar las unidades no estándares más utilizadas en distintos contextos (casa, colegio,...) para la medida de pesos.
- Hacer una lista de unidades de peso y objetos a medir y relacionar cada objeto con la unidad más adecuada.
- Citar tres situaciones de medida de peso y decir cual es el error máximo admisible.
- Citar varios instrumentos de medida de peso.
- Estimar medidas extremas o especiales de peso (peso de un grano de arroz, peso de un filete

de ternera, etc.).

7. Identificación de situaciones de medida y referentes sobre el tiempo:
- Citar distintas situaciones y buscar el referente más adecuado para comparar cantidades de tiempo.
- Citar las unidades no estándar más utilizadas en distintos contextos (casa, colegio,...) para la medida del tiempo.
- Hacer una lista de unidades de tiempo y tiempos a medir y relacionar cada uno con la unidad más adecuada.
- Citar tres situaciones de medida de tiempo y decir cual es el error máximo admisible.
- Citar varios instrumentos de medida del tiempo.

8. Estimar medidas extremas o especiales de tiempo (en un partido de baloncesto, las edades de la Tierra, etc.).

9. Identificación de situaciones de medida y referentes sobre temperatura:
- Citar distintas situaciones y buscar el referente más adecuado para comparar temperaturas.
- Citar tres situaciones de medida de temperaturas y decir cual es el error máximo admisible.
- Citar varias unidades de medida de temperaturas utilizadas en distintos países y contextos y hacer la conversión de unas a otras de medidas significativas (fusión del agua, temperatura ambiente, etc.).

10. Estimar medidas extremas o especiales de temperatura (la temperatura ambiente ideal para el ser humano, el cero absoluto, etc.).

C: Conocimientos Didácticos

1. ORIENTACIONES CURRICULARES

El estudio de las magnitudes y su medida es importante en el currículo de matemáticas desde los niveles de educación infantil hasta secundaria debido a su aplicabilidad y uso extendido en una gran cantidad de actividades de la vida diaria. El estudio de la medición también ofrece oportunidad de aprender y aplicar otros contenidos matemáticos, como operaciones aritméticas, ideas geométricas, conceptos estadísticos y la noción de función. Permite establecer conexiones entre diversas partes de las matemáticas y entre las matemáticas y otras áreas diferentes, como el área de sociedad, ciencias, arte y educación física.

La medida de magnitudes pone en juego un conjunto de destrezas prácticas y un lenguaje (o si se prefiere, una serie de nociones) cuyo dominio y comprensión no es fácil para los niños de primaria. En la educación primaria su estudio se extiende desde el primer curso hasta el último, incluyéndose incluso algunas actividades en los niveles de infantil (percepción de cualidades de objetos, comparación, clasificación, seriación). Es un tema que guarda, además, una estrecha relación con la construcción de los sistemas numéricos y con las formas y figuras geométricas (longitud, superficie, volumen de figuras y cuerpos geométricos), tanto en las técnicas de medida directa (contar el número de unidades) como indirecta (determinación del "tamaño" de las colecciones, o las dimensiones de los cuerpos y figuras mediante operaciones aritméticas y algebraicas.

1.1. Diseño Curricular Base del MEC

En el bloque 2, dedicado a la medida el DCB considera que la medida es una vía de acceso para el desarrollo de los conceptos numéricos, así como el nexo entre los distintos bloques de Matemáticas.

El tratamiento cíclico permite ir profundizando desde las unidades naturales a las relaciones entre las unidades del Sistema Métrico Decimal.

Los contenidos procedimentales y actitudinales favorecen la adquisición de los diversos contenidos que aparecen en hechos y conceptos.

Hechos, conceptos y principios

1. Necesidad y funciones de la medición.
    - Reconocimiento e identificación de magnitudes.
    - Comparación de magnitudes.
    - Unidad de referencia. Unidades corporales.
2. El perímetro, el área y el volumen de las figuras como expresiones cuantitativas de su tamaño.
3. Las unidades de medida del Sistema Métrico Decimal.
    - Longitud.
    - Superficie.
    - Capacidad.
    - Masa.
4. Las unidades de medida de uso local.

5. Las unidades de medida para la medición del tiempo.
6. La unidad de medida para la medición de ángulos: el grado.

Procedimientos

1. Mediciones con unidades convencionales y no convencionales.
   • Utilización de instrumentos de medida.
   • Utilización de distintas estrategias para medir.
2. Construcción de instrumentos sencillos para efectuar mediciones directas de longitudes, superficies y capacidades.
3. Elaboración y utilización de estrategias personales para llevar a cabo mediciones de perímetros, áreas y volúmenes de cuerpos geométricos, de manera exacta y aproximada.
4. Elaboración y utilización de estrategias personales para llevar a cabo estimaciones de medidas en situaciones naturales.
5. Toma de decisiones sobre las unidades de medida más adecuadas en cada caso atendiendo al objetivo de la medición.
6. Transformación, comparación y equivalencias de las unidades de medida utilizando los algoritmos de cálculo correspondientes.
7. Utilización de los algoritmos para calcular áreas de rectángulos y triángulos.
8. Explicación oral del proceso seguido y de la estrategia utilizada en la medición.

Actitudes, valores y normas

1. Valoración de la importancia de las mediciones y estimaciones en la vida cotidiana.
2. Interés por utilizar con cuidado diferentes instrumentos de medida y emplear unidades adecuadas.
3. Gusto por la precisión apropiada en la realización de mediciones.
4. Curiosidad e interés por descubrir la medida de algunos objetos y tiempos familiares.
5. Valoración del Sistema Métrico Decimal como sistema de medida aceptado internacionalmente.
6. Tendencia a expresar los resultados numéricos de las mediciones manifestando las unidades de medida utilizadas.

1.2. Principios y Estándares para la Matemática Escolar (NCTM 2000)[1]

Los objetivos específicos que los Estándares 2000 proponen para el estudio de la medición en los niveles de infantil a 2º son los siguientes:

Comprender los atributos medibles de los objetos y las unidades, sistemas y procesos de medición:

- reconociendo los atributos de longitud, volumen, peso, área y tiempo;
- comprendiendo cómo medir usando unidades no estándar y estándar;
- seleccionando la herramienta y unidad apropiada para medir el atributo que se desea medir.

Aplicar técnicas apropiadas y herramientas para realizar mediciones, realizando las siguientes actividades:

- medir usando colecciones de objetos de igual tamaño, como clips puestos correlativamente;
- medir un objeto usando como unidad otro de menor tamaño, como la longitud de una

[1] National Council of Teachers of Mathematicas (2002). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, Va: NCTM.

habitación usando un metro;
- usar instrumentos de medir,
- desarrollar referentes comunes de medida para hacer comparaciones y estimaciones.

Estos mismos objetivos se desarrollan en los niveles 3 a 5 en la forma siguiente:

Comprender los atributos medibles de los objetos y las unidades, sistemas y procesos de medición:
- comprender atributos de longitud, área, peso, volumen y amplitud angular y seleccionar el tipo apropiado de unidad para medirlos;
- comprender la necesidad de medir con unidades estándares y familiarizarse con el sistema métrico.
- hacer conversiones entre unidades, como pasar centímetros a metros;
- comprender que las mediciones son aproximadas y cómo afecta a la precisión el cambio de unidades;
- explorar lo que sucede a las medidas de una figura bidimensional como el perímetro y el área cuando se cambia la forma de algún modo.

Aplicar técnicas apropiadas y herramientas para realizar mediciones:
- desarrollar estrategias de estimación de perímetros, áreas y volúmenes de formas irregulares;
- seleccionar y aplicar las unidades estándares y los instrumentos de medida de longitud, área, volumen, peso, tiempo, temperatura y amplitud angular;
- seleccionar y usar patrones de comparación para estimar medidas;
- desarrollar, comprender y usar fórmulas para encontrar el área de rectángulos, triángulos y paralelogramos;
- desarrollar estrategias para determinar áreas superficiales y volúmenes de sólidos rectangulares.

Ejercicio:

1.Analizar las diferencias y semejanzas de las orientaciones curriculares propuestas para el estudio de la medida en,
- Diseño Curricular Base del MEC
- Las orientaciones curriculares de tu Comunidad Autónoma
- Principios y Estándares 2000 del NCTM.

2. DESARROLLO COGNITIVO Y PROGRESIÓN EN EL APRENDIZAJE

2.1. Principio de conservación. Conservación de la longitud

Se refiere a la capacidad que tienen algunas características de los cuerpos, de no cambiar aunque se les manipule y se produzcan cambios de situación en los mismos, que perceptivamente puede llevar a engaño.

Se dice que un niño ha adquirido la capacidad de conservación si no se deja llevar por su percepción. Esta propiedad referida, por ejemplo al número, hace que un cambio en la disposición de unas canicas puestas en fila pueda llevar al niño a pensar que el número de ellas ha cambiado si se las dispone con una separación mayor. El no cometer errores de este tipo, signo de que el niño ha adquirido la capacidad de conservación referido a una determinada propiedad, está relacionado con el principio de reversibilidad, es decir, el conocimiento de que muchos cambios son reversibles y que, mediante la acción adecuada, se puede volver a la situación inicial.

La adquisición del principio de conservación se puede facilitar planificando y realizando en clase tareas adecuadas que deben llevar al niño a:

- Diferenciar acciones reversibles y no reversibles sobre objetos.
- Reconocer qué propiedades cambian y cuales no cuando se realizan determinadas acciones sobre los objetos.
- Diseñar sencillos experimentos referidos a propiedades concretas sobre objetos concretos.

A continuación describimos las etapas que se distinguen en el desarrollo de este principio en las magnitudes geométricas; estas etapas son orientativas y en ningún momento pueden considerarse compartimentos estancos, aislados unos de otros, y con una rigidez cronológica. Además, la diversidad se va a manifestar en cada niño y su desarrollo va a estar determinado, entre otros factores, por la cantidad de estímulos recibidos a lo largo de su vida, tanto en su casa como en la escuela, es decir, por la cantidad de experiencias y la adecuación de las mismas.

Conservación de la longitud

Hay que distinguir, siguiendo la terminología de Piaget, varias etapas en lo que se refiere a la adquisición del principio de conservación de la longitud por parte del niño:

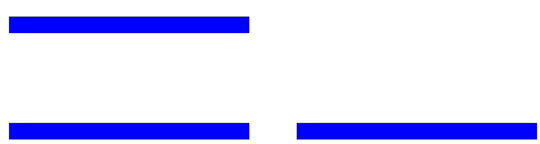
- En un *primer estadio* la longitud de una línea (ya sea recta, curva o poligonal) va a depender solo de los extremos.
- En un *segundo estadio* dos segmentos que en un principio reconoce de la misma longitud, dejan de tenerla al desplazar uno de ellos pues el niño se fija solo en el punto final de cada segmento y no en los puntos iniciales; según el punto o puntos en que el niño fije su atención le llevará a resultados diversos que, incluso, van a depender de la longitud de los segmentos utilizados.
- En el *tercer estadio* es cuando el niño percibe como iguales longitudes que realmente lo son, independientemente de consideraciones ajenas, y es entonces, alrededor de los 7 años, cuando adquiere el principio de conservación de la longitud.

Otro aspecto de la longitud, normalmente asociada con las dimensiones de los objetos, es la distancia, entendida como espacio vacío entre objetos. A edades tempranas el niño suele pensar que la distancia entre dos objetos cambia si se interpone un tercer objeto entre ellos y es la percepción correcta de las distancias uno de los aspectos que le llevarán a la adquisición del principio de conservación de la longitud y hará que el niño esté en condiciones de abordar el estudio de la medida de longitudes y su aplicación posterior al cálculo de perímetros.

Actividades:

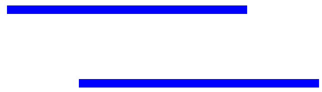
1. Se presentan al niño dos varillas de la misma longitud y diferente grosor y se le pide que diga cuál de ellas es más larga.

2. Se presentan al niño dos varillas que él admite que son iguales y a continuación, a la vista del niño, se desplaza una de ellas y se le pide que diga cuál de ellas es ahora más larga.



3. Se le presentan al niño dos segmentos paralelos de distinta longitud pero cuyos extremos finales llegan al mismo sitio y se les pide que digan cual de ellos es el de mayor longitud.

4. Sobre un papel cuadriculado se le presentan al niño dos segmentos de igual longitud pero uno de ellos está desplazado, por ejemplo, dos cuadraditos respecto del otro y se le pide al niño que diga cual es el de mayor longitud.



Otras actividades podrían ser con cuerdas que se trocean o a las que se les hacen nudos y, referidos a distancias, se podría pensar en considerar objetos interpuestos, intercambio entre los objetos (simetría) y distancias por etapas (transitividad).

Experiencias como las que acabamos de describir van a permitir al maestro obtener información acerca del desarrollo psicológico de sus alumnos y, por otra parte, realizadas convenientemente, ayudarán a los niños en dicho desarrollo.

2.2. Facetas y etapas en el estudio de la medición en la escuela[2]

¿Cómo aprende un chico a medir? Si analizamos el proceso, encontramos que se trata de una mezcla de importantes destrezas sensoriales y perceptivas con aspectos de geometría y aritmética. También implica al área afectiva y proporciona al niño la oportunidad de alcanzar un sentido de realización, así como apreciar la utilidad básica de nuestro sistema de medición. El proceso procede secuencialmente desde la percepción a la comparación y después a la aplicación de un estándar de medida (o referente) y sigue las siguientes etapas que describimos a continuación.

2.2.1. Papel de percepción en la medición

La medición comienza con la percepción de lo que debe ser medido. Explicar las marcas de un termómetro a un niño sin desarrollar primero alguna sensación y percepción de lo que mide no es sino otra manera de leer escalas. La altura de un niño, por ejemplo, da significado a la longitud, mientras que el peso no.

Como adultos, se da por supuesto que los niños perciben como lo hacemos nosotros. La mayoría de los niños tienen alguna experiencia que les permite desarrollar la percepción del mundo que les rodea. Sin embargo, esto se deja frecuentemente al azar **y** raramente se desarrolla de un modo sistemático. El profesor debería estar dispuesto para exponer a los niños a muchos estímulos y muchas propiedades de los objetos que eventualmente deben medir. Estas actividades son un comienzo fundamental para adquirir destreza en la medición.

Ejercicio
2. Citar otros ejemplos de percepción de cualidades de objetos.

2.2.2. Papel de la comparación

La percepción es el comienzo de la medición, y la comparación sigue a la percepción. Habiendo percibido alguna propiedad de algún objeto, nosotros, de un modo natural, lo

[2] En este apartado y el siguiente incluimos un resumen del artículo de Inskeep, publicado en el "Yearbook de 1976" del N.C.T.M. que presenta una síntesis apropiada sobre las facetas a tener en cuenta en la enseñanza de la medición en la enseñanza básica.

comparamos con otros objetos que tienen la misma propiedad - si una vasija contiene una cierta cantidad de líquido, ¿tendrá esta otra una capacidad diferente? Cuando ponemos nuestra mano en una vasija de agua y la sacamos, experimentamos un cambio de sensación motivada por la evaporación del líquido. ¿Qué tenemos para comparar esta experiencia? ¿No sentimos lo mismo cuando nos bañamos? ¿Es la misma sensación que cuando abrimos el frigorífico o nos aproximamos a un conducto de aire acondicionado?

La comparación de sensaciones es bastante natural. La comparación de objetos que pueden colocarse próximos es también una consecuencia natural de las percepciones. Al medir su altura, algunos niños pueden desear compararla con la de otros niños de la clase. Podemos, en este caso, indicar a los niños que se tiendan sobre grandes hojas de papel y dibujar los contornos de sus cuerpos, de tal modo que se puedan comparar. Esta actividad se hace sin ninguna habilidad numérica previa. La comparación de atributos de objetos conduce de un modo bastante lógico a la necesidad de un estándar que podamos aplicar sucesivamente. Podemos ahora ver la medida como la búsqueda de un estándar o referente.

Ejercicio:
3. Citar otros ejemplos de comparación de percepciones.

2.2.3. Búsqueda de un referente

La comparación de dos cosas es adecuada cuando deseamos hacer enunciados de equivalencia o no equivalencia "Tu eres más alta que yo", "Yo soy más alto que mi hermana pequeña". Esto sirve bien para comparaciones iniciales. Pueden incluso servir para comparaciones lógicas con terceras partes. "Si yo peso más que mi hermano y él pesa más que mi primo pequeño, entonces yo peso más que mi primo". Sin embargo, esta aproximación a la comparación pronto resulta bastante inefectiva. Realmente necesitamos algún estándar de medida, un referente que pueda ser usado sucesivamente y al que podamos acudir en cualquier momento. El referente inicial que usemos no tiene que ser un referente estándar o que sea usado en todo el mundo. Por ejemplo, las partes del cuerpo son referentes fácilmente disponibles para medir longitudes.

Los referentes no estándares son útiles para comparación, pero deseamos llevar a nuestros niños más allá de lo obvio y enseñarles los referentes que pueden ser usados con más de una persona - nuestros estándares de medida.

Los estándares de medida tienen como mínimo dos funciones importantes. Primero, permiten a una persona comunicar una medida a otra de un modo abreviado y directo. Segundo, permiten medidas precisas y consistentes en diferentes áreas geográficas. Cuando nos trasladamos de un país a otro, podemos estar seguros de que las medidas que son estándares en nuestro país son estándares en otro también. Una extensión lógica de esta idea será adoptar estándares de medida utilizables para comunicar los mismos mensajes en todas las partes del mundo. Esto conduce naturalmente al Sistema Internacional de Unidades (SI), que ahora cumple esta función prácticamente en todo el mundo.

Ejercicio:
4. Citar otros ejemplos de búsqueda de referentes para la comparación de percepciones de cualidades de objetos.

2.2.4. La medición como un sistema

Con el SI, tenemos un sistema de unidades estándares relacionadas y que han sustituido por eso ampliamente a los estándares locales arbitrarios. Han sido precisos varios cientos de años para que el sistema encuentre amplia aceptación en el mundo, pero al final se ha conseguido.

En este punto de nuestra discusión, hemos tomado el proceso de medición en varios estadios

- percepción. comparación, la necesidad de un referente, y finalmente, la necesidad de un sistema que organice y sistematice los referentes estándares. El mismo proceso puede ser aplicado a la experiencia educativa de los niños. Sugiere una secuencia de actividades a realizar. Los niños son conducidos desde una primera experiencia perceptual al punto en el que relacionan estas experiencias a otras propiedades y las conectan de un modo sistemático. En este punto final podemos decir que un niño ha aprendido a medir.

Hasta ahora hemos olvidado ciertas aspectos no secuenciales de la medición - los del dominio afectivo y los relacionados con la propia acción de medir. El componente afectivo de la medición y el acto de medir son dos principios que debemos considerar.

Ejercicio:
5. Inventar un sistema de unidades alternativo al actual para la magnitud peso.

2.2.5. La medición como una actividad afectiva

Nuestro trabajo con los niños en la medición producirá dos resultados:

(1) los niños apreciarán el papel que la medición juega en sus vidas y en la sociedad, y

(2) los niños disfrutarán siendo capaces de medir por sí mismos.

La importancia de la medición en nuestra vida personal y en la sociedad es a menudo dada por supuesta. El científico conoce su importancia, y el ingeniero no puede prescindir de ella; pero el ciudadano medio a veces falla en apreciar el papel de la medida. Los niños deben aprender el papel importante que la medición juega en el progreso científico-tecnológico. Relacionar los programas de matemáticas con los estudios de ciencias y sociales ayuda en este desarrollo. Introducir algunas de las destrezas de medición en el arte y educación física es también útil. Pero los niños necesitan ver la medida como una parte importante de sus propias vidas. Necesitan ver que es importante medir con precisión un tablero para la construcción de una casa de madera. Necesitan la habilidad para leer un reloj si no quieren perderse su programa favorito de televisión. Los niños deben ser conscientes de las consecuencias de una medición chapucera o inefectiva en las actividades de construcción.

