

Matemática  
Sexto año Básico  
PRIMERA UNIDAD DIDÁCTICA

# **RESOLVIENDO PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS CON FRACCIONES**

Coordinadora  
Lorena Espinoza S.

## **Autores**

Joaquim Barbé F.      Lorena Espinoza S.  
Francisco Cerda B.    Fanny Waisman C.

## **Colaboradora**

Grecia Gálvez P.



## ÍNDICE

I	Presentación	6
II	Esquema	10
III	Desarrollo de los fundamentos matemáticos centrales	12
IV	Orientaciones para el profesorado: estrategia didáctica	19
V	Planes de clases	40
VI	Prueba y Pauta de corrección	53
VII	Espacio para la reflexión personal	67
VIII	Glosario	68
IX	Fichas y materiales para alumnas y alumnos	70



***Resolviendo problemas multiplicativos con fracciones*****APRENDIZAJES ESPERADOS DEL PROGRAMA**

- Resuelven problemas multiplicando:
  - Números naturales por fracciones menores que 1.
  - Fracciones por fracciones menores que 1.
- Resuelven problemas dividiendo:
  - Números naturales por fracciones menores que 1.
  - Fracciones por fracciones menores que 1.
- Comprenden el significado de multiplicar o dividir por fracciones menores que 1; predicen y estiman resultados.
- Representan gráficamente resultados de operaciones con fracciones.

**APRENDIZAJES ESPERADOS PARA LA UNIDAD**

- Resuelven problemas en los que es necesario multiplicar dos fracciones cualesquiera.
- Resuelven problemas en que es necesario dividir: una fracción cualquiera por un número natural y dos fracciones cualesquiera.
- Comprenden el significado de multiplicar una fracción menor que 1 por una fracción cualquiera.
- Comprenden el significado de dividir una fracción cualquiera por una fracción menor que 1.
- Utilizan representaciones gráficas como herramientas para resolver y justificar operaciones con fracciones.
- Construyen y usan comprensivamente procedimientos resumidos para efectuar multiplicaciones y divisiones de fracciones.

**Aprendizajes Previos**

- Comprenden las cantidades que representan los números mixtos y las expresan mediante fracciones.
- Generan familias de fracciones equivalentes mediante la amplificación y simplificación.
- Resuelven problemas multiplicativos de variación proporcional, con números naturales.
- Reconocen una fracción como un número que permite expresar una parte de un todo.
- Suman y restan fracciones, mediante procedimientos convencionales.
- Reconocen la división como la operación inversa de la multiplicación.
- Calculan el valor de fracciones de colecciones.
- Resuelven problemas que involucran la multiplicación de un número natural por una fracción menor que 1.
- Comparan aditivamente fracciones.

## I. Presentación

### 1. Tareas matemáticas

Las **tareas matemáticas** que niñas y niños realizan para lograr los aprendizajes esperados de esta Unidad son:

- Resuelven problemas multiplicativos con fracciones de ponderación de una medida.
- Resuelven problemas de división con dividendo fraccionario en situaciones de reparto equitativo.
- Resuelven problemas de división con fracciones en situaciones de distribución en base a una medida fraccionaria.
- Construyen procedimientos resumidos para efectuar multiplicaciones y divisiones de fracciones.
- Calculan productos y cuocientes de fracciones.

### 2. Variables didácticas

Las **variables didácticas** que se consideran para graduar la complejidad de las tareas matemáticas que niñas y niños realizan son:

- Disponibilidad de material concreto: disponen de tiras de tamaño 1 unidad y de trozos de tira correspondientes a  $\frac{1}{2}$  tira,  $\frac{1}{3}$  de tira,  $\frac{1}{4}$  de tira,  $\frac{1}{5}$  de tira,  $\frac{1}{6}$  de tira,  $\frac{1}{8}$  de tira,  $\frac{1}{10}$  de tira y  $\frac{1}{12}$  de tira; no disponen de dicho material.
- Tipo de acción involucrada en el enunciado del problema: del tipo distribuir (problemas de distribución en base a una medida), repartir en partes iguales (problemas de reparto equitativo) o ponderar (problemas de ponderación de una medida).
- Relación entre dividendo y divisor: el dividendo es una fracción y el divisor es un natural; el dividendo es una cantidad entera de unidades de medida y el divisor es una fracción unitaria; el dividendo es una fracción cualquiera y el divisor es una fracción unitaria; el dividendo es una fracción cualquiera y el divisor es una fracción menor que uno; el dividendo y el divisor son fracciones cualesquiera.
- Relación entre los factores: una fracción unitaria por una fracción cualquiera; cualquier fracción menor que uno por una fracción cualquiera; dos fracciones cualesquiera.

### 3. Procedimientos

Niños y niñas se apropian gradualmente de una estrategia de **resolución de problemas**, a la vez que van construyendo algoritmos de **cálculo** de multiplicación y división de fracciones, mediante la siguiente secuencia de procedimientos:

- Resuelven los problemas mediante el uso de material concreto, como se explica en el desarrollo de la estrategia didáctica.
- Utilizan representaciones gráficas como herramientas para resolver y justificar operaciones con fracciones (replicando el trabajo realizado con el material concreto).
- Buscan y justifican regularidades, con el fin de construir algoritmos de cálculo.
- Resuelven los problemas mediante el uso de algoritmos convencionales de cálculo.

## 4. Fundamentos matemáticos centrales

- Una fracción es un número que permite cuantificar cantidades de magnitudes continuas.
- Un número mixto es un número compuesto que está formado por una parte entera y otra parte fraccionaria, de modo que  $a\frac{b}{c} = a + \frac{b}{c}$ , donde  $\frac{b}{c} < 1$ .
- Al multiplicar una fracción menor que 1 por un número cualquiera el resultado es menor que dicho número (a diferencia de lo que ocurre en la multiplicación entre dos números mayores que la unidad, ya sean naturales o fracciones).
- Al dividir un número cualquiera por una fracción menor que uno, el resultado obtenido es mayor que el dividendo (a diferencia de lo que ocurre en las divisiones en que el divisor es mayor que la unidad, ya sea el dividendo un natural o una fracción).
- La división permite anticipar el resultado, es decir, el número de partes resultantes de una distribución en base a una medida.
- La división permite anticipar el resultado, es decir, cuánto corresponde a cada participante, de un reparto equitativo.
- La multiplicación permite anticipar el resultado de la ponderación de una medida.
- La justificación matemática del algoritmo convencional para multiplicar dos fracciones  $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$  se explica en el desarrollo de los fundamentos matemáticos centrales.
- La justificación matemática del algoritmo convencional para dividir dos fracciones  $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$  se explica en el desarrollo de los fundamentos matemáticos centrales.
- Debido a que la multiplicación y la división son operaciones inversas entre sí, en una división el cociente es el número que, multiplicado por el divisor iguala al dividendo, como ocurre en los números naturales.

## 5. Descripción global del proceso de enseñanza y aprendizaje

En la **primera etapa** el trabajo del alumnado estará orientado a desarrollar una técnica que les permita tanto dividir una fracción cualquiera por un número natural, como multiplicar una fracción unitaria por una fracción cualquiera. Estos dos aprendizajes se trabajan en paralelo, dada su estrecha

relación:  $\frac{a}{b} : n = \frac{1}{n} \cdot \frac{a}{b}$ , *al repartir equitativamente una cantidad  $\frac{a}{b}$  entre  $n$  personas, a cada una de*

*ellas le toca  $\frac{1}{n}$  de la cantidad  $\frac{a}{b}$ , esto es  $\frac{a}{b} : n = \frac{1}{n} \cdot \frac{a}{b}$ .* Por ejemplo, si reparto  $\frac{3}{4}$  de torta entre 5

personas ( $\frac{3}{4} : 5$ ), a cada una le toca  $\frac{1}{5}$  de los  $\frac{3}{4}$  de torta, esto es:  $\frac{3}{4} : 5 = \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4}$ . Para lograr estos aprendizajes, la tarea de esta etapa consistirá en resolver problemas de división en situaciones de reparto equitativo, así como problemas de multiplicación en situaciones de ponderación de una medida en las que el factor de ponderación es una fracción unitaria.

En la **segunda etapa** se continúa con el trabajo de multiplicación realizado en la etapa anterior, pero extendiéndolo a multiplicaciones en las que se multiplica una fracción menor que uno, por una

fracción cualquiera; por ejemplo:  $\frac{2}{3} \cdot \frac{7}{4}$ . La tarea de esta etapa consistirá en resolver problemas

multiplicativos de ponderación de una medida, en que el factor de ponderación es una fracción propia.

En la **tercera etapa** el trabajo de alumnas y alumnos estará orientado a desarrollar una técnica que les permita dividir fracciones. El trabajo se centrará en divisiones en las que el dividendo es una fracción cualquiera y el divisor es una fracción unitaria; por ejemplo:  $\frac{2}{3} : \frac{1}{4}$ . Para lograr dicho propósito, la tarea de esta etapa consiste en resolver problemas de división en situaciones de distribución en base a una medida. Una vez concluido este trabajo, se generalizarán las divisiones de fracciones ya estudiadas (fracción dividida por natural y fracción dividida por fracción unitaria), a la división de dos fracciones cualesquiera.

La **cuarta etapa** tiene como propósito que niñas y niños se enfrenten a distintos problemas multiplicativos de variación proporcional con fracciones, vale decir, problemas de división y de multiplicación como los vistos en las clases anteriores, de modo que se encuentren frente a la tarea de discriminar, frente a cada problema, la operación a utilizar. Del mismo modo, esta es una oportunidad para recordar y practicar los distintos algoritmos de multiplicación y división de fracciones aprendidos.

## 6. Sugerencias para trabajar los aprendizajes previos

Antes de dar inicio al estudio de la Unidad, es necesario realizar un trabajo sobre los aprendizajes previos. Interesa que el curso active los conocimientos necesarios para enfrentar adecuadamente la Unidad y lograr los aprendizajes esperados en ella. Cada docente debe asegurarse, mediante actividades como las sugeridas a continuación, que todos los niños y niñas:

- **Comprenden las cantidades que representan los números mixtos y las expresan mediante fracciones.**

Cada docente puede proponer a su curso actividades como las sugeridas a continuación:

- Dibuja  $2\frac{3}{4}$  barras de chocolate.
- Expresa el número  $7\frac{2}{3}$  en notación fraccionaria.
- Expresa la fracción  $\frac{27}{5}$  como número mixto.

- **Resuelven problemas multiplicativos de variación proporcional, con números naturales.**

Se espera que niños y niñas:

- Reconozcan la división como la operación que permite anticipar el resultado de la acción de agrupar (distribuir) según una medida. Para ello se pueden plantear problemas como el siguiente: *¿Cuántos paquetes de 5 betarragas se pueden hacer con 75 betarragas?*
- Reconozcan la división como la operación que permite anticipar el resultado de la acción de realizar un reparto equitativo. Para ello se pueden plantear problemas como el siguiente: *El papá de Juan compró 32 bolitas y las repartió equitativamente entre sus 4 hijos. ¿Cuántas bolitas le tocaron a cada uno?*
- Reconozcan la multiplicación como la operación que permite anticipar el resultado de la iteración (ponderación) de una medida. Para ello se pueden plantear problemas como el siguiente: *Mi hermana compró 12 confites y yo compré el triple que ella. ¿Cuántos dulces compré yo?*



- **Reconocen una fracción como un número que permite expresar una parte de un todo.**

Cada docente puede proponer a su curso actividades como las sugeridas a continuación:

- *María se comió 1/4 de una torta. Dibuja la torta y marca lo que se comió María.*
- *Para mi cumpleaños compramos 5 pizzas que venían cortadas en octavos. Cuando los invitados se fueron quedaban  $2\frac{3}{8}$  de pizza. Dibuja las pizzas y marca la cantidad que quedó.*

- **Suman y restan fracciones mediante procedimientos convencionales.**

Cada docente puede pedir a su curso que resuelvan diversas adiciones y sustracciones de fracciones, mediante el algoritmo convencional aprendido en 5° Básico; por ejemplo: a)  $\frac{2}{3} + \frac{3}{5} =$  b)

$\frac{7}{6} - \frac{2}{3} =$  c)  $5\frac{2}{7} + \frac{5}{3} =$ . También puede plantear algunos problemas que se resuelvan mediante

adiciones o sustracciones de fracciones, como el siguiente: *Martín, el panadero, tenía un saco entero de harina. Gastó la tercera parte del saco en hacer el pan y regaló la cuarta parte del saco al Hogar de Cristo. ¿Cuánta harina le queda?*

- **Reconocen la división como la operación inversa de la multiplicación.**

Cada docente puede pedir a su curso que resuelvan problemas como los siguientes:

- a)  $14 \cdot \underline{\quad} = 154$  b)  $180 : \underline{\quad} = 12$ , o que comprueben los resultados de diversas multiplicaciones o divisiones con resto cero de números naturales (cuociente  $\cdot$  divisor = dividendo, producto : factor<sub>1</sub> = factor<sub>2</sub>).

- **Calculan el valor de fracciones de colecciones.**

Cada docente puede plantear a su curso problemas como los siguientes: *En una caja hay 30 lápices, 2/5 son rojos, 1/3 son verdes y el resto son azules: ¿Cuántos lápices son rojos? ¿Cuántos lápices son verdes? ¿Cuántos lápices son azules? También, realizar directamente preguntas del tipo: ¿A cuánto equivale 2/3 de 27?*

- **Resuelven problemas que involucran la multiplicación de un número natural por una fracción menor que 1.**

La resolución de problemas que involucran la multiplicación de números naturales por fracciones menores que 1, fue considerada como conocimiento previo, dado que se trabaja en la Unidad Didáctica de 5° Básico “*Resolviendo problemas aditivos con fracciones*”. Para la activación de este aprendizaje se elaboró una ficha especial (**Ficha de trabajo de aprendizajes previos**), para ser trabajada con alumnas y alumnos antes del trabajo con la unidad y aprovechar de recordar las justificaciones asociadas a dicho aprendizaje:

$$5 \cdot \frac{1}{3} = 5 \text{ veces } \frac{1}{3} = \text{cinco tercios} = \frac{5}{3}$$

$$7 \cdot \frac{2}{3} = 7 \text{ veces } \frac{2}{3} = 7 \text{ veces } (2 \text{ veces } \frac{1}{3}) = (7 \cdot 2) \text{ veces } \frac{1}{3} = 14 \cdot \frac{1}{3} = \frac{14}{3} \text{ o,}$$

$$\text{lo que es lo mismo, } 7 \cdot \frac{2}{3} = 7 \cdot (2 \cdot \frac{1}{3}) = (7 \cdot 2) \cdot \frac{1}{3} = 14 \cdot \frac{1}{3} = \frac{14}{3}$$

## II. ESQUEMA

### APRENDIZAJES ESPERADOS

#### ETAPA 4

<u>TAREAS MATEMÁTICAS</u>	<u>CONDICIONES</u>	<u>TÉCNICAS</u>	<u>FUNDAMENTOS CENTRALES</u>
<ul style="list-style-type: none"> <li>- Resuelven problemas de multiplicación y división de fracciones.</li> <li>- Calculan productos y cuocientes de fracciones.</li> </ul>	Los problemas son problemas de multiplicación y división como los vistos en las clases anteriores.	Utilizando procedimientos resumidos para la multiplicación y división de dos fracciones.	Se sistematizan y articulan todos los fundamentos centrales estudiados en las clases anteriores.

#### ETAPA 3

<u>TAREAS MATEMÁTICAS</u>	<u>CONDICIONES</u>	<u>TÉCNICAS</u>	<u>FUNDAMENTOS CENTRALES</u>
<ul style="list-style-type: none"> <li>- Resuelven problemas de división en situaciones de distribución en base a una medida fraccionaria.</li> <li>- Construyen procedimientos resumidos para efectuar divisiones de fracciones.</li> <li>- Calculan cuocientes de fracciones.</li> </ul>	<p>El dividendo es un número fraccionario cualquiera. El divisor es una fracción unitaria,</p> <p>ejemplo: <math>\frac{2}{5} : \frac{1}{4}</math>.</p> <p>En un primer momento disponen del material concreto y luego no.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Uso de material concreto de acuerdo a como se explica en la estrategia didáctica.</li> <li>- Utilización de representaciones gráficas del problema a resolver.</li> <li>- Procedimientos resumidos basados en sustracciones iteradas.</li> <li>- Reconocen que el cuociente de la división de una fracción cualquiera por una fracción unitaria, es igual al producto del dividendo por el inverso multiplicativo del divisor.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- La división permite anticipar el resultado de la acción de distribuir en base a una medida.</li> <li>- Al dividir un número cualquiera por una fracción menor que uno, el resultado obtenido es mayor que el dividendo (a diferencia de lo que ocurre en la división de naturales en que el divisor es mayor que la unidad).</li> <li>- El algoritmo convencional para dividir dos fracciones, <math>\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}</math>, tiene una justificación matemática.</li> <li>- Debido a que la multiplicación y la división son operaciones inversas entre sí, podemos definir el cuociente como el número que multiplicado por el divisor iguala al dividendo.</li> <li>- Un número mixto es un número compuesto formado por una parte entera y otra parte fraccionaria, de modo que <math>a\frac{b}{c} = a + \frac{b}{c}</math>, donde <math>\frac{b}{c} &lt; 1</math>.</li> </ul>