Otra característica afectiva del proceso de medición y más difícil de evaluar, es la satisfacción que un niño puede sentir de haber hecho un buen trabajo de medición. Los niños deben ser enseñados a medir de tal modo que desarrollen la confianza en sí mismos. Enseñar a los niños que ninguna medida continua es exacta debe ser logrado dándoles una experiencia adecuada en la lectura de instrumentos y escalas. Ser capaz de leer un nuevo tipo de escala es un logro satisfactorio.

Ejercicios:
6. Describir situaciones en las que la medición implique acción y otras en las que sólo sea una actividad mental.
7. Relacionar cantidades de magnitud a medir con la unidad más adecuada.
8 Proponer una actividad en la que el niño deba elegir la unidad de medida y el instrumento más adecuado.
9. Describir una secuencia de aprendizaje, según los principios que se acaban de ver, para estudiar la medida de una magnitud particular.
10. ¿Qué es una medida bien hecha? Citar ejemplos referidos a distintas magnitudes.
11. Citar los instrumentos de medida, para las distintas magnitudes, que todo ciudadano debe conocer.
12. Diseñar una actividad en la que se especifique:
Qué cosa medir.
Qué unidad utilizar, y
Qué procedimiento seguir.

3. SITUACIONES Y RECURSOS

El esquema de trabajo en el aula debe ser similar para todas las magnitudes:
- Comparar y ordenar.
- Hacer estimaciones sobre la cantidad antes de medir.
- Elegir el instrumento más adecuado para realizar la medición.
- Considerar la unidad más adecuada a la magnitud que hay que medir, eligiendo entre los múltiplos y divisores que forman el sistema de medidas.
- Realizar la medición, es decir, comprobar cuántas veces está comprendida la unidad en la magnitud que medimos.
- Comparar la medición con la estimación realizada y valorar el error cometido.

Se propone, por tanto, un esquema de trabajo que requiere una organización de clase lo más cercana posible a un taller: sólo se puede aprender a medir midiendo y discutiendo las estrategias utilizadas, y ello pasa por la actividad y no solamente con lápiz y papel.

3.1. Actividades de percepción y comparación

La enseñanza de la medición debe apoyarse en las ideas intuitivas de los alumnos y en sus experiencias informales de medición para ayudarles a comprender los atributos que se miden y lo que significa medir. El estudio de la medida en la escuela elemental requiere el uso de materiales concretos para que los niños comprendan los rasgos de los objetos que se miden y dominen los instrumentos correspondientes. Los profesores en formación deben, por tanto, familiarizarse con estos materiales e instrumentos.

Un atributo medible es una característica de un objeto que se puede cuantificar. Los segmentos de recta tienen longitud, las regiones planas tienen área, los objetos físicos tienen masa. A medida que los alumnos progresan en el currículo desde preescolar a secundaria, el conjunto de atributos que pueden medir se amplia. El primer paso en el estudio de la medida será reconocer que los objetos tienen atributos que son medibles. Los niños de preescolar y primer ciclo de primaria comienzan comparando y ordenando objetos usando un lenguaje sencillo como más largo y más corto. La longitud debe ser el centro de atención en el primer ciclo, aunque también se puede iniciar el peso y el tiempo. A partir del tercer ciclo se comienza el estudio del área, el perímetro, volumen, temperatura y amplitud angular. En estos niveles aprenden que las medidas se pueden calcular usando fórmulas y no siempre se necesita obtenerlas de manera directa usando instrumentos de medida.

Los alumnos pueden explorar cómo cambian algunas medidas de los objetos al someterlos a ciertas trasformaciones. Por ejemplo, cortando en piezas una figura y reagrupándolas de distinta manera puede cambiar el perímetro, pero no el área.

Siguiendo el artículo citado de Inskeep (1976) incluimos a continuación actividades y recursos para el estudio de las magnitudes básicas en los distintos niveles de educación primaria: longitud, peso, tiempo, temperatura y capacidad. Las magnitudes amplitud angular, área y volúmen serán tratadas en el siguiente capítulo. Estas actividades deben ser la base para:
- una introducción a una medición socialmente útil y
- el desarrollo de una medición sofisticada en la ciencia y otros temas en los niveles de secundaria y post-secundaria.

Una restricción es que no todos los chicos están preparados para cierto tipo de actividades de medición. La investigación de Piaget y de sus intérpretes ha apoyado la idea de que hay estadios en la vida de los niños en los que son incapaces de comprender de un modo efectivo el proceso de medición. Puesto que cada niño se desarrolla según un patrón individual (esto se aplica tanto a los conceptos piagetianos como a otros aspectos de la individualidad) no es sólo prudente sino esencial que el profesor adapte el programa a sus propios alumnos y use su propio juicio acerca de cuándo comenzar una actividad.

Ejercicios
13. ¿A qué edad se puede abordar el estudio de cada una de las magnitudes?
14. Señalar actividades relacionadas con el principio de conservación de las distintas magnitudes

Actividad 1: Percepción y comparación de longitudes

Percepción de la longitud

1. Aproveche aquellas ocasiones en que los niños son medidos para su registro personal. Cuando la enfermera mide a los niños, haga que la clase discuta lo que se está midiendo. Los métodos utilizados para encontrar la medida pueden ser discutidos también. La clase puede incluso desear construir un dispositivo propio de medida. Pregunte a los niños sobre cómo pueden encontrar la altura de cada uno. Incluso si un niño no puede leer escalas o comparar números, participar en la actividad le ayudará para clarificar lo que significa la altura.

2. Pregunte a los niños si saben quien vive más lejos de la escuela, y cómo pueden determinarlo. Desarrollar la idea de distancia preguntando a los niños que digan cómo pueden encontrar quien vive mas lejos. Si es posible, use un paseo por el campo para desarrollar el concepto de distancia. Utilice visitas a los almacenes próximos, casas o puntos de interés como base para la discusión.

Comparación de longitudes

La mayoría de los adultos comparan la longitud de un objeto con otro, determinando si el número asociado con su medida es mayor a menor que el número correspondiente del otro objeto. En nuestros ejemplos de comparación de longitudes insistimos en las actividades táctiles y visuales y no las hacemos depender sólo de la habilidad para leer y ordenar correctamente números.

3. "¿Por qué las plantas de judías han crecido la mayor cantidad en la semana pasada? Esta pregunta puede servir de base para extenderse con la medida y la comparación.

4. Dibujar los perfiles de los niños y colocarlos en la pizarra en un mural. A continuación, hacer comparaciones: "¿Quién es el más alto? ¿El más bajo? ".

Actividad 2: Percepción y comparación de pesos

Percepción del peso

La percepción del peso corre paralela con la de la longitud puesto que ambas nociones son fácilmente asociadas con los seres vivos. El peso de los objetos puede ser sentido directamente. Sosteniendo dos objetos y comparando sus sensaciones tenemos una experiencia sensorial directa. Indicamos algunas actividades para desarrollar la percepción del peso.

1. Proporcione un número de objetos que varíen en volumen y peso y pida a los niños que los sostengan. Tome dos objetos y pídales que adivinen cuál es más pesado. Repita con varios niños, cada vez pregunte a la clase que adivine cuál es más pesado. Sostener cosas entre las manos da a los chicos experiencia sobre el efecto de peso que la gravedad produce en la masa de los objetos.

Comparación de pesos

Como en la comparación de longitudes no queremos que los niños sean obstaculizados por una dependencia de los instrumentos de medida o por una interpretación del orden de los números. El peso se "siente" mejor por medio de los músculos. Cuando un niño soporta un objeto, puede comprender (percibir) si es pesado. Las siguientes actividades ilustran esta idea,

1. Consiga piedras u otros objetos de pesos variados. Pedir al niño que los ponga en orden desde el más pesado al más ligero, de acuerdo con lo que siente o experimenta al manipularlos. Esta actividad puede realizarse individualmente o en equipo.
2. Pedir a los niños que sostengan sus animales favoritos. ¿Qué animal es más pesado? Hacer una lista de los animales mostrando cuál es el más pesado y el más ligero y anotándolo en la pizarra. Alguna discusión podría acompañar a este ejercicio y varios niños podrían sostener a los animales.

Actividad 3: Percepción, comparación y medición del tiempos

Percepción del tiempo

Los niños no comprenden el tiempo y su paso hasta que alcanzan los niveles superiores de la escuela elemental. Incluso entonces, muchos niños tienen una débil comprensión del paso del tiempo y casi ninguna concepción del tiempo histórico. La percepción del tiempo como un atributo medible progresa a lo largo de los años escolares. Indicamos algunas actividades para ayudar en el desarrollo de esta percepción.

1. Use cualquier oportunidad para desarrollar la idea de los descriptores del tiempo: la clase comienza por la mañana; la comida separa la mañana de la tarde; los chicos vuelven a casa por la tarde. Usar el lenguaje temporal será una parte continua de la educación elemental.

2. Incluso aunque los niños no puedan ser capaces de leer o decir la hora, indíqueles las diferencias en la posición de las manecillas de un reloj. Haga dibujar la posición de las manecillas del reloj a una cierta hora, seguido de otro dibujo una hora después. Si esto es difícil de planificar en la clase, coloque una esfera de reloj sobre la pizarra y pida a un niño que ponga las manecillas como indica el reloj de clase. El dibujo de varios relojes con horas diferentes ayudará a los niños a visualizar el cambio que el paso del tiempo hace sobre la esfera del reloj.

3. Haga un registro de los días, meses, fechas y otros sucesos del calendario. Los nacimientos y ocasiones especiales ayudan a elevar el interés por leer las fechas, días y meses. Haga observar el cambio de año cuando los niños vuelven a la escuela después de las vacaciones de Navidad. Aunque estas actividades no contribuyan necesaria ni directamente a la percepción del tiempo por el niño, les prepara para el vocabulario que usarán para expresarlo. El paso del tiempo puede ser observado en los niveles superiores en términos de días, semanas y meses.

4. Medir el crecimiento de un animal doméstico y asociarlo con el tiempo. Hacer simples gráficos del peso y altura del animal y relacionarlo a los días y fechas de cada medida. Esto ayuda a relacionar el cambio en las características físicas del animal con el cambio del tiempo. Haga que los niños predigan el peso una semana posterior para adquirir experiencia adicional en la observación de los intervalos de tiempo. Posteriormente podrán comparar su predicción con el valor medido.

Comparación de tiempo

1. Dar a los niños una sensación del paso del tiempo relacionándolo con el calendario, leyendo en él y observando los sucesos naturales diarios. ¿Ha brillado hoy el sol? ¿Qué fecha es hoy? Usar estas cuestiones diariamente y señalarlas en el calendario. ¿Cuántos dias ha brillado el sol en esta semana? Estas y otras cuestiones pueden servir para estimular discusiones normales sobre la duración del dia y de la semana. Extienda la idea para desarrollar conceptos comparativos del mes, estaciones y año. Los niños de los niveles superiores necesitan estas comparaciones; los niños más jóvenes pueden iniciarse en ellas.

2. ¿Cuánto dura un segundo? ¿Un minuto? ¿Una hora? ¿Cuáles son los intervalos de tiempo de mayor duración? Estas cuestiones se pueden responder con simples experimentos o por observaciones. Un péndulo cuyo período tenga aproximadamente un segundo. El pulso de una persona, de 60 a 80 pulsaciones en un minuto. Medir el pulso de los niños, o dejar que individualmente se tomen el propio. Después comparar la duración de las pulsaciones de los niños con las obtenidas inmediatamente después del recreo. Preguntar a los niños quién tiene 60, esto mide aproximadamente 1 minuto. Hacerles ver que son 60 golpes. Ayudados por un metrónomo, para controlar el ritmo, contar 60 golpes. Hacerles ver que esto mide aproximadamente un minuto. Comparar el péndulo con el pulso para dar al niño una idea de que más o menos 60 pulsaciones equivalen a un minuto.

Actividad 4: Percepción, comparación y medición de temperaturas

Percepción de la temperatura. Comparación

Los niños están expuestos a variaciones de temperatura desde sus primeras experiencias y sensaciones. Pueden asociar el calor con una estación o con un lugar, tal como el horno de cocina. Algunos niños se adaptan tan bien a los cambios de temperatura que parecen no notar las diferencias. Todos los niños deben tener algún concepto de temperatura como medida del calor. Indicamos algunas actividades diseñadas para desarrollar la percepción de la temperatura.

1. Coloque dos recipientes de agua, uno con suficiente hielo dentro para hacerlo más frío que el otro. Pida a un niño que meta una mano en el agua fría y la otra en la caliente. Pregunte qué siente y cómo lo describe. Use palabras "más frío", "más caliente" y frases como “la temperatura es más alta en esta vasija". Similarmente, haga que los niños pongan sus manos en una salida de aire caliente o frío y que comparen sus sensaciones de ese aire con el aire del resto de la habitación. Compartir y discutir tales experiencias puede conducir a una idea ajustada de la temperatura,

2. Deje a los niños experimentar con pequeños trozos de metal negro y rugoso y otros de metal reflejante colocándolos al sol, ¿cuál se pone más caliente? ¿Cuál se calienta más deprisa?

3.2. Actividades de estimación

Estimar una cantidad es el proceso de obtener una medida sin la ayuda de instrumentos, es decir, consiste en realizar juicios subjetivos sobre la medida de los objetos. También podemos decir que es la "medida" realizada "a ojo" de una cualidad de un objeto[3]. Los procesos de estimación son muy frecuentes y útiles en las actividades que realizamos habitualmente. Este es un motivo para desarrollar esta destreza en la escuela; además, las actividades de estimación de medidas se deben considerar como uno de los componentes del proceso de medir, ayudando a los alumnos a entender los distintos aspectos que se ponen en juego.

Actividad 6. Estimación con objetos presentes o ausentes

a)

- Estimar el largo de la clase en metros, estando el metro presente y el alumno en clase.
- Estimar la altura de la puerta del pasillo del colegio en metros, sin el metro y desde el pasillo.
- Estimar la longitud del patio del colegio en metros, con el metro no presente y el alumno en clase.
- Estimar el ancho de las pistas del colegio en metros, con el metro no presente y el alumno en clase.

b)

- Señalar qué objeto, de entre los que se indican, mide 2 m de largo (estando el metro presente):

[3] Frias, Gil y Moreno (2001). Introducción a las magnitudes y la medida . Longitud, masa, amplitud, tiempo. En E. Castro (Ed.), Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria. Madrid: Síntesis.

un pupitre, una cama, un dormitorio.
- Indicar qué objetos de entre los señalados anteriormente miden 0'6 m de ancho, estando el metro no presente
- Construir un metro. Nombrar objetos de 3 m.
- Nombrar objetos que midan 1 m de longitud.

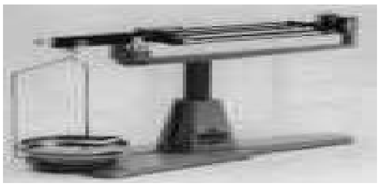
3.3. Actividades de medición

La importancia de hacer mediciones ha sido ya subrayada. Medición sin acción es meramente un tipo de rutina memorística o ejercicio intelectual. Los niños pueden memorizar el Sistema Métrico Decimal sin mucho esfuerzo. Sin embargo, queremos algo más que la habilidad para responder a unos tests estandarizados. Queremos que los niños tengan experiencias en todas las áreas básicas de la medición y que sean capaces de medir precisa y consistentemente. Tales experiencias deben ser sistemáticamente planeadas por el profesor y convertirse en parte integral del curriculum.

Los alumnos desde preescolar al 2º nivel deberían aprender a usar una variedad de técnicas, incluyendo el recuento y la estimación, e instrumentos tales como reglas, escalas y relojes analógicos. En los ciclos 2º y 3º se debe continuar el aprendizaje de estas técnicas y desarrollar otras nuevas aplicándolas a mediciones más complicadas, como puede ser la obtención y el uso de fórmulas para las áreas de figuras planas.

Las actividades de estimación de medias permiten centrar la atención de los alumnos en los atributos que se miden, el proceso de medición, el tamaño de las unidades y el valor de los referentes. De esta manera, la estimación de medidas contribuye al desarrollo del sentido espacial, así como conceptos y destrezas numéricas. Los estudiantes se darán cuenta que con frecuencia es suficiente con dar una estimación de una medida y que no es necesario usar instrumentos de medida en ciertas circunstancias.

Actividades 7:



Medición de pesos:

- Se proporciona a los niños una balanza, pesas de diversos pesos (1gr., 5gr, 10 grs. ¼ kg. etc). Se realizan actividades de estimación y medición de pesos:
- ¿Cuánto pesa mi libro? ¿Mis zapatos? ¿el balón de futbol? ¿Un vaso vacío? ¿Un vaso lleno de agua? ¿Un vaso lleno de arena?
- ¿Cuántas pesas tengo que poner en la balanza para equilibrar el peso?
- Use las ocasiones en que los niños son medidos para su fichero personal para desarrollar la idea de peso. Longitud y peso representan una característica propia del niño. Esto es una fuerte motivación cuando se utiliza adecuadamente. Dé a los niños los números que representan sus pesos. Ponga cuidado en la comparación de los pesos, pero si se hace de un modo natural y discretamente, un niño puede decir que es más pesado o ligero que otro.

Medición del tiempo

Cuando los niños sean capaces de decir la hora y leer el calendario, hágales que realicen varios experimentos que impliquen el registro de la hora y los sucesos. La comparación de los cambios sobre un intervalo de tiempo ayuda a establecer la idea de tiempo.

- Compruebe el tiempo de cocción de un huevo con un cronómetro para desarrollar el sentido de una duración breve de tiempo. El desarrollo de duraciones más largas es más difícil y complicado por el hecho de que el tiempo parece correr más lento o deprisa dependiendo de la ocupación del individuo durante el intervalo.
- La anotación de fechas, hacer programaciones de las horas de los programas de TV, y desarrollar actividades planificadas que impliquen intervalos de tiempo (tales como guiones de radio o TV)

todo ello contribuye a la percepción individual del tiempo.

Como se ha observado previamente la comparación de intervalos de tiempo es difícil incluso para los adultos. Una hora viendo nuestro programa favorito de TV es mucho más corta que practicando sumas de números. Cuando los instrumentos de medida son invariables, una conciencia del paso del tiempo depende de los ritmos corporales (tener hambre, latidos del corazón, tener sueño), de los sucesos naturales periódicos (salida del sol, puesta del sol, salida de la luna), o de la regularidad con que se sucedan nuestras ocupaciones diarias (entrada y salida de la escuela, tiempo libre, hora de comer). Donde sea posible, estas medidas disponibles de comparación pueden ser usadas. La medida del tiempo con relojes y calendarios puede desarrollarse y refinarse si estas impresiones básicas de comparación están regularmente desarrolladas. Una clase sobre la medición del tiempo puede proporcionar la oportunidad de que los niños comparen intervalos de tiempo dados.

- ¿Cómo podemos medir el tiempo? Algunas respuestas podrían ser obtenidas directamente como las siguientes: un péndulo, un reloj de arena, con gotas de agua en una botella (dejar que gotee), con latidos del corazón, el movimiento de una sombra, botando un peso unido a un muelle. Comparar estos medios para medir el tiempo con los medios estándares y fijar intervalos en términos de sucesos físicos.

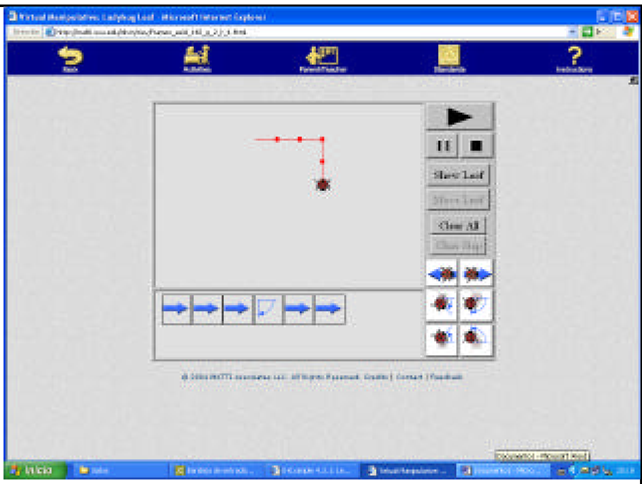
Medición de longitudes

- ¿Cómo podríamos medir la altura? ¿Podemos usar bandas de papel o cuerda para mostrar cómo de alta es la planta? Señalamos que cuando esta actividad es realizada en los niveles más inferiores, la soltura (o buena disponibilidad) de los niños para la medida no está totalmente desarrollada y la supervisión de los adultos puede ser muy necesaria para ayudar a los niños a obtener medidas precisas. Los niños pueden empezar con cuerdas o con papel en cualquier orden, y pueden hacer una gráfica de sus resultados.
- Medir la longitud de la clase con pies, con baldosas, con el metro. ¿Cuántos centímetros tiene una baldosa? ¿Un pie?
- Medir la altura de varios niños y anotarla junto a su silueta. Escribir el nombre de los niños junto a su altura. Hacer comparaciones observando estas anotaciones.

Medición de temperaturas

- Haga un registro diario del tiempo atmosférico y compare las temperaturas anotadas. Esto ayuda a que los niños se familiaricen con el termómetro. Comparar y discutir diferencias de temperaturas en las diferentes partes del país.
- Haga que los niños estimen la temperatura de una vasija de agua. Compare las estimaciones con la temperatura medida.

3.4. Recursos en Internet

<table>
<tr><td colspan="2">1. Experimentación con unidades de medida y formas geométricas
http://standards.nctm.org/document/eexamples/chap4/4.3/index.htm</td></tr>
<tr><td></td><td>Unos iconos muestran diferentes unidades de longitud y dirección que pueden usarse para describir los movimientos de una araña en un plano.

Una vez programada la secuencia de movimientos se puede experimentar el efecto conseguido.

También pueden realizarse los movimientos dentro de un laberinto.

Estas actividades estimulan la orientación espacial, descomposición analítica de movimientos en el plano y percepción de las unidades de longitud y amplitud angular.</td></tr>
</table>

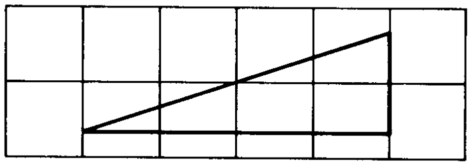
<table>
<tr><td colspan="2">2. Interactive Units converter:
http://www.convert-me.com/en/</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Para una variedad de magnitudes proporciona la conversión entre diferentes unidades de medida, incluyendo medidas antiguas o medidas en diferentes sistemas internacionales.

Permite dar a conocer otras medidas diferentes de las convencionales y también comprobar los cálculos realizados al transformar unidades de medida.</td></tr>
</table>

4. CONFLICTOS EN EL APRENDIZAJE: INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN

A continuación incluimos algunas tareas descritas en Dickson, Brown y Gibson (1984) que han sido tomadas de distintas investigaciones.

1. Conservación de la longitud

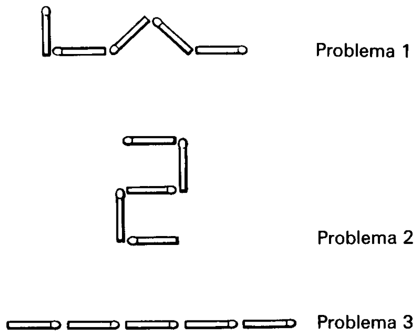


¿Cuál es la longitud del lado inclinado?

- 4 cuadros
- más de 4 cuadros
- menos de 4 cuadros

El porcentaje de respuestas correctas a los 12 años es el 38% y el 40% a los 13 años. La respuesta más frecuente es que la longitud es 4 cuadros.

2. Comparación de longitudes



Se pregunta a los niños cuál de las tres figuras tiene mayor longitud.

Hasta los 6 o 7 años los niños piensan que la tercera figura es la que tiene mayor longitud.

3. Conservación del peso. Se toma una bola de plastilina redonda y se pregunta si pesa lo mismo cuando se estira en forma de salchicha.

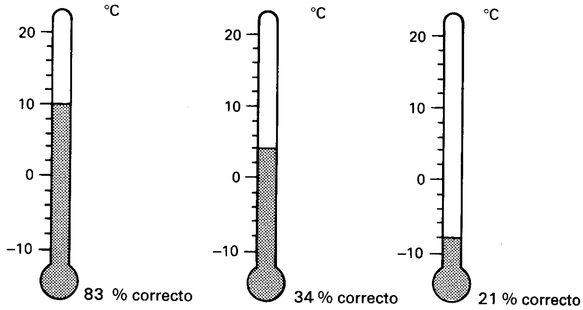
Se toma un juego de muñecas rusas y se pregunta cuándo pesa más, si cuando todas las muñecas se meten una dentro de otra o si cuando se sacan unas fuera de otras.

- A los 7 años y medio el 57 % de los niños admite la conservación del peso.
- A los 12 años el 86% de los niños admite la conservación del peso.

4. Comparación del peso. Se da a los niños una balanza y tres cajas de igual forma y volumen y diferente peso. Se pide ordenar las cajas por peso.

- A los 7 años y medio el 31 % de los niños es capaz de hacer la tarea.
- A los 12 años el 72% de los niños es capaz de hacer la tarea

5. Lectura del termómetro



La lectura de temperaturas sobre cero es más sencilla que las temperaturas bajo cero.
Es mucho más sencillo si la lectura coincide con un valor rotulado en la escala.
Los datos corresponden a niños de 11 años.

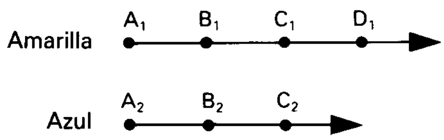
6. Ordenación de acontecimientos

Se muestra una secuencia de fotografías de un acontencimiento que el niño ha observado previamente (una botella llenándose, un objeto cayendo). Se pide a los niños que coloquen las fotografías en el orden en que han ocurrido.

Esta es una experiencia realizada por Piaget, quien informó que un 15% de su muestra de niños no hacia la tarea correctamente a la edad de ocho años

7. Duración de intervalos temporales

Se tienen dos muñecas, una amarilla y otra azul que comienzan a andar en los puntos A1 y A2, respectivamente, al mismo tiempo. Se detienen en el mismo instante, señalado por un "clic" audible. Como la velocidad uniforme de cada muñeca es diferente, ambas recorren distancias distintas.



- ¿Se pararon al mismo tiempo?
- ¿Cuál se paró primero?
- ¿Cuál se movió durante más tiempo?

En experiencias realizadas por Lowell y Slater el porcentaje de respuestas correctas a estas cuestiones fue del 13% con niños de 5 o 6 años y sólo del 43% en niños de 9 y 10 años.

5. TALLER DE DIDÁCTICA

5.1. Análisis de textos escolares. Diseño de unidades didácticas

Consigue una colección de libros de texto de matemáticas de 2º y 3er ciclo de primaria (recomendamos buscar los libros que utilizaste personalmente, o bien los de algún familiar o amigo).

1. Busca ejemplos y ejercicios relacionados con la medida directa de magnitudes.
2. Identifica aspectos del desarrollo del tema en los manuales escolares que consideres potencialmente conflictivos.
3. Describe los cambios que introducirías en el diseño de las lecciones propuestas para los cursos de primaria.

5.2. Análisis de experiencias de enseñanza de la medida de longitudes

En el Anexo incluido a continuación (*La medida en el ciclo medio*, N. Brousseau), se describen diversas actividades de enseñanza de la medida directa de longitudes. Realizar un lectura detallada de este documento, discutir en pequeños grupos y elaborar un breve informe, respondiendo a las siguientes cuestiones:

Cuestiones:
1. La longitud de las bandas de cartulina preparadas como material para la actividad es una variable didáctica (el profesor la puede cambiar y ello influye en los conocimientos puestos en juego). ¿Por qué se han elegido las bandas con las longitudes dadas? ¿Qué consecuencias tendría el cambio de estas longitudes?
2. ¿Por qué se divide cada grupo de 4 alumnos en dos subgrupos, uno de emisores y otro de receptores? ¿Qué consecuencia tiene esa organización en términos cognitivos?
3. ¿Por qué la maestra no acepta que los mensajes de los emisores se den en cm y mm?

4. ¿Por qué dice la maestra que aceptará una diferencia en las bandas recortadas menor de 5 mm?
5. ¿Qué otros tipos de mensajes se puede esperar que elaboren los niños que realizan la experiencia?
6. ¿Para qué conocimientos consideran los autores de la experiencia que el uso prematuro del doble decímetro (con marcas de cm y mm) es un obstáculo?
7. ¿Qué ventajas aporta el uso de bandas de cartulina en una primera fase del aprendizaje de la medida de longitudes respecto de las unidades antropométricas y de las unidades legales?
8. Después de la actividad 2 de discusión de los mensajes los autores de la experiencia deciden dejar el estudio de la longitud y pasan a estudiar el peso. Explica las razones de esta decisión.

ANEXO: La medida en el Ciclo Medio (Brousseau, N., 1992). *La medida en el ciclo medio. Informe de actividades desarrolladas en el IREM de Burdeos. Documento para los maestros y formadores*. [Actividades sobre la medida de longitudes. Traducción de J. D. Godino].

Actividad 1: Medida de longitudes: juego de comunicación

Esta actividad se desarrolla en dos clases paralelas del curso medio, 1er año: $CM1_A$ y $CM1_B$.

I. MATERIAL

- bandas de 1'5 cm aproximadamente de anchura de cartulina de los siguientes colores y longitudes:
  - 2 bandas verdes de 64 cm de longitud;
  - 2 bandas verdes de 57 cm;
  - 2 bandas amarillas de 42 cm;
  - 2 bandas amarillas de 40 cm;
  - 2 bandas azules de 32 cm;
  - 2 bandas azules de 51 cm.
- Un número suficientemente grande de bandas de colores verde, amarillo y azul de 1'5 cm de ancho de la misma cartulina que las anteriores de unos 70 cm de longitud.
- Bandas "patrón" de 5 mm de ancho recortadas en cartulina gris (o marrón), todas iguales de 12 cm de longitud, y marcadas con la letra "u". Se debe disponer de un número grande de estas bandas (que serán usadas como unidades de medida)
- Hojas blancas para escribir los mensajes.

II. ORGANIZACIÓN DE LA CLASE

La clase se divide en equipos de 4 niños. Cada equipo comprende 2 emisores y 2 receptores que estarán separados (aunque van a trabajar coordinados). Al comienzo se da una consigna y se reparte el material:

1. <u>Consigna:</u> "Voy a dar una banda de color a los emisores. Unos tendrán una banda verde, otros amarilla, y otros azul. Deberán escribir un mensaje en el que indicarán la medida de la longitud de esta banda utilizando este "patrón" (la maestra muestra la banda unidad gris o marrón). Todos estos patrones tienen la misma longitud. (La maestra muestra esta igualdad superponiendo dos de ellas). Los mensajes serán enviados a los receptores quienes deberán construir una banda de la misma longitud que la de los emisores".
2. <u>Distribución del material:</u> La maestra distribuye a cada grupo de emisores una banda de color (bien verde, amarilla, o azul) y dos bandas "patrón".

III. DESARROLLO

1. <u>Primera fase:</u> Los grupos de emisores comienzan la actividad. Mientras esperan recibir los mensajes, los receptores hacen individualmente un ejercicio de matemáticas (operaciones, por

ejemplo) que ha sido preparado por la maestra.

a) Comportamientos observados durante la realización de esta fase. Antes de comenzar, los niños preguntan a la maestra si aceptará una pequeña diferencia de longitud (esto se explica porque en la clase se había hecho unos 3 meses antes una actividad de medida de segmentos en la que la maestra había exigido mucha precisión en las medidas y los niños se recuerdan de ello). Desde el comienzo del trabajo, tratan de traducir las longitudes de las bandas (las bandas del color que se les ha dado para que midan con el patrón) a las unidades que conocen por el uso del doble decímetro: centímetros y milímetros.

La maestra les explica:

- que aceptará una diferencia de longitud materializada por una pequeña banda recortada de menos de 5 mm de longitud (3 o 4 mm);
- que no deben utilizar los dobles decímetros, sino únicamente el material que se les ha distribuido;
- por tanto, ningún mensaje se puede expresar en centímetros o en milímetros.

A pesar de esto, en muchos grupos, los niños tratan de apreciar las longitudes en centímetros y milímetros. Algunos incluso dibujan graduaciones aproximadas sobre las bandas "patrón".

En la clase A, los niños tienen muchas dificultades: algunos llevan el patrón sobre su banda, pero cuando queda "un pequeño trozo" por medir, no tienen la idea de plegar el patrón, y a veces miden la parte restante con la anchura del patrón.

Esta primera fase no concluye con la realización de los mensajes pedidos y a la construcción, por los receptores, de bandas de la misma longitud. En cambio, en la clase B, algunos grupos tienen la idea de plegar el patrón en 2 o en 4.

b) Concertación entre emisores y receptores: Antes de abordar la segunda fase (cambio de emisores y receptores) y como consecuencia de este fracaso, la maestra de la clase A propone a los emisores y a los receptores que se pongan de acuerdo para tratar de buscar una estrategia.

Es entonces cuando los niños preguntan si pueden plegar los patrones y trazar encima marcas.

La maestra responde que pueden hacer todo lo que quieran con los patrones y que podrán disponer de tantos patrones como quieran.

2. <u>Segunda fase:</u> Los emisores y los receptores se separan después de intercambiar los papeles.
   La maestra distribuye a los nuevos emisores las otras bandas verdes, amarillas y azules. Los emisores redactan los mensajes (ponen secuencialmente los patrones, trazan marcas). Una vez terminados los mensajes se transmiten a los receptores.
   Los receptores construyen las bandas correspondientes. Los grupos se reúnen a continuación para verificar (mediante superposición) si la banda construida tiene la misma longitud que la del emisor.

<u>Observación</u>: No hay intercambio de patrones. Solo se transmiten los mensajes.

<u>3. Ejemplos de mensajes obtenidos en el transcurso de la actividad</u>

Clase A, 1ª fase: "2 varillas pequeñas marrón, una varilla pequeña no completa, hay que eliminar 3 o 4 cm"; "hay que poner 2 varillas y otra más a la que le falta un poco al final"

Clase B: "2 u más 3 cuartos, se hace un cuarto doblando u en cuatro", 3 veces u, mitad, mitad de la mitad, la mitad de la mitad de la mitad"

Clase A, 2ª fase después de la concertación: "hay que poner 3 u, una a continuación de otra y la mitad exactamente de una u (borde con borde)", "hay que poner 5 varillas y plegar una varilla pequeña que se llama u en partes iguales"

<u>Observación</u>: Esta lista de mensajes no es exhaustiva. Hemos elegido sólo algunos ejemplos. Es probable que los mensajes que se obtengan en otra clase sean diferentes.

Actividad 2: Medida de longitudes (discusión)

I. MATERIAL

- El mismo material que el usado en la actividad 1ª (bandas de colores y patrón-unidad)
- Mensajes de los alumnos.

II. DESARROLLO

El estudio de los mensajes se hace bajo la forma de una discusión colectiva.

La maestra pregunta a los niños: ¿Qué grupos son los que no han tenido éxito?, y propone a continuación comenzar a examinar los casos en los que ha habido dificultades. Los niños que no han tenido éxito leen sus mensajes, los cuales son escritos en la pizarra por la maestra.

Estos mensajes se discuten por el conjunto de los niños. Se presentan dos casos:

- El mensaje es correcto y han sido los receptores quienes lo han comprendido mal y han construido mal la varilla: en este caso los emisores justifican su mensaje realizando las manipulaciones (con la ayuda de las varillas) delante de los niños.
- O bien el mensaje nos es correcto y la maestra trata de que los niños encuentren el fallo.

Los errores son puestos en evidencia:

- la anchura del patrón ha sido utilizada como unidad;
- las medidas no son lo suficiente precisas debido a que los pliegues están mal hechos.

III. RESULTADOS

Al final de esta secuencia, la maestra introduce la palabra "unidad" para nombrar a la varilla patrón, y los niños, después de discutir, se ponen de acuerdo para enunciar las dos ideas siguientes:

- Para comunicar la medida de las varillas y para construirlas es necesario una unidad de medida que se pueda trasladar.
- Es necesario usar unidades cada vez más pequeñas para medir con la mayor precisión posible. Estas unidades se obtienen mediante doblado de la varilla patrón.

Observación: Después de esta segunda actividad, hemos tomado la decisión de continuar el trabajo sobre la medida utilizando un material completamente diferente: material de pesada con la balanza de platillos (Roverbal). Esta decisión puede parecer sorprendente ya que aún no se han explotado todas las posibilidades que permite el trabajo con las longitudes. Esta elección se hace por las siguientes razones:

- En primer lugar, los niños que utilizan el doble decímetro desde el curso preparatorio, no comprenden la utilidad de una actividad de medida de longitudes sin este instrumento. Han tenido muchas reticencias de utilizar el patrón proporcionado, no graduado, en el sistema habitual.
- Además, estos niños no se plantean la cuestión de la significación de una medida y no admiten por tanto que se pueda utilizar un objeto cualquiera (el pulgar, el pie, la varilla, una cuerda, ...) para medir una longitud.

Para superar estas dificultades, hemos escogido una actividad sobre la medida de masas que permite:

- introducir la balanza de platillos que no es un instrumento familiar para los niños (conocen esencialmente las balanzas automáticas);

utilizar esta balanza sin las masas marcadas sino con unidades elegidas por la maestra: diferentes tipos de clavos y plaquetas.

BIBLIOGRAFÍA

Brousseau, N. et al. (1992). *La mesure en cours moyen, è re année; compte rendu d'activites*. Irem de Bordeaux. [La medida en el ciclo medio, 1er año; informe de actividades. Traducción de J. Díaz Godino]

Chamorro, C. y Belmonte, J. M. (1988). *El problema de la medida*. Madrid: Síntesis.

Dickson, L., Brown, M. y Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las Matemáticas*. Barcelona:

MEC-Labor.

Frias, A., Gil, F. y Moreno, M. F. (2001). Introducción a las magnitudes y la medida . Longitud, masa, amplitud, tiempo. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria*. Madrid: Síntesis.

Inskeep, J. E. (1976). "Teaching measurement to elementary school children". En: N.C.T.M. (Ed.), *Measurement in School Mathematics, 1976 Yearbook*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics [Enseñanza de la medición en la escuela elemental. Traducción de J. Díaz Godino y L. Ruíz Higueras]

Olmo, M. A., Moreno, F. y Gil, F. (1989). *Superfie y volumen*. Madrid: Síntesis.

Roanes, E. (1976). *Didáctica de las matemáticas*. Madrid: Anaya.

Medida de Magnitudes y su Didáctica para Maestros

Capítulo 2:

MAGNITUDES GEOMÉTRICAS

A: Contextualización Profesional

ANÁLISIS DE PROBLEMAS SOBRE MAGNITUDES EN PRIMARIA (ÁREAS Y VOLÚMENES)

Consigna:

A continuación incluimos algunos enunciados de problemas y ejercicios que han sido tomados de libros de texto de primaria. Para cada uno de ellos:

a) Resuelve los problemas propuestos.
b) Indica los conceptos y procedimientos matemáticos que se ponen en juego en la solución.
c) Clasifica los enunciados en tres grupos según el grado de dificultad que les atribuyes (fácil, intermedio, difícil).
d) Para cada problema enuncia otros dos del mismo tipo, cambiando las variables de la tarea, de manera que uno te parezca más fácil de resolver y otro más difícil.
e) ¿Piensas que los enunciados son suficientemente precisos y comprensibles para los alumnos de primaria? Propón un enunciado alternativo para aquellos ejercicios que no te parezcan suficientemente claros para los alumnos.
f) Consigue una colección de libros de texto de primaria. Busca en ellos tipos de problemas no incluidos en esta relación. Explica en qué se diferencian.