**ETAPA 2**

<u>TAREAS MATEMÁTICAS</u>	<u>CONDICIONES</u>	<u>TÉCNICAS</u>	<u>FUNDAMENTOS CENTRALES</u>
<ul style="list-style-type: none"> <li>- Resuelven problemas multiplicativos de ponderación de una medida.</li> <li>- Construyen procedimientos resumidos para efectuar multiplicaciones de fracciones.</li> <li>- Calculan productos de fracciones.</li> </ul>	<p>El primer factor es una fracción menor que 1 y el segundo es un número fraccionario cualquiera, ejemplo:</p> $\frac{2}{3} \cdot \frac{7}{4}$	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Utilización de representaciones gráficas del problema a resolver.</li> <li>2. Reconocen el producto de dos fracciones cualesquiera como el resultado de multiplicar los numeradores y denominadores de las fracciones factores respectivamente.</li> </ol>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- La multiplicación permite anticipar el resultado de la ponderación de una medida.</li> <li>- Al multiplicar una fracción menor que 1 por un número cualquiera, el resultado es menor que dicho número (a diferencia de lo que ocurre en la multiplicación de naturales mayores que la unidad).</li> <li>- El algoritmo convencional para multiplicar dos fracciones, <math>\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}</math>, tiene una justificación matemática.</li> <li>- Un número mixto es un número compuesto formado por una parte entera y otra parte fraccionaria, de modo que <math>a \frac{b}{c} = a + \frac{b}{c}</math>, donde <math>\frac{b}{c} &lt; 1</math>.</li> </ul>

**ETAPA 1**

<u>TAREAS MATEMÁTICAS</u>	<u>CONDICIONES</u>	<u>TÉCNICAS</u>	<u>FUNDAMENTOS CENTRALES</u>
<ul style="list-style-type: none"> <li>- Resuelven problemas de división en situaciones de reparto equitativo, así como problemas multiplicativos de ponderación de una medida.</li> <li>- Construyen procedimientos resumidos para efectuar multiplicaciones y divisiones de fracciones.</li> <li>- Calculan productos y cocientes de fracciones.</li> </ul>	<p><b>En la división:</b> El dividendo es un número fraccionario y el divisor es un número natural, ejemplo: <math>\frac{3}{5} : 4</math>.</p> <p><b>En la multiplicación:</b> El factor de ponderación es una fracción unitaria, y el factor medida es una fracción cualquiera, ejemplo: <math>\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{5}</math>.</p> <p>En un primer momento disponen de material concreto y luego no.</p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Uso de material concreto de acuerdo a como se explica en la estrategia didáctica.</li> <li>2. Utilización de representaciones gráficas del problema a resolver.</li> <li>3. Reconocen que dividir por un número entero, es equivalente a multiplicar por el inverso multiplicativo de dicho número y es equivalente a multiplicar el denominador de la fracción dividendo por el número en cuestión.</li> </ol>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- La división permite anticipar el resultado de un reparto equitativo.</li> <li>- La multiplicación permite anticipar el resultado de la ponderación de una medida.</li> <li>- Un número mixto es un número compuesto formado por una parte entera y otra parte fraccionaria, de modo que <math>a \frac{b}{c} = a + \frac{b}{c}</math>, donde <math>\frac{b}{c} &lt; 1</math>.</li> <li>- Al repartir equitativamente una cantidad <math>\frac{a}{b}</math> entre <b>n</b> personas a cada <b>una</b> le toca <math>\frac{1}{n}</math> de la cantidad <math>\frac{a}{b}</math>, esto es <math>\frac{a}{b} : n = \frac{1}{n} \cdot \frac{a}{b}</math></li> </ul>

**APRENDIZAJES PREVIOS**

### III Desarrollo de los fundamentos matemáticos centrales

- Una fracción es un número que permite cuantificar cantidades de magnitud continua.

Partiremos insistiendo en el hecho de que toda fracción es un número. Las fracciones surgen por la necesidad de cuantificar cantidades de magnitud continua, siglos antes de la aparición de los números decimales, dado que los naturales no sirven para representar cantidades menores que la unidad y, por tanto, no sirven para medir, pues el objeto a medir puede tener una medida que no corresponda a una cantidad entera de veces la unidad.

Los números racionales suelen ser expresados en distintas notaciones: decimal, fraccionaria o como número mixto. De ahí que cuando se habla de una fracción o un decimal o un número mixto, se hace referencia a la forma en que viene representado el número; en cambio, cuando se habla de naturales, enteros o racionales, se está especificando un conjunto numérico con sus respectivas propiedades y no una notación en particular. En esta Unidad se trabajará con dos notaciones, fracción y número mixto, dada la estrecha relación entre ellas y siguiendo los lineamientos del programa de estudio.

- Un número mixto NO es una fracción, sino un número compuesto, formado por una parte entera y otra parte fraccionaria. Para representar un número mixto como fracción, uno de los procedimientos utilizados es  $a\frac{b}{c} = a + \frac{b}{c} = \frac{a \cdot c}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a \cdot c + b}{c}$ . Dado que los números mixtos no son fracciones, para realizar operaciones con ellos es recomendable expresarlos previamente como fracciones, de modo de evitar largos procedimientos como el que se muestra a continuación.

$$2\frac{4}{9} \times \frac{2}{3} = \left(2 + \frac{4}{9}\right) \times \frac{2}{3} = 2 \times \frac{2}{3} + \frac{4}{9} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3} + \frac{8}{27} = \frac{36}{27} + \frac{8}{27} = \frac{44}{27}$$

El cual, utilizando notación fraccionaria, se reduce a:

$$2\frac{4}{9} \times \frac{2}{3} = \frac{22}{9} \times \frac{2}{3} = \frac{44}{27}$$

- Al multiplicar un número cualquiera por una fracción menor que uno (fracción propia), dicho número disminuye su valor.

Esto, a diferencia de lo que ocurre en los naturales (a lo cual los estudiantes están acostumbrados), ya que siempre que multipliquemos dos naturales mayores que 1 entre sí, el resultado será mayor que cada uno de los factores. Por ejemplo, el problema: “Pedro tiene 5 paquetes de 6 betarragas cada uno. ¿Cuántas betarragas tiene en total?” da como resultado que Pedro tiene  $5 \cdot 6 = 30$  betarragas en total, una cantidad de betarragas 5 veces mayor que la cantidad de betarragas (6) que contiene cada uno de los 5 paquetes. **En cambio, en el caso de la multiplicación de cantidades fraccionarias en que uno de los factores es menor que 1**, el resultado obtenido es menor que el otro factor. Por ejemplo, en el problema “Juana tenía  $\frac{6}{5}$  de turrón y le dio  $\frac{5}{12}$  de lo que tenía a su hermano (esto es posible partiendo cada quinto en dos partes iguales). ¿Cuántos turrónes le dio Juana a su hermano?” la respuesta es, le dio  $\frac{5}{12} \cdot \frac{6}{5} = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$  turrón, que corresponden a  $\frac{5}{12}$  de

los  $\frac{6}{5}$  de turrón - **una parte del total** - y por tanto, una cantidad obviamente menor que el total de turrónes.

Esto no ocurre cuando se multiplican dos fracciones mayores que uno, en cuyo caso el resultado es mayor que cada uno de los factores (al igual como ocurre para los números naturales mayores que la unidad). Por ejemplo, en el problema: “*Carolina tenía  $\frac{6}{5}$  de turrón y su hermano tiene  $\frac{15}{4}$  de lo que tiene Carolina. ¿Cuántos turrónes tiene el hermano de Carolina?*”, la respuesta es, en total tiene  $\frac{15}{4} \cdot \frac{6}{5} = \frac{90}{20} = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$  turrónes, una cantidad  $\frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$  veces mayor que lo que tiene Carolina.

- Al dividir un número cualquiera por una fracción menor que 1, el resultado obtenido es mayor que el dividendo.

Esto, a diferencia de lo que ocurre en los naturales (a lo cual los alumnos están acostumbrados), ya que siempre que dividamos dos naturales, el resultado será menor que el dividendo. Por ejemplo, en el problema: “*Si agrupo 30 betarragas en paquetes de 5 betarragas, ¿para cuántos paquetes me alcanza?*”, da como resultado que me alcanza para  $30 : 5 = 6$  paquetes, menos paquetes que el número de betarragas disponibles, lo que tiene sentido, ya que necesito más de una betarraga para cada paquete. **En cambio, en el caso de la división de cantidades fraccionarias en que el divisor es menor que 1** el resultado obtenido es mayor que el dividendo. Por ejemplo, en el problema:

“*¿Cuántas botellas de  $\frac{1}{2}$  litro necesito para vaciar  $3\frac{1}{2}$  litros de bebida?*” la respuesta es, necesito  $3\frac{1}{2} : \frac{1}{2} = \frac{7}{2} : \frac{1}{2} = \frac{7}{2} \cdot 2 = \frac{14}{2} = 7$  botellas. En este caso, por contener cada botella de  $\frac{1}{2}$  litro menos de 1 litro, entonces cada litro me alcanza para más de una botella (dos en este caso), por lo que tiene sentido que la cantidad de botellas que se necesita sea mayor que la cantidad total de litros con que se cuenta.

Esto no ocurre en el caso de una división de una fracción cualquiera por una fracción mayor que uno, en cuyo caso el resultado es menor que el dividendo. Por ejemplo, en el problema “*¿Cuántas botellas de  $1\frac{1}{2}$  litro necesito para vaciar  $7\frac{1}{2}$  litros de bebida?*” la respuesta es, necesito  $\frac{15}{2} : \frac{3}{2} = \frac{15}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{30}{6} = 5$  botellas. En este caso, por contener cada botella de  $3/2$  litro más de 1 litro, necesito más de un litro para cada botella (uno y medio en este caso), por lo que tiene sentido que la cantidad de botellas que se necesita sea menor que la cantidad total de litros con que se cuenta.

- La división permite anticipar **el resultado de la acción de distribuir en base a una medida.**

Al igual que en el contexto de los números naturales, el resultado de la acción de distribuir según una medida se anticipa mediante una división; (por ejemplo, el problema “*¿Cuántas botellas de 2 litros necesito para vaciar 14 litros de parafina?*”, se resuelve mediante la división  $14 : 2 = 7$ ); en el contexto fraccionario la operación que permite anticipar el resultado de dicha acción también es una división.

**Ejemplo:** ¿Cuántas botellas de  $\frac{1}{2}$  litro de bebida puedo llenar con  $3\frac{1}{2}$  litros de bebida? (*Solución:*  $3\frac{1}{2} : \frac{1}{2} = \frac{7}{2} : \frac{1}{2} = \frac{7}{2} \cdot 2 = \frac{14}{2} = 7$  botellas)

Este problema corresponde a una *distribución en base a una medida*, ya que en él los datos son la cantidad a distribuir ( $3\frac{1}{2}$  litros) y la medida que debe tener cada parte ( $\frac{1}{2}$  litro), siendo la incógnita la cantidad de partes resultantes de distribuir dicha cantidad en base a la medida.

□ La división permite anticipar **el resultado de un reparto equitativo**.

Al igual que en el contexto natural, el resultado de un reparto equitativo se anticipa mediante una división; (por ejemplo, el problema “*Repartir equitativamente 10 litros de bebida entre 2 personas*” se resuelve mediante la división  $10:2=5$ ); en el contexto fraccionario la operación que permite anticipar el resultado de dicha acción también es una división.

**Problema 1:** Después de repartir equitativamente  $3\frac{1}{2}$  litros de bebida en 7 botellas, ¿cuántos litros de bebida habrá en cada botella?  
(*solución:*  $3\frac{1}{2} : 7 = \frac{7}{2} : 7 = \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{7} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$  litros de bebida habrá en cada botella)

Este problema corresponde a un *reparto equitativo*, porque en él los datos son la cantidad a repartir ( $3\frac{1}{2}$  litros) y la cantidad de partes iguales en que se reparte dicha cantidad (7 partes) y se pregunta por el tamaño de cada una de las partes resultantes.

□ La multiplicación permite anticipar el resultado de la **ponderación de una medida**.

Al igual que en el contexto natural, el resultado de una ponderación de una medida se anticipa mediante una multiplicación; (por ejemplo, el problema “*Pedro tiene 2 chocolates y Juan tiene el triple de chocolates que Pedro. ¿Cuántos chocolates tiene Juan?*”, se resuelve mediante la multiplicación  $3 \cdot 2 = 6$ ); en el contexto fraccionario la operación que permite anticipar el resultado de dicha acción también es una multiplicación.

**Problema 1:** Carolina tiene  $\frac{6}{5}$  de turrón y su hermano tiene  $\frac{15}{4}$  de lo que tiene Carolina. ¿Cuántos turrónes tiene el hermano de Carolina?  
(*solución:*  $\frac{15}{4} \cdot \frac{6}{5} = \frac{90}{20} = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$  turrónes tiene su hermano)

Este problema corresponde a una *ponderación de una medida*, porque en él los datos son el factor de ponderación ( $\frac{15}{4}$  “veces”) y la medida a ponderar ( $\frac{6}{5}$  de turrón) y se pregunta por la medida resultante de la ponderación.

- El algoritmo convencional para multiplicar dos fracciones consiste en multiplicar los numeradores de ambos factores para obtener el numerador del producto y multiplicar los denominadores de ambos factores para obtener el denominador del producto. Este algoritmo tiene el fundamento matemático que se muestra a continuación:

1) Se sabe que  $(a \cdot b) : c = a \cdot (b : c) = b \cdot (a : c)$ . Por ejemplo: **Si 4 amigas (c) se quieren repartir unos caramelos, y los caramelos vienen en 16 bolsas (a) de 12 caramelos (b) cada una. ¿Cuántos caramelos le corresponden a cada una? Es fácil evidenciar que existen al menos tres caminos para resolver este problema, todos ellos equivalentes entre sí:**

- Hay un total de  $16 \cdot 12 = 192$  caramelos ( $a \cdot b$ ). Por tanto, a cada una le corresponden  $192 : 4 = 48$  caramelos ( $a \cdot b : c$ ).
- Otra opción es calcular primero que, por cada bolsa, cada amiga recibe  $12 : 4 = 3$  caramelos ( $b : c$ ). Como en total son 16 bolsas, cada una recibe un total de  $16 \cdot 3 = 48$  caramelos ( $a \cdot (b : c)$ ).
- Por último, podemos repartir primero las bolsas de caramelos. A cada amiga le tocan  $16 : 4 = 4$  bolsas ( $a : c$ ). Como cada bolsa tiene 12 caramelos, a cada una le corresponden  $4 \cdot 12 = 48$  caramelos ( $(a : c) \cdot b$ ).

Así se puede evidenciar que  $(16 \cdot 12) : 4 = 16 \cdot (12 : 4) = 12 \cdot (16 : 4)$  o  $(a \cdot b) : c = a \cdot (b : c) = b \cdot (a : c)$

2) Por otro lado,  $a : (b \cdot c) = (a : b) : c$ . Por ejemplo: **Si se quiere repartir 120 caramelos (a) en un curso en que los estudiantes están sentados en filas y en total hay 5 filas (b) con 8 estudiantes (c) cada una. ¿Cuántos caramelos le corresponden a cada uno? Es fácil evidenciar que existen al menos dos caminos para resolver este problema, equivalentes entre sí:**

- Si hay 5 filas con 8 alumnos(as) cada una, en total hay  $5 \times 8 = 40$  alumnos ( $b \cdot c$ ). Por tanto, a cada uno le tocan  $120 : 40 = 3$  dulces ( $a : (b \cdot c)$ ).
- Otra opción es repartir los 120 dulces primero por filas, de modo que a cada fila le tocan  $120 : 5 = 24$  dulces ( $a : b$ ), los que han de ser repartidos entre los 8 alumnos correspondientes a cada fila, quedando cada alumno con  $24 : 8 = 3$  dulces ( $(a : b) : c$ ).

De este modo se puede evidenciar que  $120 : (5 \times 8) = (120 : 5) : 8$  o  $a : (b \cdot c) = (a : b) : c$

3) Por último, entendiendo toda fracción  $\frac{a}{b}$  como el resultado de la operación  $a : b$

<p><b>Entonces:</b></p> $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = (a : b) \cdot (c : d) = \underbrace{[(a : b) \cdot c] : d}_{\text{Por (1)}} = \underbrace{[(a \cdot c) : b] : d}_{\text{Por (1)}} = \underbrace{(a \cdot c) : (b \cdot d)}_{\text{Por (2)}} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$
---

Dada la dificultad algebraica de dicho fundamento, lo que lo hace no apto para ser trabajado por los alumnos y alumnas de este nivel, en esta Unidad se procura que el fundamento que puedan dar a los algoritmos encontrados, sea en base al modelo escogido y, por consiguiente, al trabajo realizado en clases.

- Para dividir dos fracciones, una posible técnica consiste en multiplicar el dividendo con el inverso multiplicativo del divisor. Este algoritmo tiene el fundamento matemático que se muestra a continuación:

1) Se sabe que  $x : y = (x \cdot a) : (y \cdot a)$ . Por ejemplo, si tengo 21 chocolates (x) para repartir entre 7 personas (y) y, por otro lado, tengo el doble de chocolates ( $2 \cdot x$ ), pero para ser repartidos entre el doble de personas ( $2 \cdot y$ ), a las personas correspondientes a ambos repartos les toca la misma cantidad de chocolates.