Enunciados de problemas incluidos en libros de primaria:

1. Resuelve:

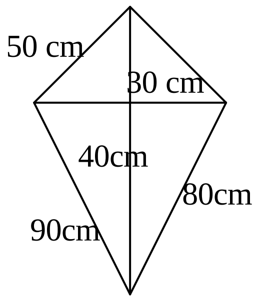
a) Sonia ha pegado una foto cuadrada de 9 cm de lado en una hoja cuadriculada. Cada cuadrado de la cuadrícula es de 1 cm^2. ¿Cuántos cuadraditos ocupa la foto?	b) Luis tiene una pegatina cuadrada de 6 cm de lado y otra rectangular de 7 cm de largo y 5 cm de ancho. ¿Qué pegatina tiene el área mayor?
c) Óscar cubre una mesa con azulejos de 1 cm2. La mesa mide 70 cm de largo y 50 cm de ancho. ¿Cuántos azulejos pone?	d) Una cartulina mide 20 cm de largo y 12 cm de ancho. Paula la ha cortado por la mitad. ¿Cuál es el área de cada trozo?

2. Dibuja:
- Un rectángulo cuya área sea 36 cm^2. - Un cuadrado cuya área sea 25 cm^2.
- Un rectángulo cuya área sea 28 cm^2. - Un cuadrado cuya área sea 49 cm^2.
¿Puedes dibujar otro rectángulo distinto al anterior cuya área sea 36 cm^2?

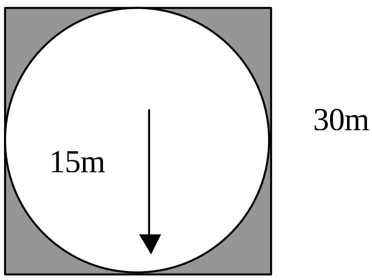
3. Los lados de un rectángulo miden 2/5 m y 3/4 m. ¿Cuál es su área?

4. Dibuja un cuadrado de 3 cm de lado y un rectángulo de 5 cm de largo y 4 cm de ancho. Calcula el perímetro y el área de cada polígono

5. Calcula el perímetro y área de un pentágono regular que tiene 5'7 m de base y 4 m de apotema.
6. Juan y Carlos están cosiendo una cinta en el borde la cometa. ¿Cuánto mide la cinta que han cosido alrededor de la cometa? ¿Cuál es el área de la tela?

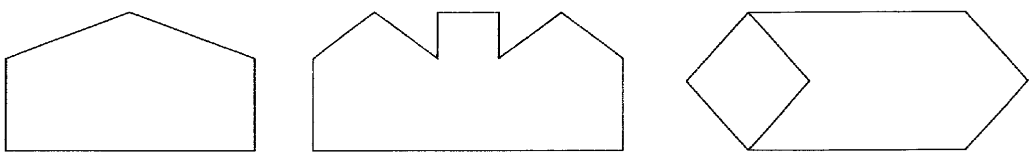


7. Canelo es un borrico glotón. Su dueño lo ha atado con una cuerda de 15 m de larga en el centro de un prado de forma cuadrada de 30 m de lado. Calcula superficie de la parte del prado en la que no puede comer Canelo porque se lo impide la cuerda. Vuelve a hacer este problema suponiendo ahora que Canelo, el borrico, está atado en una esquina del prado.

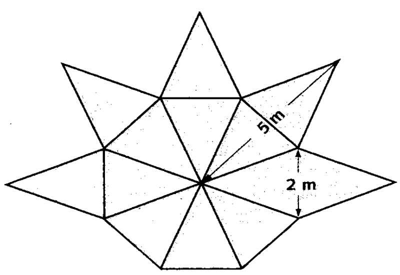


8. La rueda de una bicicleta tiene un diámetro de 50 cm. ¿Cuántas vueltas dará al recorrer una distancia de un kilómetro?

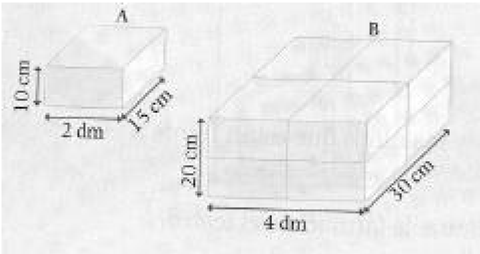
9. Primero, descompón cada figura en polígonos de área conocida. Después, toma las medidas necesarias y calcula el área de cada una.



10. Calcula el área, en m^2 de la siguiente figura



11. En este problema hay dos errores. Búscalo y vuelve a hacerlo correctamente:
Calcula, en centímetros cúbicos, el volumen de estos primas

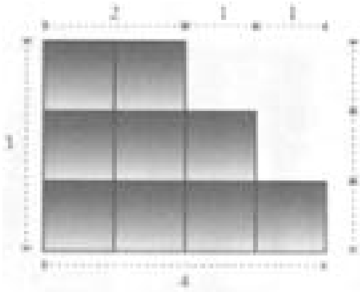


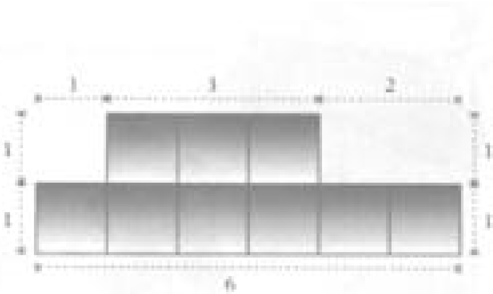
- Volumen de A: V_A = 10 cm x 2 dm x 15 cm = 300 cm^3.

- Volumen de B: En el prisma B todo es el doble que en el prisma A. Por lo tanto, el volumen será:

V_B = 2 x 300 cm3 = 600 cm^3

12. Juntando de diferentes formas nueve cuadrados de un centímetro de lado, hemos construido dos polígonos cuyos perímetros miden 14 cm y 16 cm, respectivamente.





P=4+3+2+1+1+1+1+1+1= 14 cm P= 6+1+1+1+1+3+2+1+1=16 cm

- Busca la manera de unir nueve cuadrados para formar el polígono que tenga el menor perímetro posible.
- Busca también el polígono con el mayor perímetro posible.

B: Conocimientos Matemáticos

1. MAGNITUDES GEOMÉTRICAS: MEDIDA DIRECTA E INDIRECTA

El proceso de medir cualquier magnitud ha sido estudiado en el capítulo 1 de Magnitudes y medida y, en resumen, consiste en seleccionar una unidad apropiada de medida, fijar un procedimiento para cubrir o llenar la cantidad que se desea medir mediante una colección de unidades y expresar la medida mediante el número de unidades usadas.

En muchas situaciones prácticas no es posible, o resulta nada apropiado, hacer una medida directa de las cantidades de una magnitud, en particular si se trata de magnitudes geométricas. Por ejemplo, si trata de medir el perímetro de un cuadrado, basta medir un lado y multiplicar por 4, ya que se sabe que los cuatro lados miden lo mismo.

En este tema tratamos la medida directa e indirecta de las magnitudes geométricas amplitud angular, área y volumen. Abordamos, por tanto, la obtención de las fórmulas o funciones algebraicas que permiten calcular la medida de las cantidades correspondientes a las magnitudes geométricas citadas, a partir de datos conocidos. Para la medida indirecta de longitudes juega un papel importante el teorema de Pitágoras por lo que incluimos su estudio en la sección de conocimientos matemáticos.

2. MEDIDAS LINEALES

2.1. Teorema de Pitágoras

El teorema de Pitágoras es probablemente uno de los más famosos e importantes resultados de la geometría elemental. Sus consecuencias y generalizaciones son fundamentales en trigonometría y en otras partes de las matemáticas. Es también una herramienta útil para la medida indirecta de longitudes.

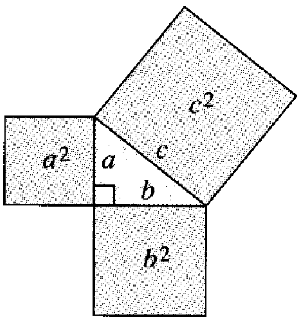
Enunciado: Dado un triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.

Simbólicamente,

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

con *a*, *b* longitudes de los catetos y *c* longitud de la hipotenusa.

Construyendo cuadrados sobre los lados del triángulo rectángulo el teorema de Pitágoras se puede expresar como una relación entre las áreas de dichos cuadrados: La suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa.



Demostración intuitiva

Veamos una demostración intuitiva del teorema de Pitágoras.

- En la figura 1 parte (a) designamos por *a* y *b* los catetos y *c* la hipotenusa.

- A continuación consideramos el cuadrado con lados de longitudes $a+b$.
- En la parte (b) se muestran cuatro copias del triángulo en el interior del cuadrado que dejan sin recubrir dos cuadrados más pequeños de áreas respectivas a^2 y b^2.
- En la parte (c) de la figura se han dispuesto los cuatro triángulos de tal manera que dejan sin cubrir un cuadrado de área c^2.
- Puesto que se trata de dos particiones del mismo cuadrado de lado $a+b$ se deduce que las áreas no cubiertas por los cuatro triángulos en cada uno de los dos casos deben ser iguales, o sea, que $a^2+b^2 = c^2$.

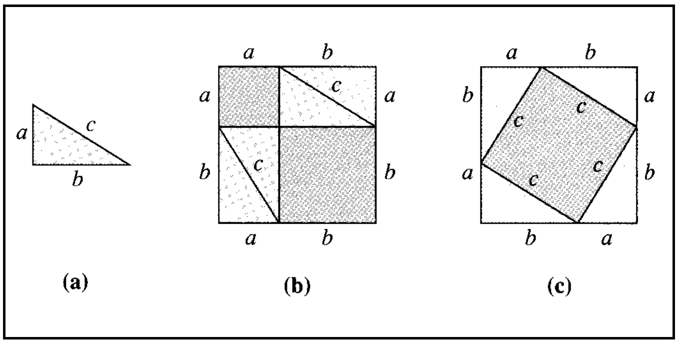
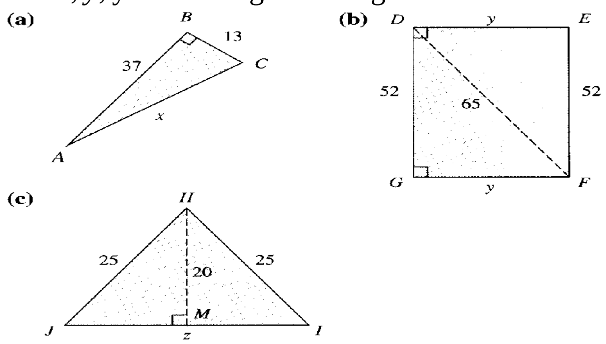


Fig. 1

Ejercicios:

1. Encontrar las longitudes x, y, y z en las siguientes figuras:



2. Determinar si las ternas de números siguientes pueden ser las medidas de los lados de triángulos rectángulos:

a) 15; 17; 8 b) 10; 5; $5\sqrt{3}$ c) 231; 520; 568

3. MEDIDA DE ÁREAS Y PERÍMETROS

Como sabemos, el número de unidades requeridas para cubrir una región plana es el área de dicha región. Usualmente se eligen cuadrados como unidad de área, pero cualquier forma que recubra la figura sin solapamientos ni agujeros puede utilizarse como unidad de medida. En el proceso de medir se utilizan dos propiedades básicas:

Propiedad de congruencia: Si una región R es congruente con otra región S entonces ambas regiones tienen la misma área: área(R) = área(S).

Propiedad de disección: Si una región R se descompone en varias subregiones disjuntas, A, B, ..., F, entonces el área de R es la suma de las áreas de las subregiones:

Área (R) = área (A) + área (B) + ... + área (F).

A continuación estudiamos las áreas de algunos polígonos.

3.1. Áreas de polígonos

Rectángulos

En la figura 2 tenemos un rectángulo de 5 cm de base y 3 cm de altura. Vemos que podemos recubrirlo mediante 3 filas de 5 baldosas de 1cm^2. El número total de baldosas usadas es de 15, o sea, 3x5, producto de la longitud de la base por altura. Esta manera de calcular el área de un rectángulo se expresa con la fórmula:

A = b.a (área igual al producto de la base por la altura)

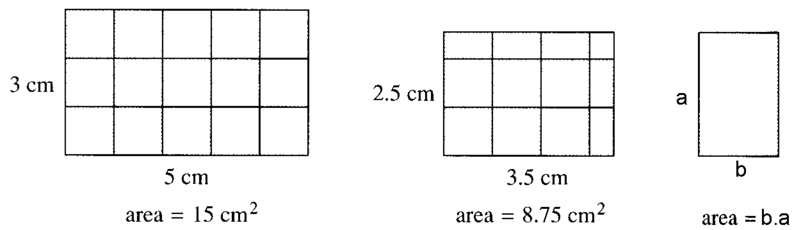


Fig. 2

Paralelogramos

Cualquier paralelogramo con base b y altura a se puede diseccionar y disponer en la forma de un rectángulo de base b y altura a de igual forma como se indica en la figura 3. La fórmula que permite calcular el área de cualquier paralelogramo es la misma que la del rectángulo:

A = b.a

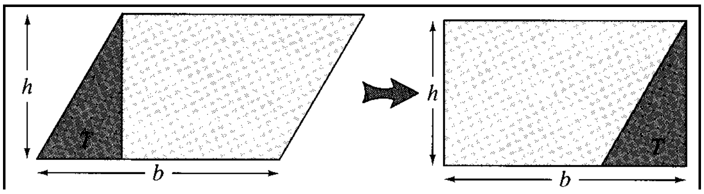
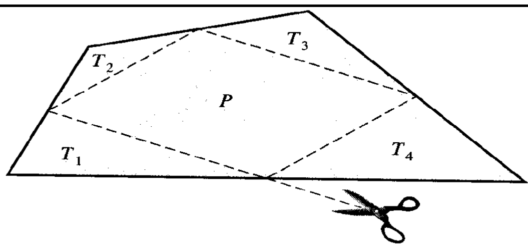


Fig. 3

Ejercicios:

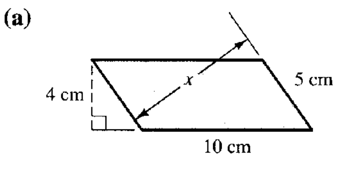
3. Recorta un cuadrilátero convexo en cartulina, localiza los puntos medios de los lados y únelos como indica la figura, formando los cuatro triángulos T_1, T_2, T_3, y T_4, y el paralelogramo P.

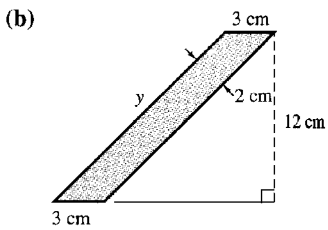


a) Probar que los cuatro triángulos recubren el paralelogramo.

b) ¿Qué relación hay entre el área del paralelogramo y el área del cuadrilátero original?

4. Encontrar el área de cada uno de los paralelogramos siguientes y calcular las longitudes *x* e *y*.





Triángulos

Como se indica en la figura 4 cualquier triángulo de base *b* y altura *a* se puede diseccionar y disponer de manera que se forme un paralelogramo de base *b* y altura 1/2*a*. Por tanto, el área de un triángulo se puede calcular con la fórmula:

$$A = \frac{1}{2} b.a$$

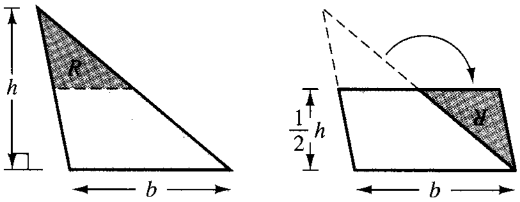


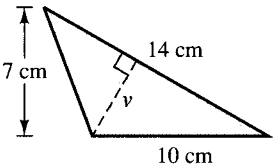
Fig. 4

Es importante tener en cuenta que cualquier lado de un triángulo se puede considerar como base, de modo que habrá tres pares de bases y de alturas.

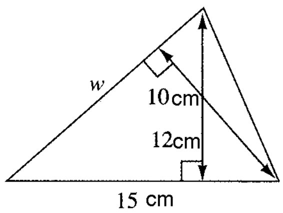
Ejercicios:

5. Encontrar el área de cada triángulo y las distancias v y w.

(a)



(b)



6. Demostrar que el área de un trapezoide cuyas bases son b_1 y b_2, y su altura es a se puede calcular con la siguiente fórmula: $A = \frac{1}{2}(b_1 + b_2).a$

3.2. Longitud de una curva

La longitud de una línea poligonal se obtiene sumando las longitudes de sus lados. Si la línea es una curva (no poligonal) su longitud se puede estimar calculando la longitud de una línea poligonal cuyos vértices estén sobre la curva. La aproximación se puede ir mejorando aumentando el número de vértice (Fig. 5).

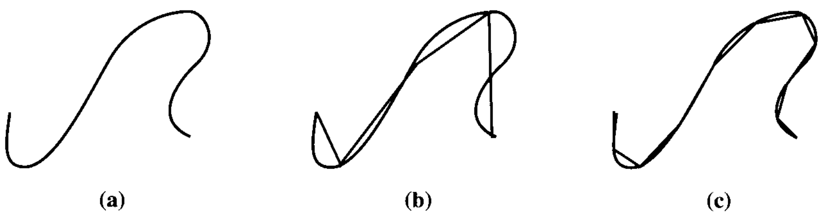


Fig. 5

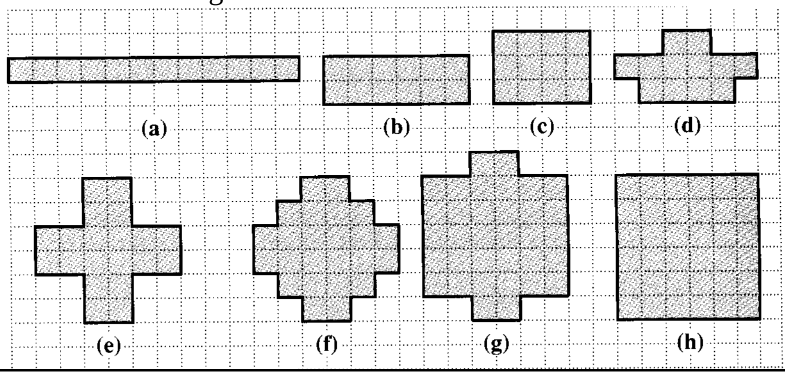
Si se trata de un objeto físico con bordes curvilineos cuya longitud se desea medir podemos ajustar un hilo y después extenderlo longitudinalmente para su medición con una regla.

Perímetro

La longitud de una curva cerrada plana se dice que es el *perímetro* de dicha curva. Puesto que es una longitud se medirá en unidades de longitud (centrímetros, metros, etc.). Es importante no confundir el perímetro con el área de una región limitada por una curva cerrada simple. El área es una magnitud que expresa el tamaño de una región y se mide en cm^2, m^2, etc.

Ejercicio:

7. Las siguientes figuras se han dibujado sobre una cuadrícula cuyo lado mide 1cm. Determinar el perímetro y el área de cada figura:



Longitud de la circunferencia

Como sabemos la circunferencia es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo O una cierta distancia constante r. La medida directa de la longitud del borde de un objeto circular se puede obtener, de manera aproximada, rodeando el cuerpo con un hilo o cuerda de manera ajustada, extendiendo el hilo sobre una regla graduada y leyendo la longitud correspondiente del hilo extendido. ¿Es posible determinar la longitud de una circunferencia sin necesidad de hacer la operación física descrita? La respuesta es afirmativa debido a que existe una relación constante entre la longitud de cualquier ircunferencia y su diámetro: la razón o cociente entre dichas longitudes es el número irracional π (3'1415927....). Podriamos hacer comprobaciones experimentales de esta relación midiendo con una cinta o hilo el borde circular de diversos objetos y dividiendo esa longitud por los diámetros correspondientes. Si C representa la longitud de la circunferencia y d la longitud del diámetro se tiene: $C = \pi d$ (o también, $C = 2\pi r$, si r es la medida del radio).

En 1761 John Lambert probó que π es un número irracional, de manera que es imposible expresar su valor mediante una fracción o un decimal exacto o periódico. En la práctica se suele usar como aproximación 3'14, o 3'1416.

Longitud de un arco de circunferencia

Para calcular la longitud de un arco de circunferencia necesitamos conocer qué fracción es de la circunferencia completa. Conocida la amplitud del ángulo central correspondiente a ese arco, por ejemplo *n* grados, la longitud A del arco será:

$$A = 2\ \pi\ r.\ n\ /360;$$

El área de un círculo

El área de un círculo de radio *r* viene dado por la fórmula, $A = \pi r^2$, fórmula probada por primera vez de manera rigurosa por Arquímedes. Una manera informal, aunque convincente de obtener la fórmula $A = \pi r^2$ se muestra en la figura 6. El círculo de radio r y circunferencia $C = 2pr$ se descompone en sectores congruentes y se disponen para formar un "paralelogramo" de base $\frac{1}{2}C = pr$ y altura *r*. El paralelogramo "ondulado" tendrá como área $p\ r.r = pr^2$. Si el número de sectores se hace cada vez mayor, los sectores serán progresivamente más delgados y el desarrollo se aproximará cuanto se quiera a un verdadero paralelogramo de área pr^2.

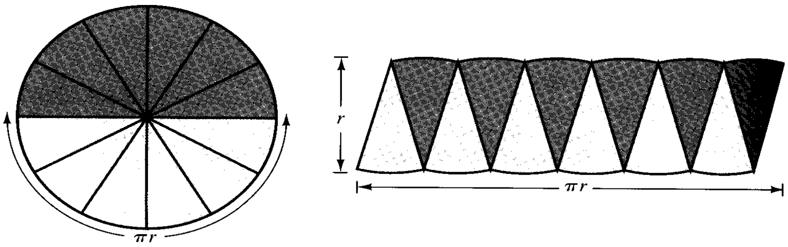


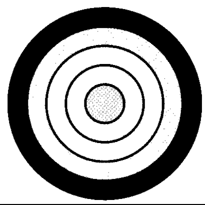
Fig. 6

Ejercicios:

8. Encuentra una fórmula que permita calcular el área de un sector circular de radio r y cuyo ángulo central sea de n grados.

9. Una pizza de 30 cm de diámetro tiene el mismo espesor que otra de 50 cm. Suponiendo que la cantidad de ingredientes de las pizzas es proporcional a sus áreas, ¿cuántos ingredientes de más tiene la pizza grande respecto de la pequeña?

10. Una diana para lanzar dardos está formada por cuatro anillos concéntricos como se muestra en la figura. Los radios de los círculos son 10, 20, 30, 40, y 50 cm. Supongamos que al lanzar un dardo existe la misma probabilidad de que caiga en cualquier punto de la diana. ¿Es más probable que el dardo caiga en el anillo exterior o dentro de la región formada por el círculo central y los dos anillos concéntricos más próximos que le rodean?



4. ÁREA DE SUPERFICIES DE CUERPOS GEOMÉTRICOS

El área de la superficie de un poliedro será la suma de las áreas de las caras. Con frecuencia es útil imaginar que se cortan las caras y se disponen sobre un plano. De esta manera, en muchos casos, la figura formada (desarrollo de las caras del poliedro) tiene un área que se puede calcular fácilmente. Esta técnica se puede aplicar a otras figuras distintas de los poliedros. A título de ejemplo veamos cómo calcular el área total de la caja de forma estrellada de la figura 7.

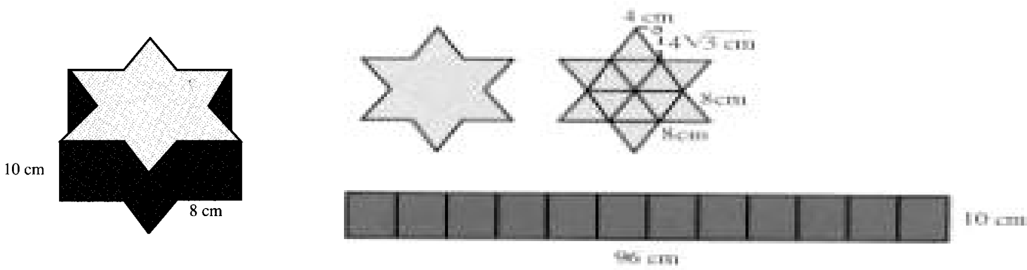


Fig. 7

El desarrollo de la superficie lateral da lugar a un rectángulo de base 96 cm y altura 10 cm, mientras que las bases de la caja son dos polígonos estrellados que se pueden descomponer en 12 triángulos equiláteros iguales. El teorema de Pitágoras permite calcular la altura de dichos triángulos, resultando $\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 4\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$ cm^2. Haciendo cálculos el área total de la caja será de 1625 cm^2.

Ejercicios:
11. Encuentra una fórmula que permita calcular el área total de una pirámide regular recta de base hexagonal de lado l y de altura a.

12. Encuentra una fórmula que permita calcular el área total de un cilindro recto de altura a y cuyas bases tienen de radio r.

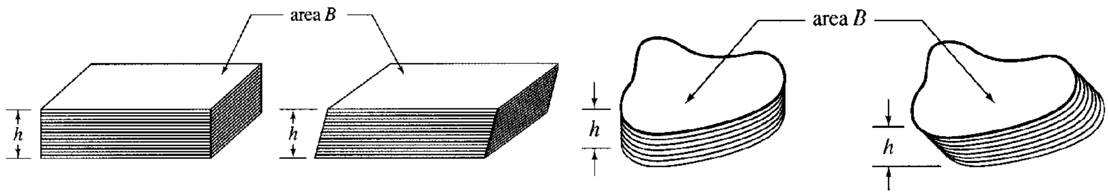
13. Encuentra una fórmula que permita calcular el área de la superficie total de un cono circular recto de radio r y altura a.

5. VOLÚMENES DE CUERPOS GEOMÉTRICOS

5.1. Volúmenes del prisma y del cilindro

El volumen del prisma recto y del cilindro recto se calcula multiplicando al área de la base, B, por la longitud de la altura, a: V = B.a. La base B corresponderá al área de un polígono o un círculo, respectivamente.

Si el prisma o el cilindro es oblicuo la fórmula V = B.a sigue siendo válida. Podemos imaginar que el cuerpo está formado por láminas de la misma forma que la base apiladas formando una columna de altura a. Es claro que si esa columna se inclina o tuerce el volumen continúa siendo el mismo.



6.2. Volúmenes de pirámides y conos

En el plano sabemos que la diagonal de un cuadrado lo divide en dos triángulos rectángulos iguales. Por tanto, el área de cada triángulo será la mitad que la del cuadrado correspondiente. En el espacio las diagonales que parten de un vértice de un cubo forman las aristas de tres pirámides congruentes que llenan al cubo. Por tanto, el volumen de cada pirámide es la tercera parte del volumen del cubo correspondiente (véase la figura 8).

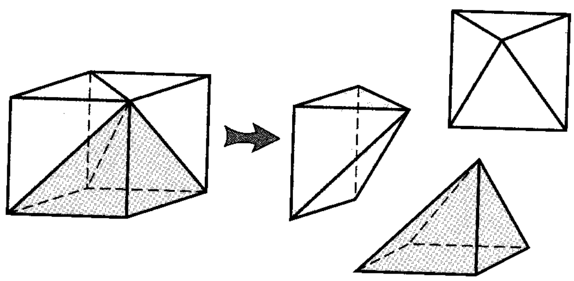


Fig. 8

Si en lugar de un cubo tomamos un sólido rectangular y usamos las diagonales trazadas desde un vértice, el sólido se descompone en tres pirámides. En general las tres pirámides no son congruentes unas con otras, pero se puede demostrar que los volúmenes de las tres pirámides son iguales. Por tanto, si el prisma tiene de base B y altura a, deducimos que el volumen de cada pirámide es $V = \frac{1}{3} B \cdot a$. Con igual razonamiento se prueba que el volumen de todas las pirámides de base B y altura a se puede calcular con dicha fórmula. La base puede ser cualquier polígono y el vértice puede estar en cualquier punto situado a la distncia *a* del plano de la base.

La base de un cono se puede aproximar con la precisión que se desee por un polígono con suficiente número de lados, por lo que el volumen de un cono cuya base es B y la altura *a* vendrá dado también por la fórmula, $V = \frac{1}{3} B \cdot a$

5.3. Volumen de la esfera

Supongamos que una esfera de radio *r* se introduce en el interior de un cilindro circular recto de altura 2*r* conteniéndola, por tanto, de manera ajustada y que llenamos todo el espacio no ocupado por la esfera con agua. Si a continuación sacamos la esfera podemos comprobar experimentalmente que el agua llena la tercera parte del cilindro. Puesto que el volumen del cilindro es B.*a* = (πr^2) (2r) = $2\pi r^3$, el experimento sugiere que el volumen de la esfera de radio r será los dos tercios restantes, esto es,

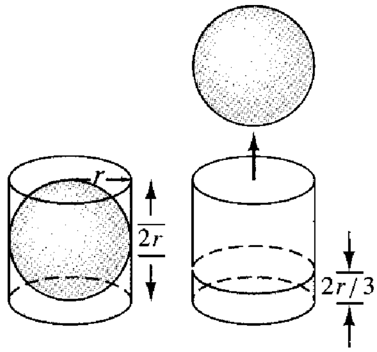


Fig. 9

$$V = \frac{2}{3}(2\pi r^3) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

La primera demostración rigurosa de esta fórmula fue dada por Arquímedes.

5.4. Área de la superficie de la esfera

La fórmula que permite calcular el área de la superficie de una esfera se puede obtener con el siguiente razonamiento intuitivo. Supongamos que la superficie de la esfera se descompone en una gran cantidad de pequeñas regiones de área B_1, B_2, B_3, ..., B_n. La suma de estas áreas $B_1 + B_2 + B_3 + ... + B_n$ será el área superficial, S, de la esfera. Cada una de estas regiones se puede considerar como la "base" de un sólido piramidal cuyo vértice está en el centro de la esfera. Cada "pirámide" tiene una altura *r*, de manera que sus volúmenes serán $(1/3)B_1r$, $(1/3)B_2r$, etc.

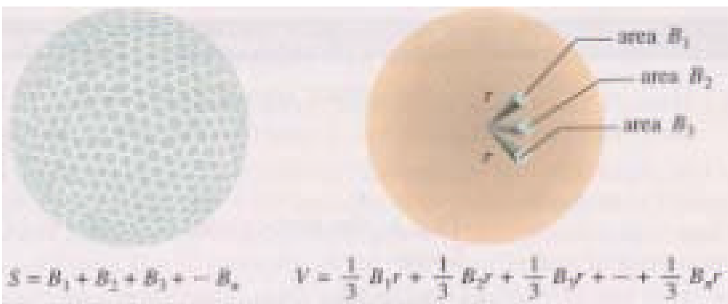


Fig. 10

En esta situación se verifican las siguientes relaciones:

$S = B_1 + B_2 + B_3 + ... + B_n$ (área de las superficie de la esfera)

$V = \frac{1}{3}B_1 r + \frac{1}{3}B_2 r + \frac{1}{3}B_3 r + ... + \frac{1}{3}B_n r$ (Volumen de la esfera)

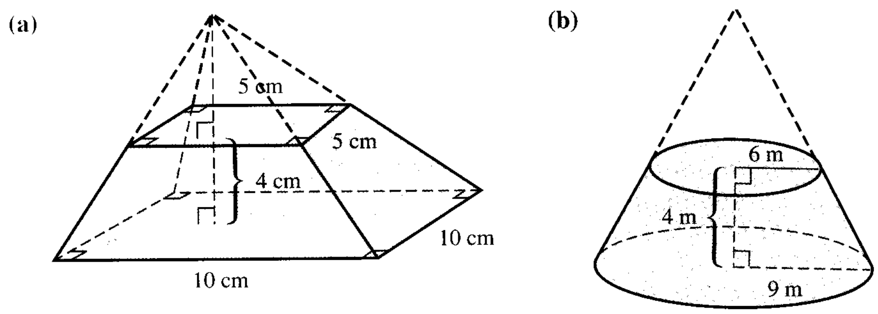
Por tanto,

$$V = \frac{r}{3}(B_1 + B_2 + B_3 + ... + B_n) = \frac{r}{3}S$$

Puesto que $V = \frac{4}{3} r^3$, sustituyendo y despejando obtenemos la expresión buscada para el área de la esfera, S = 4πr^2.

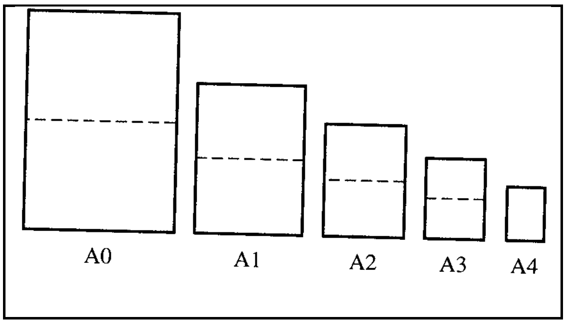
Ejercicios:

14. Un tronco de pirámide (o de un cono) se obtiene cortando el cuerpo por un plano paralelo a la base y suprimiendo la pirámide (o el cono) que se obtiene. Encontrar los volúmenes de los troncos de pirámide y de cono siguientes:



15. El diámetro de Júpiter es 11 veces mayor que el diámetro de la Tierra. a) ¿Cuántas veces es mayor el área de la superficie de Júpiter?; b) ¿Cuántas veces es mayor el volumen?

6. TALLER DE MATEMÁTICAS

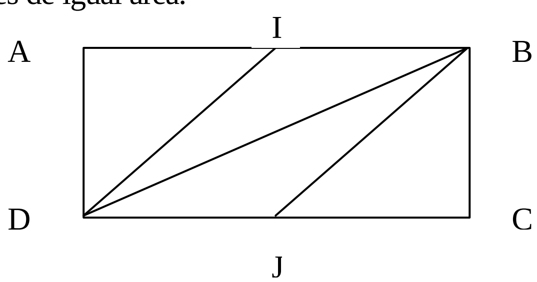


1. En muchos países el tamaño y la forma de las hojas de papel se fabrican con dimensiones basadas en el sistema métrico. Un hoja A0 es un rectángulo de 1m^2 de área. Cuando se divide en dos mitades según su ancho se forman dos hojas A1, de tal manera que cada mitad es semejante a la hoja A0. Cortando de manera similar las hojas A1 se obtienen las A2, y así sucesivamente.

a) ¿Cuál es el factor de escala por el que la dimensión lineal de una hoja A0 se multiplica para obtener las dimensiones correspondientes de una hoja A1?
b) Encontrar el ancho y largo, en centímetros, de una hoja A0.
c) Encontrar el ancho y largo de una hoja A4.

2. Se quiere dividir un rectángulo en cuatro partes de igual área.

a) Justificar que la partición indicada en la figura adjunta cumple la condición.
b) Proponer otras cuatro formas de hacer la partición.



3.

a) Trazar un cuadrado de 10 cm de lado. En el interior de este cuadrado trazar los cuatro semicírculos centrados sobre las mitades de los lados y que pasan por el centro del cuadrado (que será el punto de intersección de las diagonales el cuadrado). El interior del cuadrado queda dividido en 8 superficies disjuntas. Rayar las que sean convexas.

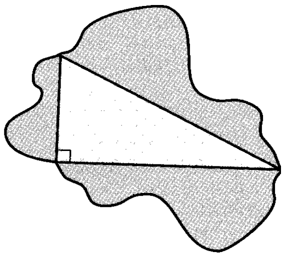
b) Trazar los ejes de simetría de la figura obtenida y calcular el área total de la figura rayada.

4. Un trapecio ABCD es rectángulo en A y D. Elegida una unidad de longitud se supone que AB = 30 y DC = 55. ¿En qué posición se debe tomar un punto E del segmento CD para que la recta BE divida al trapecio en dos polígonos de igual área?

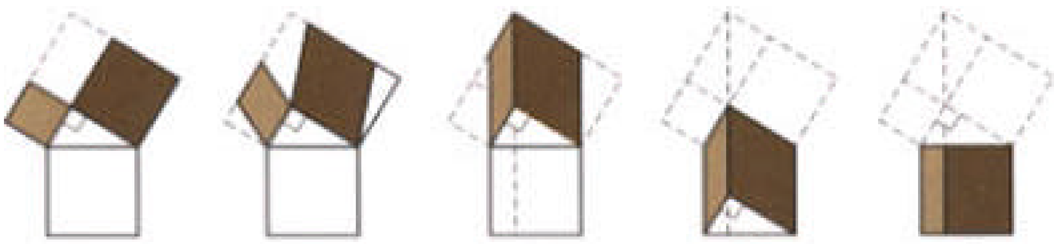
5. Enrollando una hoja de papel de formato DIN A4 (21 x 29'7 cm) se pueden obtener dos cilindros: uno de altura 21 cm y el otro de altura 29'7 cm. Comparar los volúmenes de estos cilindros

6. Arquímedes demostró que el volumen de una esfera es los dos tercios del volumen del cilindro circular recto que contiene a la esfera (de manera ajustada). Demostrar que el área de la esfera es también los dos tercios del área de la superficie total del cilindro.

7. Supongamos que se construyen figuras semejantes sobre los tres lados de un triángulo rectángulo, como se muestra en la figura adjunta. ¿Qué fórmula relaciona las áreas de las tres figuras? Explica con detalle tu razonamiento.



8. Justificar por qué las regiones sombreadas (que son todas paralelogramos) de la secuencia de diagramas de la figura adjunta tienen todas la misma área. Esto proporciona una demostración dinámica del teorema de Pitágoras.



9. Se preguntó a un alumno que encontrara una fórmula para calcular el área de un círculo. Sugirió poner una cuerda alrededor del círculo y después formar con la cuerda un cuadrado. Por ejemplo, un círculo con una circunferencia de 8 unidades se puede transformar en un cuadrado de lado 2 unidades.

a) Si c = la longitud la circunferencia y l = lado del cuadrado, escribe una fórmula para l en función de c.
b) ¿Cuál sería la formula para calcular el área del círculo que se deduciría si fuera correcto el método propuesto por el alumno?
c) ¿Es correcta la fórmula? ¿Por qué no?

10. Si a un hilo que rodea la Tierra se le da una holgura de 1 metro, ¿cuál es la separación que habrá entre la superficie de la Tierra y el hilo?

11. Identificación de situaciones de medida y referentes sobre superficies:
- Citar distintas situaciones y buscar el referente más adecuado para comparar cantidades de superficie.
- Citar las unidades no estándares más utilizadas en distintos contextos (casa, colegio,...) para la medida de superficies.
- Hacer una lista de unidades de superficie y objetos a medir y relacionar cada objeto con la unidad más adecuada.
- Citar tres situaciones de medida de superficies y decir cual es el error máximo admisible.
- Citar varios instrumentos de medida de superficies.
- Estimar medidas extremas o especiales de longitud (medida y distribución de un piso, la superficie terrestre, etc.).

12. Identificación de situaciones de medida y referentes sobre amplitudes angulares:
- Citar distintas situaciones y buscar el referente más adecuado para comparar cantidades de amplitud angular.
- Citar las unidades más utilizadas en distintos contextos (casa, colegio,...) para la medida de amplitudes.
- Hacer una lista de unidades de amplitud y objetos a medir y relacionar cada objeto con la unidad más adecuada.
- Citar tres situaciones de medida de amplitudes y decir cual es el error máximo admisible.
- Citar varios instrumentos de medida de amplitud.
- Estimar medidas extremas o especiales de amplitudes angulares (ángulos de un grado de amplitud, ángulos superiores a 360º, etc.).
- Describir el uso de la amplitud angular como medida indirecta de otras magnitudes (peso, intensidad de la corriente, etc.)

13. Identificación de situaciones de medida y referentes sobre volumen:
- Citar distintas situaciones y buscar el referente más adecuado para comparar cantidades de volumen.
- Citar las unidades no estándar más utilizadas en distintos contextos (casa, colegio,...) para la medida de volúmenes.
- Hacer una lista de unidades de volumen y volúmenes a medir y relacionar cada uno con la unidad más adecuada.
- Citar tres situaciones de medida de volúmenes y decir cual es el error máximo admisible.
- Citar varios instrumentos de medida de volumen.
- Estimar medidas extremas o especiales de volumen (volumen de agua contenida en una piscina, maletero de un coche, etc.).