**Entonces:**

Demostración 1

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \underbrace{\left( \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \right) : \left( \frac{c \cdot d}{d \cdot c} \right)}_{\text{Por (1)}} = \left( \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \right) : 1 = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Demostración 2

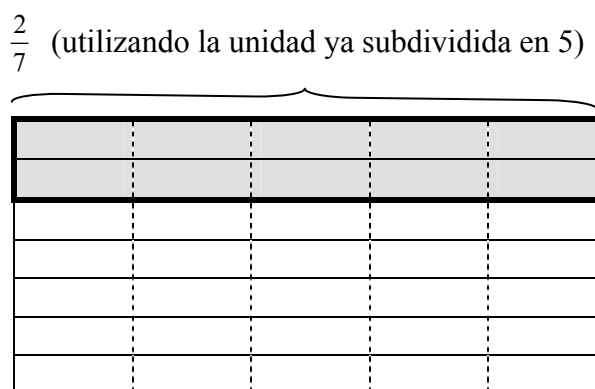
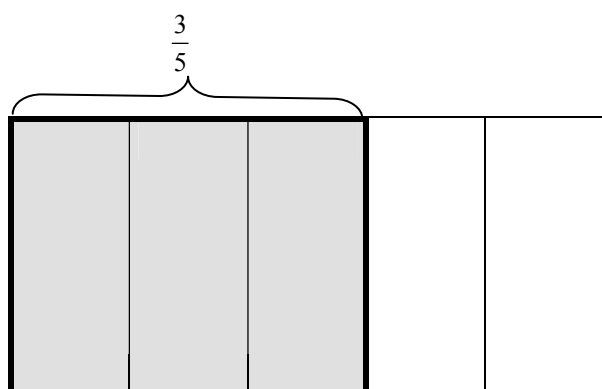
$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \underbrace{\left( \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \right) : \left( \frac{c \cdot b}{d \cdot b} \right)}_{\text{Por (1)}} = \frac{ad}{bd} : \frac{cb}{bd} = \left( ad \cdot \frac{1}{bd} \right) : \left( cb \cdot \frac{1}{bd} \right) = ad : cb = \frac{ad}{bc} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Pero dicho fundamento, al igual que el de multiplicación de fracciones, es de origen algebraico y no apto para ser trabajado en este nivel. Por esta razón, en esta unidad se procura que el fundamento que los alumnos puedan dar a los algoritmos encontrados, sea en base al modelo escogido y, por consiguiente, al trabajo realizado en clases.

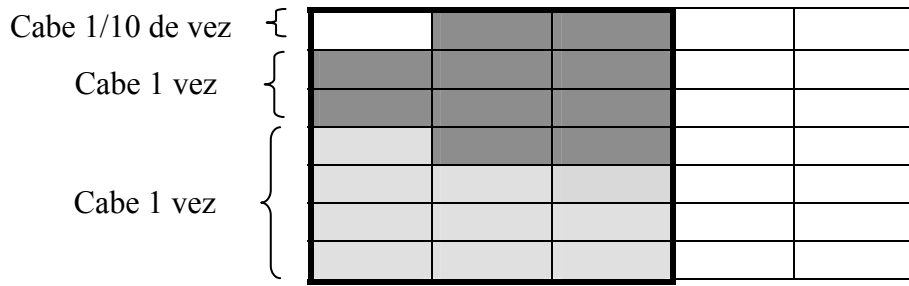
Es importante tener presente que, utilizando una representación gráfica apropiada, se pueden resolver distintos problemas de división de fracciones.

**Ejemplo 1:** Para resolver la división  $\frac{3}{5} : \frac{2}{7}$  podemos plantearnos la pregunta: ¿cuántas veces cabe

$\frac{2}{7}$  en  $\frac{3}{5}$ ?, y la siguiente representación gráfica nos puede ayudar a obtener la solución:

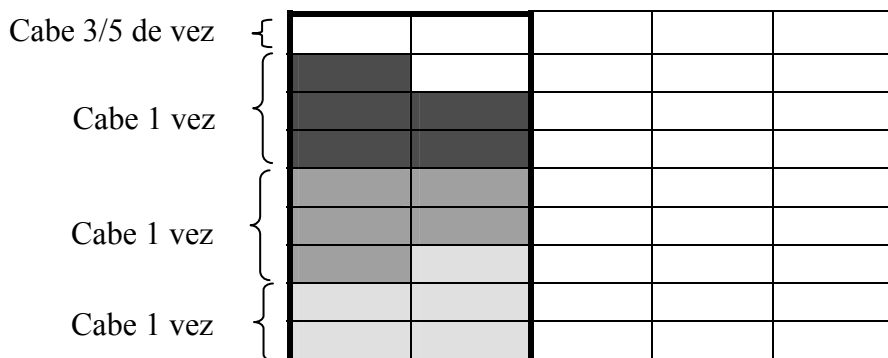
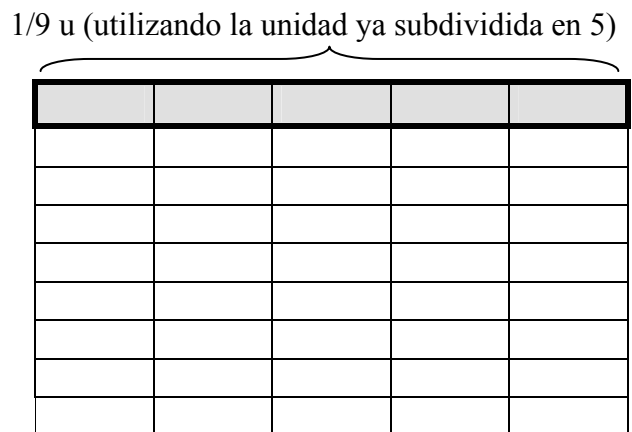
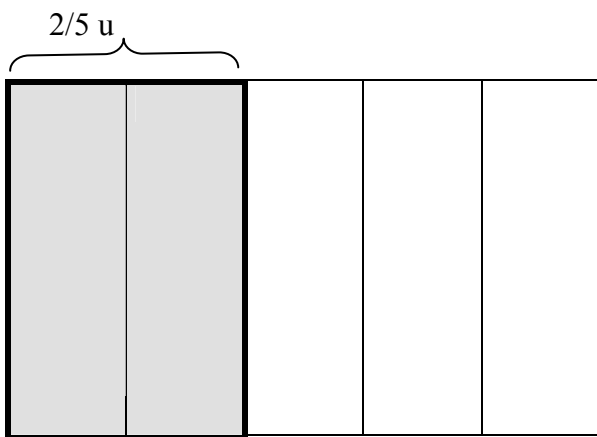






El trozo que representa los  $\frac{2}{7}$  del rectángulo cabe  $2 + \frac{1}{10}$  de vez en el trozo que representa los  $\frac{3}{5}$  del rectángulo (los 10 rectángulitos que forman el  $\frac{2}{7}$  del rectángulo caben 2 veces completas en el trozo que representa los  $\frac{3}{5}$  del rectángulo y no alcanza a caber una tercera vez, solo alcanza a caber uno de los 10 rectángulitos, esto es  $\frac{1}{10}$  de vez).

**Ejemplo 2:** Dada la división  $\frac{2}{5} : \frac{1}{9}$  se trata de responder a la pregunta ¿cuántas veces cabe  $\frac{1}{9}$  en  $\frac{2}{5}$ , y la siguiente representación gráfica nos puede ayudar a obtener la solución:



El trozo que representa los  $\frac{1}{9}$  del rectángulo cabe  $3 + \frac{3}{5}$  de vez en el trozo que representa los  $\frac{2}{5}$  del rectángulo (los 5 rectángulitos que forman el  $\frac{1}{9}$  del rectángulo caben 3 veces completas en el trozo

que representa los  $\frac{2}{5}$  del rectángulo y no alcanza a caber una cuarta vez; solo alcanzan a caber 3 de los cinco rectangulitos del noveno, esto es  $\frac{3}{5}$  de vez).

*Este tipo de representaciones gráficas permite resolver la división de diversos pares de fracciones (dentro de ciertos rangos numéricos razonables para el trabajo con estas representaciones gráficas), y por tanto nos puede permitir avanzar en el aprendizaje de la división de dos fracciones cualesquiera.*

- La multiplicación y la división son inversas entre sí: esto quiere decir que si un número  $a$  lo multiplico por un número cualquiera  $b$  y luego lo divido por este mismo número  $b$ , obtengo como resultado el número dado inicialmente  $a$ . Esto es:  $(a \cdot b) : b = a$ . Del mismo modo,  $(a : b) \cdot b = a$ .