C: Conocimientos Didácticos

1. ORIENTACIONES CURRICULARES

El desarrollo de fórmulas para calcular la medida de magnitudes geométricas de manera indirecta es de gran utilidad práctica, ya que la medida directa de tales magnitudes será difícil o imposible de realizar en la mayor parte de los casos. Por ejemplo, es fácil medir las tres dimensiones de una caja con una regla, pero no es fácil medir el volumen de la caja de manera directa. Además el proceso de búsqueda de las expresiones correspondientes es una actividad matemática de gran valor en sí misma al requerir relacionar distintos conceptos y técnicas. Por este motivo la obtención y uso de fórmulas para la medida de longitudes, áreas y volúmenes de figuras y cuerpos geométricos se incluye en las propuestas curriculares, incluso desde el nivel de primaria.

Es recomendable que los niños no usen nunca las fórmulas sin que hayan participado en el desarrollo de dichas fórmulas. El desarrollo de las fórmulas por los propios niños es una actividad mucho más importante y significativa que la introducción de números en tales fórmulas. Pero en cualquier caso los alumnos deben comprender previamente el rasgo o característica de los objetos cuyo tamaño se mide mediante las fórmulas (longitudes, perímetros, áreas y volúmenes).

1.1. Diseño Curricular Base del MEC

En el bloque temático sobre la medida (información cuantitativa sobre los objetos) el DCB incluye las siguientes referencias a las magnitudes geométricas.

Hechos, conceptos y principios

2. El perímetro, el área y el volumen de las figuras como expresiones cuantitativas de su tamaño.

3. Las unidades de medida del Sistema Métrico Decimal.
   • Longitud.
   • Superficie.
   • Capacidad.

6. La unidad de medida para la medición de ángulos: el grado.

Procedimientos

2. Construcción de instrumentos sencillos para efectuar mediciones directas de longitudes, superficies y capacidades.
3. Elaboración y utilización de estrategias personales para llevar a cabo mediciones de perímetros, áreas y volúmenes de cuerpos geométricos, de manera exacta y aproximada.
6. Transformación, comparación y equivalencias de las unidades de medida utilizando los algoritmos de cálculo correspondientes.
7. Utilización de los algoritmos para calcular áreas de rectángulos y triángulos.

Remitimos al lector a la sección de Orientaciones Curriculares del tema correspondiente a Magnitudes y Medida para tener una visión completa del currículo propuesto para el bloque temático de la medida, incluyendo los aspectos generales sobre la medición, la mención a otras magnitudes como el peso y el tiempo, así como sobre los contenidos actitudinales.

1.2. Principios y Estándares para la Matemática Escolar (NCTM 2000)[1]

En los Principios y Estándares 2000 se incluye de manera explícita en el primer ciclo el estudio de las magnitudes geométricas *longitud*, *área* y *volumen*, aplicándoles los procesos de,

Comprender los atributos medibles de los objetos y las unidades, sistemas y procesos de medición:

- comprendiendo cómo medir usando unidades no estándar y estándar;
- seleccionando la herramienta y unidad apropiada para medir el atributo que se desea medir.

Aplicar técnicas apropiadas y herramientas para realizar mediciones, realizado las siguientes actividades:

- medir usando colecciones de objetos de igual tamaño, como clips puestos correlativamente;
- medir un objeto usando como unidad otro de menor tamaño, como la longitud de una habitación usando un metro;
- usar herramientas de medir,
- desarrollar referentes comunes de medida para hacer comparaciones y estimaciones.

Estos mismos objetivos se desarrollan en los niveles 3 a 5, ampliados a la amplitud angular, en la forma siguiente:

Comprender los atributos medibles de los objetos y las unidades, sistemas y procesos de medición:

- comprender atributos de longitud, área, peso, volumen y amplitud angular y seleccionar el tipo apropiado de unidad para medirlos;
- comprender la necesidad de medir con unidades estándares y familiarizarse con el sistema métrico.
- hacer conversiones entre unidades, como pasar centímetros a metros;
- comprender que las mediciones son aproximadas y cómo afecta a la precisión el cambio de unidades;
- explorar lo que sucede a las medidas de una figura bidimensional como el perímetro y el área cuando se cambia la forma de algún modo.

Aplicar técnicas apropiadas y herramientas para realizar mediciones:

- desarrollar estrategias de estimación de perímetros, áreas y volúmenes de formas irregulares;
- seleccionar y aplicar las unidades estándares y los instrumentos de medida de longitud, área, volumen, peso, tiempo, temperatura y amplitud angular;
- seleccionar y usar patrones de comparación para estimar medidas;
- desarrollar, comprender y usar fórmulas para encontrar el área de rectángulos, triángulos y paralelogramos;
- desarrollar estrategias para determinar áreas superficiales y volúmenes de sólidos rectangulares.

[1] National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, Va: NCTM.

Ejercicio:
1.Analizar las diferencias y semejanzas de las orientaciones curriculares propuestas para el estudio de la medida en,
- Diseño Curricular Base del MEC
- Las orientaciones curriculares de tu Comunidad Autónoma
- Principios y Estándares 2000 del NCTM.

2. DESARROLLO COGNITIVO Y PROGRESIÓN EN EL APRENDIZAJE

2.1. Conservación del área

El principio de conservación tiene que ver con la invariancia de una cierta cualidad, en un determinado objeto, cuando se realizan determinadas transformaciones sobre dicho objeto.

En lo que se refiere a la superficie, es el convencimiento de que, por ejemplo, si cortamos un folio en varios trozos la cantidad de papel no ha cambiado. La justificación, de que no ha cambiado, podemos encontrarla en el hecho de que si junto los trozos vuelvo a tener el folio inicial; por esta razón vemos que los conceptos de conservación y reversibilidad guardan entre sí una estrecha relación y que, en cierta forma, se justifican entre si.

Según Piaget pueden considerarse varias etapas:

- En el primer estadio, hasta los cinco años, no han desarrollado esa capacidad en el ejemplo del folio y dicen que hay más papel en los trozos.
- En el segundo estadio, entre los cinco y los seis años, hay respuestas diversas.
- Hacia los siete años, tercer estadio, es cuando los niños perciben la equivalencia y alcanza, por tanto, el principio de conservación de la superficie.

El hecho de establecer una fuerte relación, a veces casi de tipo biunívoco, entre área y perímetro, en el sentido de que si una cambia la otra también lo hace necesariamente, en el mismo sentido y en la misma proporción, es lo que en un momento dado puede facilitar o entorpecer la adquisición de la conservación de una u otra magnitud. Quizás este hecho pueda explicar, al menos en parte, la existencia de un cierto paralelismo, según Piaget, entre la adquisición del principio de conservación de la longitud y el de conservación del área.

A partir de ese momento, en que tiene sentido para el niño la equivalencia de superficies sometidas a ciertas transformaciones, pueden descomponerse y recomponerse de diferentes maneras las distintas figuras geométricas tanto para trabajar y desarrollar el concepto de medida como para, por ejemplo, la obtención de las fórmulas del área de las distintas figuras y es fundamental para calcular el área de figuras irregulares.

Actividades 1:

1. Se les da a los niños dos cartulinas iguales de un determinado color; se les da una serie de fichas de un color diferente y se les dice que coloquen el mismo número de estas fichas en cada una de las cartulinas y se les pide que digan donde hay más cartulina visible. Una variante de esta actividad sería utilizando fichas de tamaños muy dispares y colocar un número diferente de fichas en cada cartulina.

2. Dadas dos cartulinas iguales, a una de ellas se le corta un trozo que se le adjunta en un lugar distinto al que tenía y se pide al niño que diga cual tiene mayor superficie. Admite variantes en cuanto al número de trozos que se cortan y al lugar en que se añaden.

2.2. Conservación del volumen

Tenemos que citar el ya clásico experimento, llevado a cabo por Piaget, en el que trasvasa líquidos de un recipiente a otro que tiene diferente forma, para concluir que habrá que esperar a los siete u ocho años para que el niño reconozca que hay la misma cantidad de líquido, independientemente de la forma que tenga el recipiente o de la altura que alcance en cada uno de ellos.

Hay otros autores que, no planteando diferencias apreciables en lo esencial, hacen consideraciones complementarias. Lovell y Ogilvie encontraron que, para muchos alumnos de primaria, el volumen de un cuerpo está relacionado con su peso. Freudenthal insiste en que habría que hacer más énfasis en las distintas transformaciones que dejan invariante el volumen. Son numerosos los autores que relacionan la tardía adquisición de la conservación del volumen, por parte del niño, con la escasez de experiencias que sobre esta magnitud se desarrollan en la escuela.

Actividades 2:

1. Se presentan al niño dos recipientes con forma diferente, uno de ellos contiene una cierta cantidad de líquido y el otro está vacío; se le pide que vierta el líquido de un recipiente en el otro y que diga si había más líquido antes o ahora. Una variante sería dar al niño dos vasos iguales llenos de agua, decirle que vacíe uno en cada uno de los dos recipientes antes descritos y se le pide que digan en cuál de ellos hay más agua.

2. Se presentan dos recipientes de diferente forma o tamaño, uno de ellos contiene una cierta cantidad de líquido, y se le pide al niño que diga el nivel que alcanzará ese líquido en el otro recipiente.

3. Dado un recipiente, y varios montoncitos de arena, se le pide al niño que diga cuál de ellos fue el resultado de vaciar dicho recipiente.

Otras actividades interesantes pueden ser las de empaquetado y, por ejemplo, el uso de pequeños bloques cúbicos para construir estructuras más complejas.

3. SITUACIONES Y RECURSOS

Al igual que en el tema anterior sugerimos actividades de percepción, comparación y medición para las magnitudes geométricas estudiadas. La medida directa de longitudes ha sido incluida en el capítulo 1.

3.1. Amplitud angular y su medida directa

La necesidad de la magnitud amplitud angular es más evidente en los niveles superiores. Excepto para leer la hora, pocas medidas angulares se encuentran en los niveles inferiores.

La percepción y comparación están estrechamente relacionadas en todas las primeras fases de la medida de ángulos. Puesto que esperamos que la comparación de ángulos sea hecha en niveles superiores, podemos tratar con ambas, percepción y comparación al mismo tiempo. Cuando se les dé tareas simples de medición de ángulos preguntarles a los niños sobre el orden, de mayor a menor. Preguntarles que estimen formas, comprobando con el transportador y repita el proceso para desarrollar un sentido de comparación de la medida angular.

Listamos a continuación algunas actividades simples para introducir la percepción y medida de ángulos[2].

Actividades 3: Percepción y medida de ángulos

1. Los niños que pueden leer la hora y tienen algún conocimiento de las fracciones pueden usar la esfera del reloj para una introducción a los ángulos. Proporcione a la clase varias hojas representando esferas de reloj, con la única indicación de los números. Pida a la clase que tracen una línea desde el centro de uno de los relojes a la posición de las 12. Trazar a continuación una segunda marca sobre la misma esfera indicando la posición de la aguja grande si debe apuntar a las 6 horas. "Si la aguja grande se mueve desde las 12 hasta las 6, qué fracción del recorrido total ha realizado?" ¿"Qué forma geométrica se representa por la primera y la última posición de la manecilla grande? Repita el procedimiento con la posición inicial en las 12 y la final en las 3. "¿Qué figura geométrica forman las dos posiciones? (ángulo recto, "esquina"). "Si consideramos un giro alrededor de la esfera como una vuelta, ¿qué fracción de una vuelta recorre la aguja grande cuando se traslada desde las 12 a las 3? Pruebe otras posiciones y otros ángulos. Pida a los niños que hagan un registro de todos las posiciones iniciales y finales para que el ángulo formado sea recto. Adapte las preguntas y materiales a una actividad colectiva o a un ejercicio que puede ser hecho individualmente.

2. Use un simple ejercicio sobre cómo medir ángulos con un transportador para desarrollar la percepción de la medida angular. (Esta lección también sirve para otros objetivos y se adapta mejor a los niveles superiores). Muestre a los niños cómo medir algunos ejemplos repetidos de varios ángulos desde 0 a 180 grados con el transportador. Un transportador grande para usar en la pizarra puede clarificar esta actividad.

3. Haga que los niños midan ángulos de varias figuras planas para refinar su percepción (y comparación) de varias medidas angulares. Dé a los niños un conjunto de triángulos y pídales que midan los ángulos de los distintos triángulos. Registre las medidas para cada uno." ¿Cuál es la suma de los ángulos en cada triángulo? ¿Hay alguna ley general? ¿Cuáles son las medidas de los ángulos de un rectángulo? ¿de un cuadrilátero? ¿de un pentágono?

3.2. El área y su medida directa

La percepción del área se puede desarrollar a partir de la idea primitiva del recubrimiento de objetos. El área es un medio conveniente para comunicar cuánta superficie plana puede ser cubierta. Puede ser ampliada para recubrir recintos no planos. Comparar áreas es complicado porque los datos que directamente se observan son engañosos. Como adultos, nosotros podemos mirar un triángulo, un círculo y un cuadrado y no estar seguros si tienen distinta o igual área. Podemos hacer estas formas con la misma extensión y aparentar, no obstante, un área diferente.

La comparación es muy complicada para el niño porque no tiene aún desarrolladas las estructuras cognitivas necesarias para hacer las comparaciones aún cuando las tareas parezcan simples a un adulto. Las siguientes actividades son ilustrativas y presuponen participación del alumno.

Actividades 4: Percepción de áreas

1. La mayoría de las clases tienen tablones de anuncios o murales que sirven como una excelente ayuda visual. Use estos tableros como superficies para recubrir. "¿Cuánto papel se necesita para recubrir el tablero?" "¿Cuántos trozos de papel coloreado será necesario para el

[2] Inskeep (1976).

contorno?"

2. Dé a los niños algunas formas cerradas planas y una colección de cuadrados, círculos y rectángulos de papel. Pídales que recubran cada forma con las distintas piezas de papel. Registre los resultados, haga que un niño registre la información del grupo o sus propios resultados. Discutan sobre lo que se está haciendo y sobre los resultados. "¿Qué forma trabaja mejor? ¿Por qué?”

3. Dé a los niños cajas cilíndricas o botes y pídales que determinen cuanto papel se necesitará para recubrir las superficies. Esta actividad es particularmente apropiada durante la Navidad o en días que preceden al día de la Madre, fechas en las que pueden hacer pequeños objetos para regalo, tales como lapiceros. El fondo circular del cilindro puede ser también recubierto.

4. Una "imprenta", hecha con una patata, puede servir como otra oportunidad para desarrollar alguna idea sobre el recubrimiento. Corte patatas en mitades y haga que los niños preparen diseños en la superficie cortada rellenándolos de tinta. Pida que experimenten con su imprenta de patata para recubrir completamente un trozo de papel sin que haya solapamientos. Indíqueles que anoten el número de impresiones necesarias para recubrir el papel. Quizás observen que diseños grandes sobre la "imprenta" requieren menos impresiones que los pequeños. Ayude, también, a que el niño observe que una figura que no divide el plano en mosaicos (el disco es un buen ejemplo) deja agujeros que no son cubiertos.

Actividades 5: Comparación de áreas

1. Construir una serie de formas de áreas variadas usando papel cuadriculado. Pedir a los niños que las ordenen de mayor a menor área. Después que las han ordenado, pedirles que cuenten los cuadrados que hay en cada forma y comprobar sus estimaciones. Poniendo la medida en el reverso de cada figura podrá utilizarse esta colección como un módulo utilizable en diversas ocasiones. Comparar formas rectangulares, triangulares, curvas e irregulares para hacer una serie de actividades.

2. Usar el geoplano para desarrollar la comparación de áreas. Dar al niño un conjunto particular de formas y preguntarles cuál es la forma de mayor área. Construir figuras en el geoplano y contar los cuadrados para medir el área.

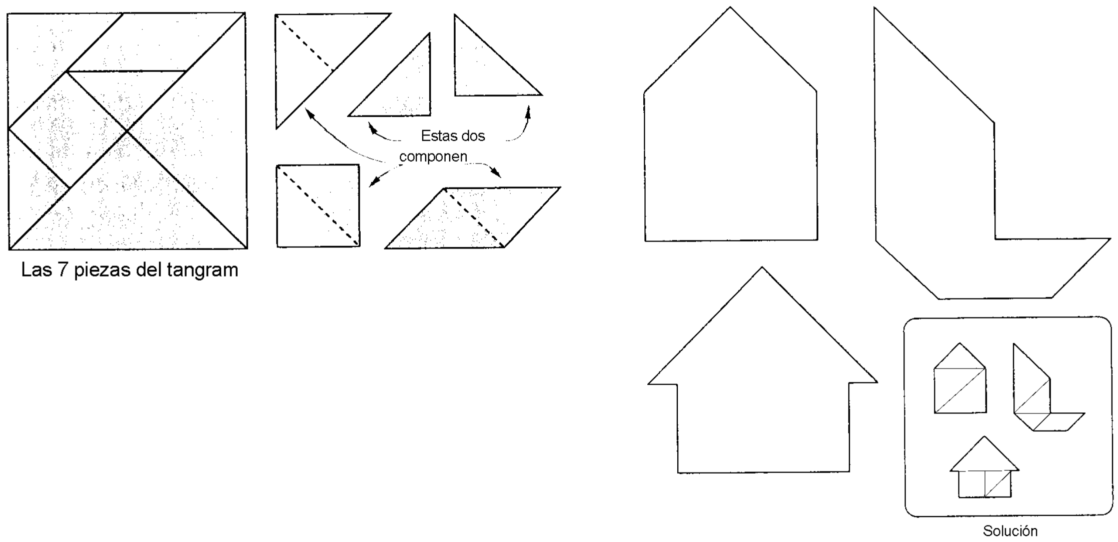
3. Trazar en papel cuadriculado una mano de cada uno de los niños. ¿Qué mano es la de mayor área? Si los niños cuentan los cuadrados terminan observando si su estimación es correcta. Repetir con el pie o con los zapatos

Cuando se comparan dos áreas, la consideración adicional de la forma origina dificultades que no están presentes en el caso de longitudes. La realización de actividades de comparación de áreas tiene como fin que los alumnos discriminen entre el tamaño (área) y la forma, la longitud y otras dimensiones. Un rectángulo muy alargado y estrecho puede tener menos área que un triángulo con lados más pequeños. Esto resulta particularmente difícil para los niños pequeños, como también que el área se conserve cuando las diversas partes de una figura plana se recomponen para formar otra figura diferente.

La comparación directa de dos áreas es casi siempre imposible excepto cuando las formas tienen alguna dimensión o propiedad común. Por ejemplo, dos rectángulos con el mismo ancho se pueden comparar directamente, como también cualquier par de círculos. Pero en estos casos realmente no se comparan las áreas sino la longitud por la que difieren. Los tipos de situación que se requiere diseñar se basarán en la descomposición y recomposición de figuras. Esta idea no es, sin embargo, obvia para los niños pequeños. Las piezas del tangram proporciona buenas oportunidades para investigar los conceptos de tamaño y forma.

Actividad 6:

Dibujar el contorno de varias figuras usando las piezas del tangram, como se indica en la figura adjunta (derecha). Preguntar a los alumnos qué figuras son de mayor, menor o igual área ayudándose de las piezas del tangram. Las figuras se pueden duplicar en cartulina y los niños pueden trabajar en grupos. Hacer que expliquen sus conclusiones.



Uso de unidades para medir áreas

Aunque los cuadrados son las unidades más cómodas para medir las áreas, cualquier tesela o baldosa que rellene convenientemente la región del plano que se desea medir se puede usar. Algunas piezas que se pueden reunir fácilmente en cantidad suficiente para las actividades de medición de áreas son:

- Recortes en papel o cartulina (poster) de cuadrados, triángulos, rectángulos. Para áreas grandes las unidades pueden tener unos 20 cm de lado, mientras que para las más pequeñas pueden construirse de 5 o 10 cm de lado.
- Las hojas de periódico son excelentes unidades para áreas grandes.