Por ello, el que la multiplicación y la división sean inversas entre sí implica que podemos definir el cociente como el número que, multiplicado por el divisor, iguala al dividendo, como se muestra a continuación:

Como  $(a : b) \cdot b = a$ , si  $a : b = c$

$$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{c} \bullet b = a$$

#### **IV ORIENTACIONES PARA EL PROFESORADO: Estrategia Didáctica**

La estrategia didáctica descrita a continuación consiste en generar un proceso acotado en cuatro etapas, en las cuales se propone a los niños y niñas un conjunto de tareas matemáticas con distintas condiciones de realización. A través del estudio de dichas tareas se enfrentan a situaciones que les permitan, a partir de sus conocimientos previos, alcanzar los aprendizajes esperados por la Unidad.

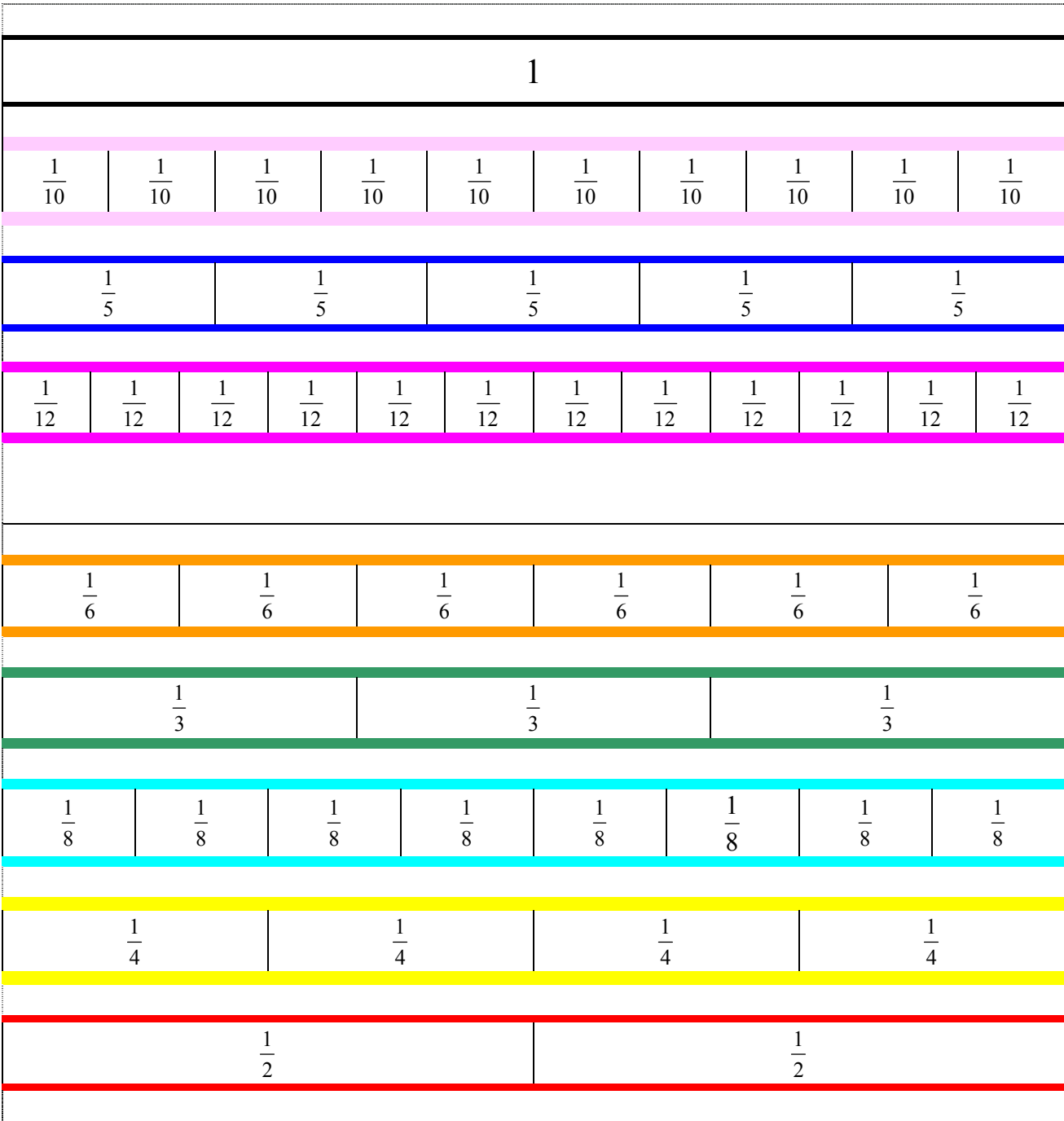
En general, cada etapa de esta Unidad parte con el planteamiento de problemas multiplicativos de variación proporcional, los que se resolverán por una multiplicación o una división, según corresponda. En una primera instancia los problemas se plantean para ser resueltos utilizando tiras y fracciones de tiras cortadas en papel, para permitir al alumnado un primer encuentro con el tipo de problemas en cuestión, (esto les permitirá entender mejor la problemática, al desarrollar el gesto correspondiente con el material concreto, mostrándolo y explicándolo a todo el curso. En una segunda instancia se les plantean problemas que no es posible resolver utilizando el material concreto y, una vez resueltos cada uno de estos problemas, se pide que justifiquen sus respuestas. De este modo se espera que vayan surgiendo de manos de los alumnos las técnicas apropiadas para resolver los problemas planteados.

La actividad descrita se va complejizando durante cada etapa, con el fin de que los estudiantes vayan haciendo progresar sus técnicas y descubriendo patrones de regularidad. Estos patrones (futuros algoritmos de cálculo) deberán ser debidamente fundamentados por los alumnos y, una vez que hayan dado sus justificaciones, el profesor o profesora puede reforzarlos o complementarlos adecuadamente.

El trabajo continúa con una ficha en la que alumnas y alumnos se enfrentan a distintos problemas de multiplicación o división, según sea el caso, bajo las condiciones de realización que corresponda. De este modo, refuerzan e interiorizan las generalizaciones encontradas como técnicas de resolución.

Finalmente, tras la revisión de la ficha correspondiente, el trabajo concluye con la sistematización de los nuevos aprendizajes estudiados, para lo cual se incluye en el material de los estudiantes una ficha de sistematización para cada etapa en que corresponda.

El material consiste en 1 juego de tiras de tamaño 1 unidad y trozos de papel de las siguientes medidas ( $1/2$ ,  $1/3$ ,  $1/4$ ,  $1/5$ ,  $1/6$ ,  $1/8$ ,  $1/10$  y  $1/12$  de tira), similar al que se muestra a continuación:



Para desarrollar esta Unidad es necesario que cada docente cuente con una ampliación del material con que cuentan los estudiantes, en los que aparezca escrita la fracción de tira a la que corresponde cada trozo, de modo que sea visible con claridad. Este material puede pegarse a la pizarra mediante la ayuda de masilla adhesiva (ya que se despega sin dificultad, no daña la superficie y es reutilizable), de modo que se pueda realizar un trabajo o puesta en común colectiva.

Para ello, se necesitan al menos dos juegos de tiras de papel como las que se describen a continuación:

- **1 tira blanca de largo 60 cm y ancho 13 cm, que representa la unidad.**
- **2 tiras rojas de largo 30 cm y ancho 13 cm, que representa  $\frac{1}{2}$  unidad.**
- **3 tiras verde de largo 20 cm y ancho 13 cm, que representa  $\frac{1}{3}$  unidad.**
- **4 tiras amarillas de largo 15 cm y ancho 13 cm, que representa  $\frac{1}{4}$  unidad.**
- **5 tiras azul de largo 12 cm y ancho 13 cm, que representa  $\frac{1}{5}$  unidad.**
- **6 tiras naranjas de largo 10 cm y ancho 13 cm, que representa  $\frac{1}{6}$  unidad.**
- **8 tiras celestes de largo 7,5 cm y ancho 13 cm, que representa  $\frac{1}{8}$  unidad.**
- **10 tiras rosadas de largo 6 cm y ancho 13 cm, que representa  $\frac{1}{10}$  unidad.**
- **12 tiras lila de largo 5 cm y ancho 13 cm, que representa  $\frac{1}{12}$  unidad.**

## Primera etapa

---

En la primera etapa, el trabajo del alumnado estará orientado a desarrollar una técnica que les permita tanto dividir una fracción cualquiera por un número natural, como multiplicar una fracción unitaria por una fracción cualquiera. Estos dos aprendizajes se trabajan en paralelo, dada su estrecha relación:

$$\frac{a}{b} : n = \frac{1}{n} \cdot \frac{a}{b},$$

“Al repartir equitativamente una cantidad  $\frac{a}{b}$  entre  $n$  personas a cada uno de ellos le toca  $\frac{1}{n}$  de la cantidad  $\frac{a}{b}$ ”.