Al comienzo, el objetivo de las actividades de medición de áreas será desarrollar la idea de que el área es una *medida del recubrimiento*. No se recomienda introducir el uso de fórmulas en esta primera etapa. Simplemente interesa que los niños recubran las formas y cuenten la cantidad de unidades usadas. Hacer que los alumnos hagan estimaciones del resultado antes de medir, relacionando la precisión con el tamaño de las unidades de igual modo que en el caso de la longitud. Es probable que los distintos grupos lleguen a medidas diferentes para la misma región; discutir estas diferencias con los niños y señalar las dificultades implicadas al hacer estimaciones en las proximidades de los bordes de las figuras.

Actividad 7: Menor o mayor

Presentar una serie de figuras de formas bastante diferentes pero con pequeñas diferencias en las áreas. Los alumnos deben predecir la ordenación de las figuras de la más pequeña a las más

grande y anotar sus predicciones. La tarea a continuación será determinar el orden correcto usando cualquier método y unidades que deseen. La determinación del orden "correcto" se les deja a los alumnos.
La actividad puede dar lugar a interesantes discusiones en clase sobre los distintos métodos.

Actividad 8: Rectángulo de igual tamaño

Proponer a los alumnos construir un rectángulo que tenga el mismo tamaño que otra figura que previamente haya elegido (de forma irregular, un triángulo o incluso otro rectángulo). La actividad se puede realizar con figuras pequeñas que se pueden trazar sobre un papel o muy grandes trazadas sobre el suelo con cintas o tiza. Se recomienda el trabajo en grupos. Dar a todos los grupos la misma figura. Los grupos deben explicar por qué el rectángulo que proponen tiene la misma área que la figura dada; se les debe permitir usar cualquier material que deseen.
La actividad se puede hacer antes de que se les haya introducido las fórmulas para el cálculo de áreas.

Uso de cuadrículas y geoplanos para medir áreas

Las cuadrículas o rejillas de puntos se pueden considerar como "reglas de medir áreas". Una rejilla de cuadrados permite hacer con las áreas lo que una regla ordinaria hace para las longitudes: permite extender adecuadamente las unidades que recubren la superficie que se desea medir (aunque en general de manera aproximada). Cuando los niños comienzan a usar rejillas cuadrangulares para determinar áreas de superficies rectangulares se les pone en situación de descubrir que la cantidad de unidades cuadradas se puede obtener multiplicando el número de cuadrados en una fila por el número de filas.

3.3. Fórmulas para las áreas de polígonos

La búsqueda de las fórmulas que permiten calcular las áreas de las figuras planas elementales puede ser objeto del diseño de situaciones didácticas en las que alumnos tengan oportunidad de resolver problemas matemáticos y establecer relaciones entre distintas contenidos, en este caso, conexiones entre las distintas expresiones que permiten calcular las áreas de los polígonos.

Rectángulos

Usando el geoplano u hojas de papel con retículas cuadrangulares los alumnos, incluso de tercer nivel, pueden descubrir rápidamente que el número de cuadrados que recubren un rectángulo (su área) se puede determinar rápidamente de una manera abreviada: multiplicando las longitudes de la base por la altura, como se sugiere en la siguiente actividad[3].

Actividad 9:

Distribuir a cada niño una colección de cuatro hojas de papel reticulado similar a la figura A y una hoja con el esquema de la tabla de la figura B. En las hojas reticuladas se pide dibujar cuatro rectángulos diferentes que tengan el ancho de una unidad.

[3] Baroody y Coslick (1998).

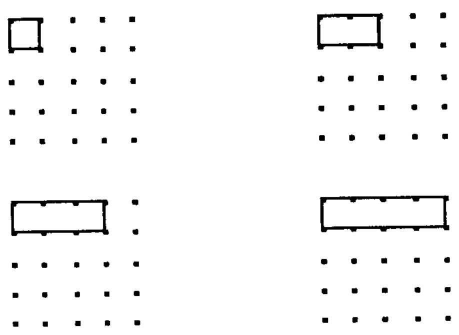


Tabla		
Largo	Ancho	Área
1	1	1
2	1	2
3	1	3
4	1	4
1	2	2
2	2	4
3	2	6
4	2	8
...		

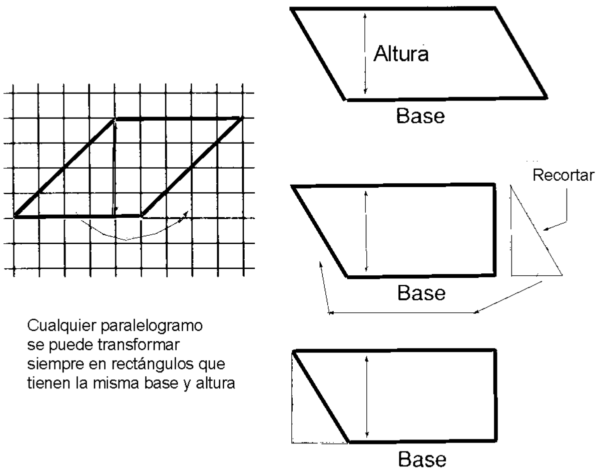
Después de compartir los resultados, preguntar a los niños cuál es el área de un rectángulo de 1x1, 2x1, 3x1, 4x1. Se acuerda en la clase medir el área como el número de cuadrados de 1x1 contenidos en un rectángulo. Resumir los resultados en la tabla. Sobre la segunda hoja de papel reticulado pedir que dibujen cuatro rectángulos diferentes con ancho de 2 unidades. Pedir que encuentren el área de los rectángulos de 1x2, 2x2, 3x2, 4x2. Reflejar los resultados en la tabla. Repetir el proceso para rectángulos de ancho 3, y 4 unidades. En el proceso de reflejar los resultados en la tabla un cierto número de niños reconocerán que el área es el producto del largo por el ancho de los distintos rectángulos dibujados. Proponer nuevos ejemplos de rectángulos y fijar que el cálculo del área de cualquier rectángulo se puede calcular con dicha regla.

Después del trabajo con las cuadrículas o el geoplano será recomendable proponer el cálculo de áreas de rectángulos con dimensiones enteras sin usar la cuadrícula.

- Designar un lado como la base y disponer sobre dicha base unidades cuadradas a lo largo de ese lado. ¿Cuántas filas se pueden poner en rectángulo? Sobre el mismo rectángulo repetir la pregunta usando el otro lado como base.
- Proponer a los alumnos rectángulos indicando sólo las dimensiones. ¿Cómo se puede determinar el número de cuadrados unitarios que llenen este rectángulo? ¿Se puede hacer de dos maneras?
- Proponer finalmente rectángulos con dimensiones no enteras.

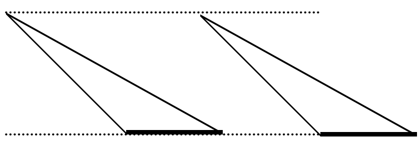
De los rectángulos a los paralelogramos

Una vez que los alumnos comprenden la fórmula de la base por la altura para calcular el área del rectángulo se puede proponer el desafío de determinar el área de los paralelogramos. Interesa lograr que sean los propios alumnos quienes encuentren la fórmula. Proporcionar un rectángulo dibujado sobre una cuadrícula o sobre una hoja en blanco. Su tarea será encontrar una expresión que permita calcular el área de cualquier paralelogramo, no sólo la del rectángulo dado. Pedir que investiguen maneras por las que un paralelogramo se puede transformar en un rectángulo, sin que varíe su área, por lo que la fórmula del área del paralelogramo es la misma que la del rectángulo.



De los paralelogramos a los triángulos

Es importante que los alumnos comprendan la fórmula de los paralelogramos antes de explorar la correspondiente a los triángulos. Con esta base, encontrar la fórmula para el área de los triángulos es relativamente sencillo. Al igual que con los paralelogramos los alumnos deben esforzarse en encontrar una expresión general. Pueden explorar las áreas de triángulos dibujados sobre cuadrículas o geoplanos, de igual modo que con los paralelogramos. Como una ayuda para encontrar la técnica se puede pedir a los alumnos que doblen una cuartilla doblada por la mitad, dibujar un triángulo sobre la hoja después de doblada, y recortar la figura, haciendo de ese modo dos triángulos idénticos. Sugerir que formen una figura cuya área sepan calcular usando los dos triángulos.

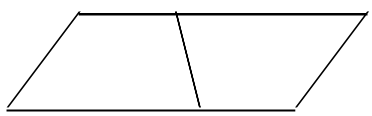


Dos triángulos iguales forman siempre un paralelo- gramo de igual

De los paralelogramos a los trapecios

Hay varios métodos de obtener una fórmula de cálculo de los trapecios relacionadas con las correspondientes a los paralelogramos o rectángulos. Uno de los más sencillos consiste en hacer dos copias iguales de un trapecio y componerlos de manera que se obtiene un paralelogramo. De esta manera resulta la expresión conocida,

$$A = \frac{1}{2}(base1 + base2) \cdot altura$$



Base = base 1 + base 2

3.4. Longitud de la circunferencia

Midiendo con cuidado las circunferencias y el diámetro de distintos objetos circulares (usando para ello una cinta métrica, una cuerda, etc.) y registrando las medidas en una tabla los alumnos pueden descubrir la importante relación entre ambas magnitudes. Estos pueden ser algunos resultados de esas mediciones,

Diámetro	Circunferencia
3 cm	9'5 cm
6 cm	19 cm
10 cm	31 cm
15 cm	47 cm
20 cm	63 cm
...	

Un examen de tales resultados debería llevar a los alumnos a concluir que la longitud de la circunferencia es siempre aproximadamente el triple que el diámetro correspondiente. Se puede requerir a los alumnos para que traten de mejorar de alguna manera las estimaciones haciendo alguna gráfica, o calculando la media aritmética. El valor aproximado variará entre los grupos de alumnos debido a errores en las mediciones, lo que puede ser un contexto rico para discutir los errores de tipo matemático y los que provienen de las acciones físicas; también permite dar sentido a la operación de promediar un conjunto de datos.

3.5. El volumen y su medida directa

La percepción del volumen es paralela a la del área, pero es más difícil de comprender. Experiencias con el volumen se llevarán a cabo tanto con líquidos como con sólidos. Se exponen a continuación algunas de estas actividades.

Uno de los test clásicos para la conservación del volumen de un líquido es llenar de agua dos recipientes de igual volumen (y forma) y cambiar el contenido de uno de ellos a otro de distinta forma. Muchos niños afirman que el volumen ha variado. La inmediata experimentación no convence al niño de que su respuesta es incorrecta, pero la experimentación durante más tiempo ayuda a formar ideas de conservación. Las siguientes actividades ayudan al niño a hacer comparaciones de volumen.

Actividades 10:

1. Para una introducción al volumen, medir líquidos con recipientes no estándares. "¿Cuántas tazas son necesarias para llenar esta botella de plástico? ¿Cómo podemos encontrarlo? Si es conveniente, los niños pueden hacer sus propias mediciones, contando las tazas y anotándolas.

2. Cajas y bloques proporcionan otro elemento para experimentación con el volumen. Las clases de los niveles inferiores usualmente tienen grandes bloques de madera. Puesto que deben almacenarse al final de la jornada o del tiempo de la actividad, pregunte a los niños cuántos cabrán en una caja dada o sobre los estantes donde deban colocarse. Sus respuestas a estas cuestiones aunque no sean ajustadas, sirven como iniciación para el desarrollo de la idea de volumen.

3. Los bloques multibase de Dienes, regletas de Cuisenaire, o similares pueden también ser usados para desarrollar la idea de volumen. "Cuántos cubos llenan este recipiente? ¿Cuántos cubos pequeños serán necesarios para construir un cubo grande? Responder a estas cuestiones y el juego libre asociado a la propia actividad de resolución de problemas del niño sirven para desarrollar la percepción del volumen. Jugar con bloques grandes y pequeños proporciona una oportunidad adicional para formar la idea de capacidad.

Comparación de volúmenes

1. Consiga una botella cilíndrica de plástico transparente con un tapón. En un lateral de la botella pegar una tira de papel para que el niño pueda señalar marcas con un lápiz. Preguntar al niño las siguientes cuestiones, ¿Dónde podemos poner una marca en la botella que indique cuando está medio llena? Marcar el punto donde piensas que esto ocurrirá. Ahora medir el volumen de la botella usando el tapón. ¿Cuántos tapones cabrán en la botella? Llenar la botella con la mitad de esos tapones. ¿Es correcta la estimación cuando la botella está medio llena?

2. Las siguientes actividades están diseñadas como un juego entre dos niños. Obtener un conjunto de 20 cubos, similares a los de Cuisenaire, Dienes, Stern, o bloques corrientes de forma cúbica. En este juego cada niño participa primero y luego actúa como "maestro" del otro. "Toma 3 bloques" ¿Cuántas formas diferentes puedes formar con estos bloques? Dos chicos deberían trabajar juntos para dar sus respuestas. Usa 4 bloques, luego continua con 5 o más. Después, cuando se ha probado con un conjunto de 10 bloques, uno de los dos hace de "maestro". Esa persona hará dos formas diferentes, que no tengan mas de 10 bloques, mientras la otra persona no está mirando. Cuando las dos formas están terminadas, el maestro pregunta al compañero cuál es la más grande. Si el compañero responde correctamente, este ahora hace de maestro y continua el juego. Si responde incorrectamente, el maestro toma otro turno. Cuando el tiempo ha terminado ambos niños cuentan los bloques necesarios para hacer cada una de las dos formas. Si el compañero falla tres veces seguidas en responder el "maestro" gana la partida. A continuación le corresponde al otro hacer la función de "maestro", componer las formas y hacer las preguntas. El profesor puede intentar confundir al compañero haciendo cada forma con el mismo número de bloques, para que el compañero deba decir "ambos son iguales". Variar el juego puntuando las respuestas y hacer que vaya anotando los resultados. Establecer un límite para el número de tiradas.

Actividades 11: Percepción y comparación de la capacidad

Percepción de la capacidad

Está muy relacionada con la percepción del volumen, las experiencias se llevarán a cabo con sólidos, líquidos y gases. Algunas actividades a realizar serán las siguientes:

1. Comprobar cuántos vasos son necesarios para llenar una bolsa con arena, hacer una estimación previa y repetir la experiencia con limaduras de hierro.
2. ¿Cuántos "puñados" de garbanzos hay en un paquete de un kilo?
3. ¿Cuántas canicas caben en un bote de mermelada? Discutir sobre distintas técnicas de estimación.
4. Dar una lista de objetos que sugieran la idea de capacidad.

Comparación

La forma de los objetos, el grosor, e incluso el material del que están fabricados, dan una idea equivocada sobre la capacidad del objeto. Pueden ayudar en este sentido actividades como las siguientes:

1. Buscar recipientes con distinta forma, distinto ancho de la boca, distinto grosor, etc y comparar la capacidad de cada uno de ellos y colocarlos, según su capacidad, de mayor a menor; hacer una estimación previa.
2. Hacer una lista de recipientes usados en casa en las distintas tareas domésticas (alimentación, limpieza, etc.) y clasificarlos según su capacidad.

Volumen y capacidad son términos usados para expresar la medida del "tamaño" de cuerpos o regiones tridimensionales. Las unidades estándares de volumen se expresan en términos de unidades de longitud, como centímetros cúbicos, metros cúbicos, etc. Las unidades de capacidad se aplican generalmente a líquidos o recipientes usados para contener líquidos o materiales sueltos y son el litro, mililitro, etc.

La comprensión de la magnitud volumen (o capacidad) requiere realizar actividades de comparación entre distintos cuerpos y recipientes. Estas comparaciones tienen que hacerse en la mayor parte de los casos de manera indirecta, introduciendo líquidos o materiales sueltos en los recipientes cuyo volumen o capacidad se comparan.

Los niños deben tener muchas experiencias de comparación directa de capacidades de distintos recipientes. Para ello es necesario disponer de una gran variedad de botes, cajas, etc. que pueden ser comparadas introduciendo semillas.

Actividad 12: Clasificación de capacidades

Dar a los niños una colección de recipientes etiquetados, y elegir uno de ellos como patrón de comparación. La tarea de los niños será clasificar la colección según que tengan más, menos o igual volumen (o capacidad) que el patrón. Preparar una hoja de registro como la siguiente. Comprobar las previsiones llenando los recipientes con algún material suelto (arroz, etc.)

	Previsión			Después de la medida		
Recipiente	Más	Menos	Igual	Más	Menos	Igual
Bote 1						
Bote 2						
...						

Actividad 13: Ordenación de capacidades

Dar una serie de cinco o seis recipientes etiquetados de formas y tamaños diferentes; la tarea consiste en ordenarlos de menor a mayor volumen. Los niños trabajarán en grupos y deberán explicar cómo llegan a la solución que proponen.

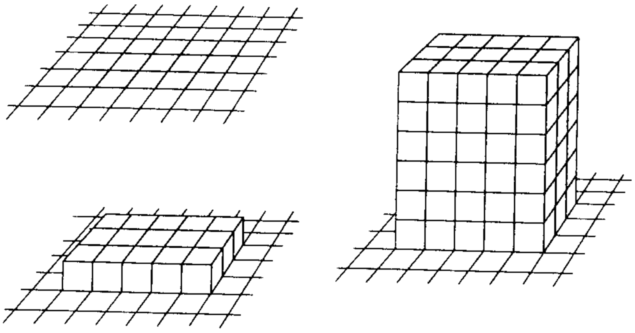
También se puede proponer cuerpos sólidos para comparar según su volumen. Para ello será necesario usar un método de desplazamiento del material suelto o líquido al ser introducidos en un recipiente apropiado y midiendo las variaciones de nivel.

Como unidades no estándar de volumen y capacidad se pueden usar cubos de madera, cucharas, etc.

3.6. Medida indirecta del volumen

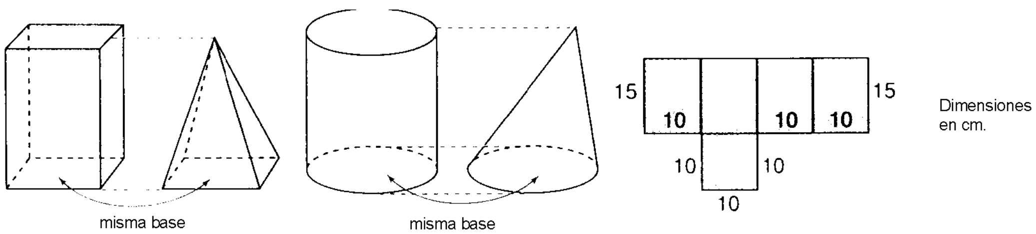
Fórmulas para el cálculo de volúmenes de cilindros

Como sabemos un cilindro es un sólido que tiene dos bases congruentes paralelas y lados paralelos. Como casos particulares de cilindros se incluyen los prismas (cuyas bases son polígonos), prismas rectos, prismas rectangulares y cubos. Es interesante observar que el volumen de todos estos sólidos se obtiene con una fórmula análoga (base por altura) y que es similar a la fórmula para el área de los paralelogramos. Esta expresión pueden deducirla los alumnos usando el material sugerido en la figura adjunta: papel cuadriculado en cm y cubos de plástico o madera de $1cm^3$ (unidades de los bloques multibase, por ejemplo). Sobre el papel cuadriculado se puede trazar un rectángulo de 3x5 =15 cm^2. A continuación se pueden poner capas sucesivas de piezas. El volumen del cuerpo que se forma será el área de la base por el número de capas que se hayan puesto, esto es, por la altura.

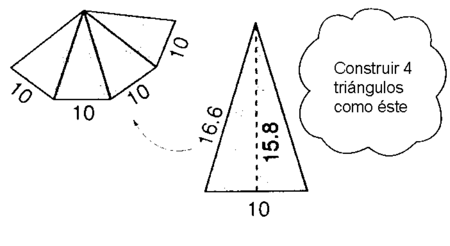


Volúmenes de conos y pirámides

De igual manera que hay una relación sencilla entre las áreas de los paralelogramos y los triángulos, hay una relación similar entre los volúmenes de los cilindros (incluidos los primas) y los conos (incluidas las pirámides). Esta relación es de 3 a 1, o sea, el volumen de un cono es la tercera parte del volumen de un cilindro de igual base y altura. Esta relación pueden encontrarla los alumnos construyendo con cartulina ejemplares de tales cuerpos y llenando el cilindro con semillas de pequeño tamaño (por ejemplo, arroz) usando como medida el cono.



El volumen de una pirámide o un cono es la tercera parte del volumen de un prisma o un cilindro con la misma base y la misma altura.

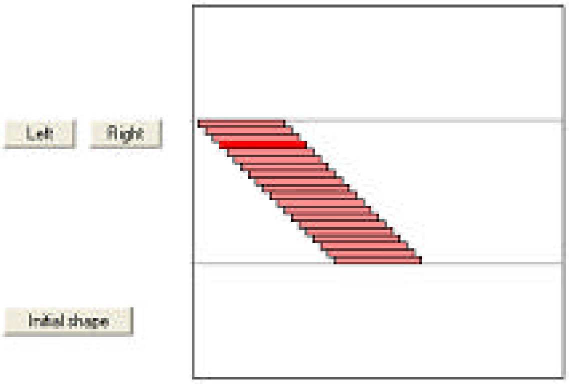


3.7. Recursos en Internet

Conservación del área

http://www.ies.co.jp/math/java/geo/cava/cava.html

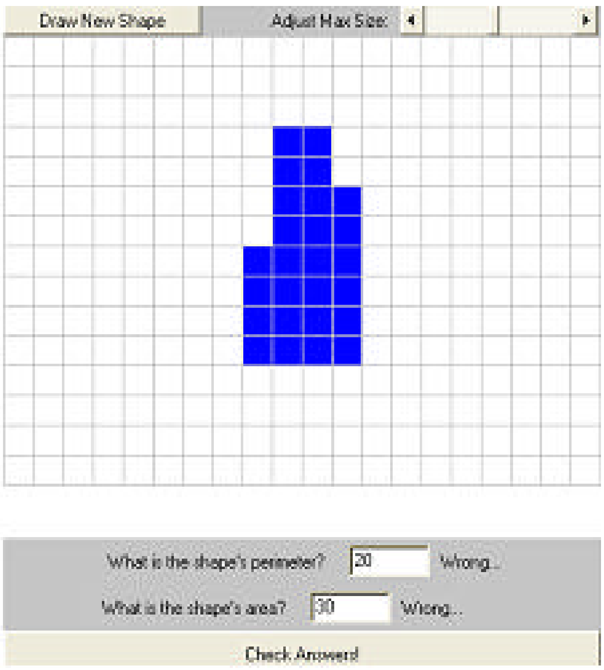
Este programa muestra una colección de rectángulos iguales agrupados de tal manera que forman un rectángulo mayor. La figura se puede transformar desplazando horizontalmente todos los rectángulos pequeños a la izquierda o a la derecha, o sólo algunos de estos rectángulos, permaneciendo constante el área total de la figura completa ya que el área de cada rectángulo estrecho permanece constante (principio de Cavalieri).



Perímetros y áreas (Programa **"**Shape explorer")

http://www.shodor.org/interactivate/activities/perimeter/index.html

El programa muestra una cuadrícula sobre la que se pueden representar figuras planas de diferentes tamaños y formas que se muestran recubiertas de "baldosas" cuadradas. Se pide decir el perímetro y el área de las figuras contando las unidades correspondientes. Una vez dada la respuesta en la casilla correspondiente el programa informa si es o no correcta la solución.

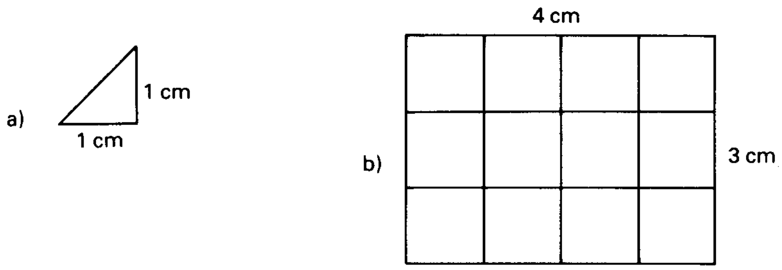


4. CONFLICTOS EN EL APRENDIZAJE. INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN

A continuación incluimos algunos ítemes[4], tomados de distintas investigaciones, que permiten evaluar si el alumno reconoce la conservación de las cantidades de magnitudes geométricas ante ciertas transformaciones.

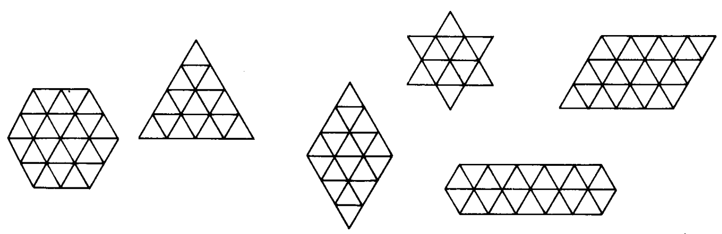
Comparación de áreas como pavimentación de una superficie

1. ¿Cuántos triángulos como el dibujado en a) entrarían en el rectángulo b):



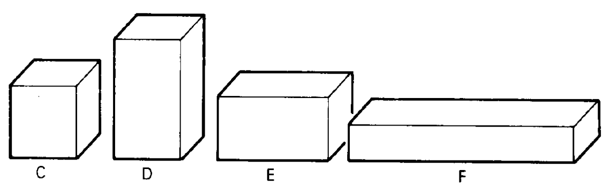
El 70% de los niños de 11 tuvieron éxito en esta pregunta. En cambio el porcentaje de éxito bajó al 57% en la siguiente:

2. Rodea con un círculo cada par de figuras que tengan la misma área:



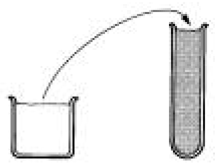
3. Comparación de volumen

Comparar los volúmenes de los siguientes bloques. El 85% de los niños de 12 años es capaz de identificar los bloques de igual volumen.



[4] Dickson, Brown y Gibson (1984),

4. Conservación de volumen



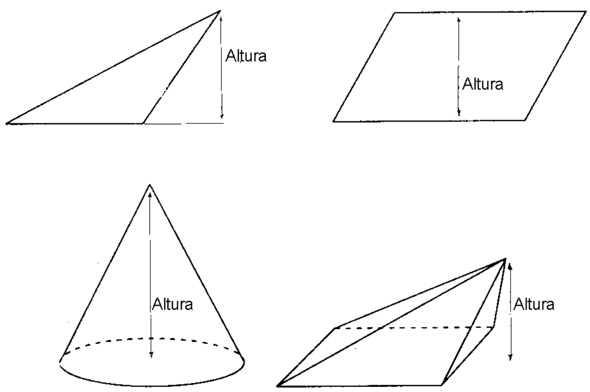
Los niños pequeños relacionan el volumen con la altura e incluso cuando vean trasvasar un líquido entre dos recipientes, piensan que habrá mayor volumen en el más alto.

En cuanto a la medida directa de longitudes usando la regla graduada es frecuente encontrar que los niños no entienden el uso de las marcas para contar el número de centímetros o milímetros que corresponde a una medida. Algunos cuentan las marcas incluyendo la que corresponde al 0, o colocan el comienzo de la regla en el 1, con lo que obtienen una unidad de menos o de más a la que corresponde.

Es posible encontrar alumnos que confunden las unidades en que se expresan los resultados de las medidas o de los cálculos, por ejemplo, dar el área en metros, en lugar de m^2. Así mismo, la proporcionalidad inversa que existe entre el tamaño de la unidad de medida y el resultado de las medidas realizadas con ella, suele ser una dificultad para los escolares; tienen dificultades para entender que si se cambia la unidad por otra mayor la medida de un mismo objeto respecto a esta nueva unidad será menor.

En distintas evaluaciones se han identificado diversas dificultades que tienen los niños con el uso de las fórmulas para medir magnitudes geométricas. En particular se ha encontrado que con frecuencia los alumnos confunden el área con el perímetro. Una explicación de esta dificultad puede ser el haber recibido un énfasis prematuro en el uso de las fórmulas, con poco esfuerzo por desarrollarlas y comprender cómo y por qué funcionan las fórmulas. No es un hecho aislado que si pedimos a los alumnos de 4º nivel que calculen el área de una alfombra de 90 cm de ancho por 150 cm de largo lo que hagan sea sumar ambos números.

Otro error común consiste en no entender el significado de la altura de las figuras geométricas, tanto de dos como de tres dimensiones, hecho que les impide calcular correctamente el área o el volumen de dichas figuras. En las figuras con un lado inclinado los alumnos tienen dificultades para identificar la altura.



Cualquier lado de una figura plana puede ser considerado como *base* de dicha figura, y para cada base habrá una altura diferente. Esto debe estar claro para los niños antes de comenzar a usar fórmulas en las que se hable de base y altura.

5. TALLER DE DIDÁCTICA

5.1. Análisis de textos escolares. Diseño de unidades didácticas

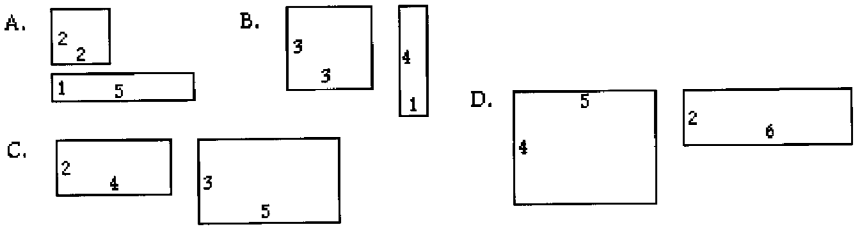
Consigue una colección de libros de texto de matemáticas de 2º y 3er ciclo de primaria (recomendamos buscar los libros que utilizastes personalmente, o bien los de algún familiar o amigo).

- Estudia el desarrollo del tema de "magnitudes geométricas y su medida" en dichos niveles.
- Indica en qué curso se inicia y cuando termina.
- Busca algún tipo de problema o tarea que consideres no está representado en la muestra de problemas que hemos seleccionado como actividad introductoria del estudio de este tema.
- Identifica aspectos del desarrollo del tema en los manuales escolares que consideres potencialmente conflictivos.
- Describe los cambios que introducirías en el diseño las lecciones propuestas para los cursos 5º y 6º de primaria.

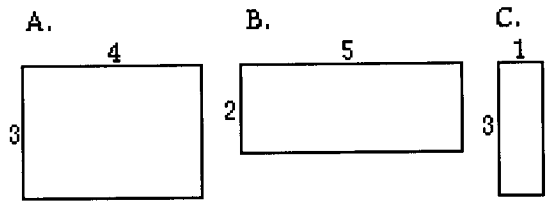
5.2. Respuestas de estudiantes a pruebas de evaluación

1. Una maestra pasó en su clase las siguientes cuestiones para evaluar los conocimientos sobre el área:

Cuestión 1: Para cada par de rectángulos, señala el que tenga mayor área:



Cuestión 2: ¿Cuál es el área de los siguientes rectángulos?



Roberto respondió correctamente a las cuatro comparaciones de la cuestión 1, pero respondió incorrectamente las tres partes de la cuestión 2, dando el valor 7 para los casos A y B y 4 para el C.

a) ¿Cuál ha sido el error sistemático de Roberto en la cuestión 2?

b) ¿Por qué piensas que respondió bien a los cuatro items de la cuestión 1?

2. Áreas de polígonos [5]

Estudio de los documentos 1 y 2:

El documento 1 (adjunto) presenta un ejercicio propuesto por un maestro en una

[5] Brousseau et. Al (1995).

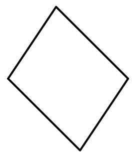
evaluación. El documento 2 contiene las respuestas de cuatro alumnos a dicho ejercicio.

Cuestiones sobre los documentos 1 y 2:

1.Haz el ejercicio del documento 1. Demuestra la validez de la fórmula elegida.
2. Identifica tres aspectos que el maestro debería tener en cuenta en la evaluación de las respuestas de los alumnos (por ejemplo, la elección de la fórmula elegida, ...)
3. Aplica los criterios de corrección a las cuatro respuestas de los alumnos presentadas en el documento 2.

Documento 1:
La figura EFGH representa un rombo. A) Señala en el formulario adjunto la fórmula que permite calcular el área de EFGH; b) Calcula el área del rombo.

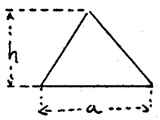
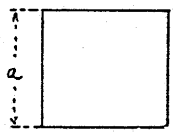
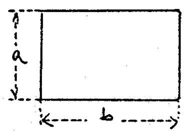
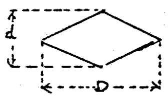
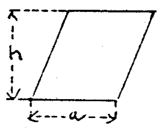
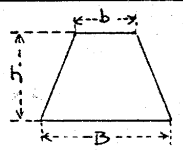
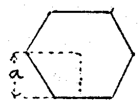
Medidas:
EF = 5 cm
FG = 5 cm
GH = 5 cm
HE = 5 cm
EG = 8 cm
FH = 6 cm



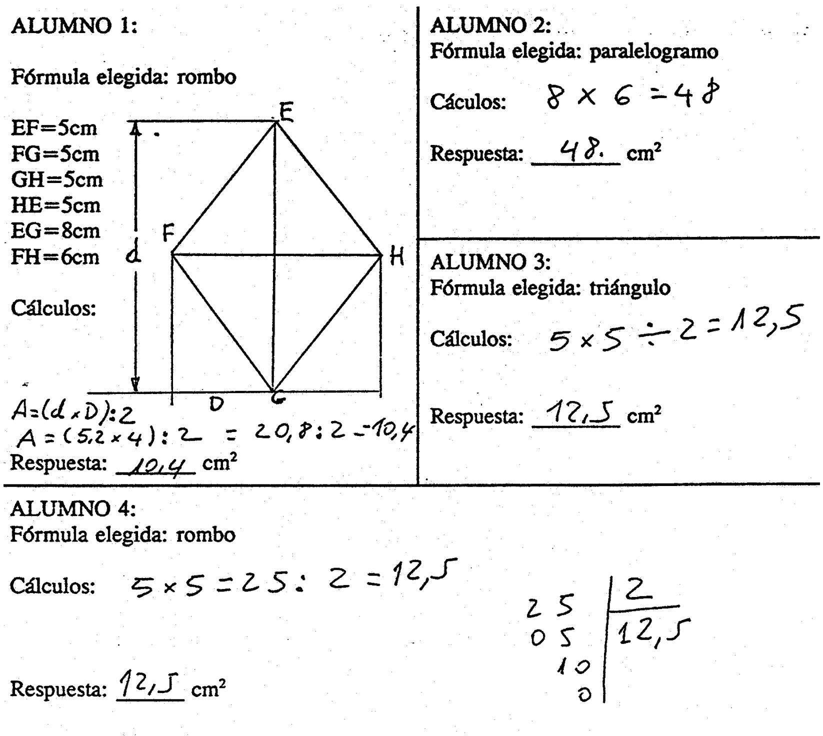
Cálculos:

Respuesta: _____ cm^2

Formulario: Área de las principales superficies geométricas

Triángulo	Cuadrado	Rectángulo	Rombo
			
A = (a x h):2	A = a^2	A = a x b	A = (D x d) : 2
Paralelogramo	Trapecio	Polígonos regulares	
			Triángulo, cuadrado, pentágono, hexágono, etc p : perímetro a : long. apotema
A= a x h	A=[(b+B) x h]:2	A = (p x a) : 2	

Documento 2: Respuestas de cuatro alumnos


ALUMNO 1:

Fórmula elegida: rombo

EF=5cm
FG=5cm
GH=5cm
HE=5cm
EG=8cm
FH=6cm

Cálculos:

A=(d×D):2
A = (5,2 × 4) : 2 = 20,8 : 2 = 10,4

Respuesta: 10,4 cm²

ALUMNO 2:
Fórmula elegida: paralelogramo

Cáculos: 8 × 6 = 48

Respuesta: 48. cm²

ALUMNO 3:
Fórmula elegida: triángulo

Cálculos: 5 × 5 ÷ 2 = 12,5

Respuesta: 12,5 cm²

ALUMNO 4:
Fórmula elegida: rombo

Cálculos: 5 × 5 = 25 : 2 = 12,5

25 | 2
05 | 12,5
10
0

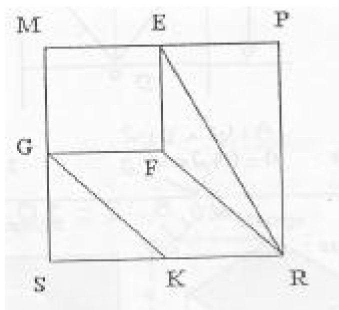
Respuesta: 12,5 cm²

5.3. Análisis de experiencias didácticas: Áreas y perímetros

Se propone trabajar con las 5 piezas de la figura adjunta.

Información:

- MPRS es un cuadrado de lado *a*
- E es el punto medio de MP
- K es el punto medio de SR
- MEFG es un cuadrado



Estudio geométrico de esta figura:

1. Mostrar que
   - F está sobre MR y precisar cuál es su posición.
   - G está sobre MS y precisar cuál es su posición.
2. ¿Cuál es la naturaleza exacta de las tres piezas EPR, GSK, GFRK? Justificar la respuesta.
3. Expresar el área de las 5 piezas en función de *a*. Justificar la respuesta.

B. Estudio didáctico

Se utiliza la configuración anterior para diseñar una secuencia de enseñanza.

B1) Preparación del material:

- Reproducir la figura sobre cartulina, tomando el valor de a = 8cm, y recortar las cinco piezas correspondientes.

B2) Se desea utilizar este material para explorar el concepto de área

1. ¿En qué ciclo y en qué nivel se comienza la enseñanza del concepto de área de figuras poligonales? ¿Cuáles son las dos grandes fases que se consideran indispensables desarrollar en la escuela primaria en relación a este concepto?

2. ¿Cómo podría encontrar un alumno de primaria las relaciones existentes entre las áreas de las cinco piezas? Representar mediante dibujos el proceso que podría seguir un alumno para encontrar estas relaciones.

3. Proponer un conjunto de 8 superficies (distintas de la 5 superficies elementales que constituyen el cuadrado MPRS), construidas utilizando como plantillas las piezas dadas, que permitan ilustrar a la vez la clasificación y la ordenación según el área. (Para cada superficie dejar marcado el contorno de las plantillas usadas).

4. Construir una superficie no rectangular cuya área sea la mitad, y otra cuya área sea el doble, de la del cuadrado MPRS.

5. Encontrar una superficie S0 construida con piezas del puzle que permita:
a)Construir otra superficie S1 de área más grande y perímetro menor.
b) Construir otra superficie S2 de área menor y perímetro mayor.
c) Construir otra superficie S3 de igual área y perímetro diferente.
¿Cuál es el objetivo de esta última actividad?

Bibliografía

Baroody, A. J. y Coslick,R. T. (1998). *Fostering children's mathematical power. An investigative approach to K-8 mathematics instruction*. London: Lawrence Erlbaum.

Brousseau, G., Duval, A. y Vinrich, G. (1995). *Thèmes mathématiques pour la préparation du concours CRPE*. Talence: IREM d' Aquitaine.

Dickson, L., Brown, M. y Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: MEC y Labor.

Inskeep, J. E. (1976). "Teaching measurement to elementary school children". En: N.C.T.M. (Ed.), *Measurement in School Mathematics, 1976 Yearbook.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics [Enseñanza de la medición en la escuela elemental. Traducción de J. Díaz Godino y L. Ruíz Higueras]

Long, C. T. y DeTemple, D. W. (1996). *Mathematical reasoning for elementary teachers*. New York: Harper Collins.

Moreno, F., Gil, F. y Frias, A. (2001). Área y volumen. En E. Castro (Ed.). *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (p. 503-532). Madrid: Síntesis

Olmo, M. A., Moreno, F. y Gil, F. (1989). *Superfie y volumen*. Madrid: Síntesis.

Van de Walle, J. A. (2001). *Elementary and middle school mathematics. Teaching developmentally*. New York: Longman.