Para lograr los objetivos propuestos, la tarea de esta etapa consistirá en resolver problemas de división en situaciones de reparto equitativo, así como problemas de multiplicación en situaciones de ponderación de una medida en que el factor de ponderación es una fracción unitaria (ver *desarrollo de las ideas centrales, página 14*).

► Para alcanzar las metas de esta etapa, se comienza combinando problemas de división (en situaciones de reparto equitativo) **cuyos dividendos son fracciones unitarias**, así como problemas de multiplicación (en situaciones de ponderación de una medida) en los que **ambos factores son fracciones unitarias**. Estas restricciones tienen el propósito de facilitar a niñas y niños la obtención, verificación y comprensión de resultados, así como la posterior generalización a problemas en que se divide cualquier fracción por un número natural o se multiplica una fracción unitaria (el factor de ponderación) por una fracción cualquiera.

Estos problemas deben ser resueltos grupalmente, utilizando el material (tiras y trozos de tira), de modo que realicen el reparto y comprendan así la problemática. Una vez resueltos los problemas, es recomendable revisarlos colectivamente, utilizando el material de que dispone cada docente e invitando al curso a compartir las diferentes técnicas que hayan surgido.

**Ejemplo 1:** Andrés reparte equitativamente  $\frac{1}{4}$  barra de chocolate entre sus 3 mejores amigos. ¿Qué cantidad de la barra de chocolate recibió cada uno de sus amigos?

Este problema podría resolverse utilizando el material disponible, buscando cuál de las piezas del material calza 3 veces exactas en el  $\frac{1}{4}$  o realizando el fraccionamiento de  $\frac{1}{4}$  en 3 partes iguales (mediante ensayo y error o con ayuda de la regla) y luego viendo cuál pieza es idéntica a los trozos obtenidos o cuántas veces cabe el trozo obtenido en la unidad. De donde se llega a que la respuesta al problema es, cada amigo recibió  $\frac{1}{12}$  de barra de chocolate.

1											
$\frac{1}{4}$											
$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$									

Hay que tener presente que podría hacerse un uso equivalente del material, si el problema planteado hubiera sido, por ejemplo: Andrés tiene  $\frac{1}{4}$  barra de chocolate y le convida  $\frac{1}{3}$  de su porción a su mejor amigo. ¿Qué cantidad de la barra de chocolate le convidó a Juan?

Otros posibles ejemplos que se pueden resolver con el material disponible son:

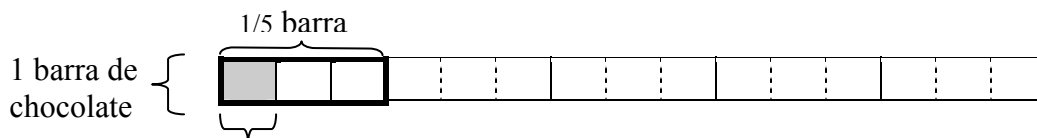
- En el caso de reparto equitativo, el reparto de:  $\frac{1}{2}$  entre 3;  $\frac{1}{2}$  entre 4;  $\frac{1}{2}$  entre 6;  $\frac{1}{3}$  entre 2;  $\frac{1}{3}$  entre 4;  $\frac{1}{6}$  entre 2.
- En el caso de ponderación de una medida:  $\frac{1}{2}$  de  $\frac{1}{3}$ ;  $\frac{1}{2}$  de  $\frac{1}{4}$ ;  $\frac{1}{2}$  de  $\frac{1}{6}$ ;  $\frac{1}{6}$  de  $\frac{1}{2}$ ;  $\frac{1}{3}$  de  $\frac{1}{2}$ ;  $\frac{1}{4}$  de  $\frac{1}{3}$ .

Cualquier otro caso no podrá ser resuelto con el material disponible, por ejemplo:

- En el caso de reparto equitativo, el reparto de:  $\frac{1}{4}$  entre 6;  $\frac{1}{2}$  entre 5;  $\frac{1}{5}$  entre 2; etc.
- En el caso de ponderación de una medida:  $\frac{1}{4}$  de  $\frac{1}{6}$ ;  $\frac{1}{5}$  de  $\frac{1}{4}$ ;  $\frac{1}{2}$  de  $\frac{1}{8}$ ; etc.

► A continuación se presentan a los estudiantes algunos problemas que **no** sean posibles de resolver con el material mencionado y se les pide resolverlos. Conjuntamente, mediante un diálogo dirigido por el profesor o profesora, se va elaborando una justificación de los procedimientos efectuados (*en caso de que los estudiantes no sean capaces de formular inmediatamente una explicación, el docente puede realizar preguntas como: ¿cuántas veces cabe la sexta parte de un  $\frac{1}{2}$  en  $\frac{1}{2}$ ?; ¿cuántas veces cabe un medio en la unidad?; ¿cuántas veces cabe  $\frac{1}{6}$  de  $\frac{1}{2}$  en la unidad?...*).

**Ejemplo 2:** Andrés reparte equitativamente  $\frac{1}{5}$  barra de chocolate entre sus 3 mejores amigos. ¿Qué cantidad de la barra de chocolate recibió cada uno de sus amigos?

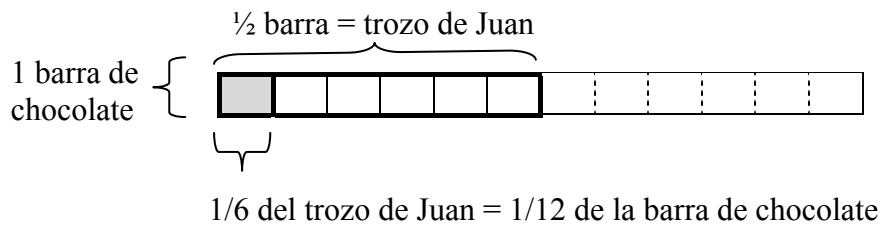


$\frac{1}{3}$  del trozo a repartir =  $\frac{1}{15}$  de la barra de chocolate

- En el gráfico se evidencia que si dividimos  $\frac{1}{5}$  barra de chocolate entre 3 personas, cada una obtiene  $\frac{1}{15}$  de barra. (*Este es un problema que **no** se puede resolver con el material concreto, ya que en dicho material no hay  $\frac{1}{15}$  de tira*).

- Por otro lado, se puede razonar que si se divide  $\frac{1}{5}$  de barra en 3 partes iguales, cada una de estas partes cabe 3 veces en el  $\frac{1}{5}$  barra, la que a su vez cabe 5 veces en una barra completa, por tanto cada una de las partes resultantes del reparto cabe  $3 \cdot 5 = 15$  veces en una barra completa, por lo que cada una de estas partes corresponde a  $\frac{1}{15}$  de barra. Esto es  $\frac{1}{5} : 3 = \frac{1}{5 \cdot 3} = \frac{1}{15}$ .

**Ejemplo 3:** Juan tiene  $\frac{1}{2}$  barra de chocolate y le convida  $\frac{1}{6}$  de su trozo a su mejor amigo. ¿Qué parte de la barra le convidó Juan a su amigo?



Existen otras opciones de representaciones gráficas, pero la que aquí se muestra está más relacionada con el trabajo realizado por los alumnos con el material concreto y, por ello, en esta unidad decidimos trabajar con él.

- En el gráfico se evidencia que si tengo  $\frac{1}{6}$  de  $\frac{1}{2}$  barra de chocolate, entonces tengo  $\frac{1}{12}$  de barra de chocolate. (Este es un problema que sí se puede resolver con el material concreto, ya que dicho material contiene trozos de tamaño  $\frac{1}{2}$  y  $\frac{1}{12}$  de tira).
- Por otro lado, es posible razonar que  $\frac{1}{6}$  de  $\frac{1}{2}$  cabe 6 veces en  $\frac{1}{2}$  y éste a su vez cabe 2 veces en la unidad (barra de chocolate en este caso), luego  $\frac{1}{6}$  de  $\frac{1}{2}$  cabe  $6 \cdot 2 = 12$  veces en la unidad, por lo que corresponde a  $\frac{1}{12}$  de dicha unidad. Esto es  $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6 \cdot 2} = \frac{1}{12}$ .

► Luego, cada docente plantea nuevos problemas a su curso. Esta vez los problemas a alternar son problemas de reparto equitativo, **en los cuales las cantidades a repartir son fracciones cualesquiera**, y problemas de ponderación de una medida, en los que **solo el factor de ponderación es una fracción unitaria**. Se trata de que los problemas planteados puedan resolverse con el uso del material, con la única salvedad de que los estudiantes deberán compartir sus materiales para disponer de la cantidad necesaria de tiras y trozos de papel. Los problemas son del tipo:

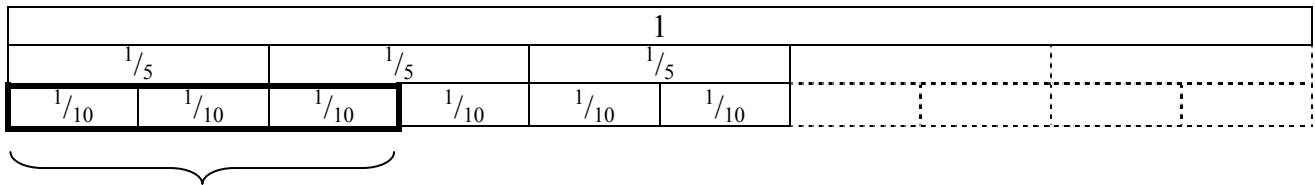
**Ejemplo 4:** Andrés reparte equitativamente  $\frac{3}{5}$  barra de chocolate entre sus 2 mejores amigos. ¿Qué cantidad de la barra de chocolate recibió cada uno de sus amigos?

(ó  $\frac{5}{3}$  de chocolate entre 2 amigos ó  $\frac{5}{4}$  de chocolate entre 3 amigos ó  $\frac{3}{2}$  de chocolate entre 4 amigos).

El problema del ejemplo 4 podría resolverse utilizando el material disponible, buscando cuál de las piezas del material calza un número par (múltiplo de 2) de veces en los  $\frac{3}{5}$  (lo que se puede resolver

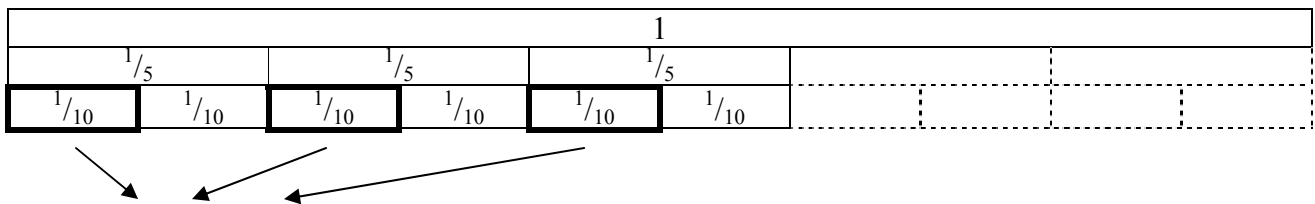


buscando cuál de las piezas del material calza 2 veces exactas en cada  $\frac{1}{5}$ ) y tomando la mitad de las piezas necesarias para completar los  $\frac{3}{5}$ .



Cantidad que recibe cada amigo

Otra forma de hacerlo es realizando el reparto concreto de los  $\frac{3}{5}$  entre 2 (repartiendo cada  $\frac{1}{5}$  entre 2 separadamente) y luego viendo cuál pieza es idéntica a los trozos obtenidos o cuántas veces cabe cada trozo obtenido en la unidad para, finalmente, identificar cuánto recibe cada participante del reparto (un trozo de los obtenidos por cada  $\frac{1}{5}$ , 3 en total). De donde se llega a que la respuesta al problema es, cada amigo recibió  $\frac{3}{10}$  de barra de chocolate.



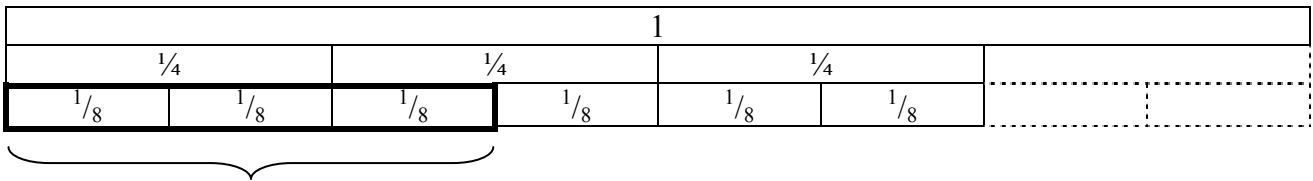
Cantidad que recibe cada amigo

Al trabajar con estos problemas en los que no hay simplificación, es fácil observar que repartir  $\frac{3}{5}$  en 2 partes iguales es equivalente a repartir cada quinto en dos partes iguales y luego tomar 3 de estas partes (una por cada quinto). Como  $\frac{1}{5} : 2 = \frac{1}{10}$ , entonces cada amigo recibe  $3 \cdot \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$ , de donde  $\frac{3}{5} : 2 = \frac{3}{10}$ . Esta observación es fundamental al momento de desarrollar la Ficha 1.

**Ejemplo 5:** Juan tiene  $\frac{3}{4}$  barra de chocolate y le convida  $\frac{1}{2}$  de su trozo a su mejor amigo. ¿Qué parte de la barra le convidó Juan a su amigo? (ó  $\frac{1}{4}$  de  $\frac{3}{2}$  ó  $\frac{1}{5}$  de  $\frac{3}{2}$  ó  $\frac{1}{4}$  de  $\frac{5}{3}$ ).

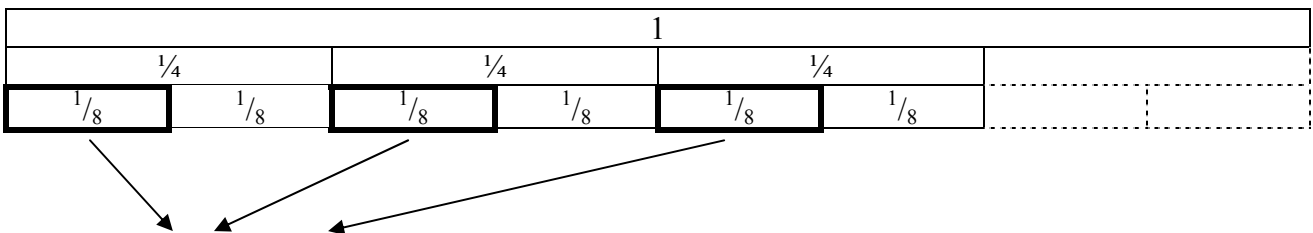
El problema del ejemplo 5 podría resolverse utilizando el material disponible, buscando cuál de las piezas del material calza un número par (múltiplo de 2) de veces en los  $\frac{3}{4}$  (lo que se puede resolver

buscando cuál de las piezas del material calza 2 veces exactas en cada  $\frac{1}{4}$ ) y tomando la mitad de las piezas necesarias para completar los  $\frac{3}{4}$ .



Cantidad que recibe cada amigo

Otra forma de hacerlo es realizando el reparto concreto de los  $\frac{3}{4}$  entre 2 (repartiendo cada  $\frac{1}{4}$  entre 2 separadamente) y luego viendo cuál pieza es idéntica a los trozos obtenidos o cuántas veces cabe cada trozo obtenido en la unidad para, finalmente, identificar cuánto recibe cada participante del reparto (un trozo de los obtenidos por cada  $\frac{1}{4}$ , 3 en total). De donde se llega a que la respuesta al problema es, cada amigo recibió  $\frac{3}{8}$  de barra de chocolate.

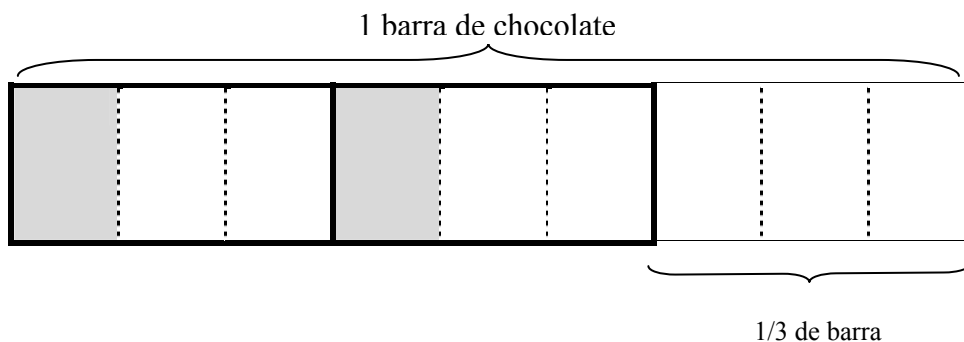


Cantidad que recibe cada amigo

Al trabajar con estos problemas en los que no hay simplificación, es fácil observar que  $\frac{1}{2}$  de  $\frac{3}{4}$  es equivalente a tomar  $\frac{1}{2}$  de cada cuarto, esto es 3 trozos de tamaño  $\frac{1}{2}$  de  $\frac{1}{4}$  y como  $\frac{1}{2}$  de  $\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$  entonces  $\frac{1}{2}$  de  $\frac{3}{4} = \frac{3}{8}$ . Esta observación es fundamental al momento de desarrollar la Ficha 1.

► A continuación, los alumnos y alumnas resolverán en **grupos de 4 integrantes** la **Ficha 1**, la que se recomienda sea revisada colectivamente, pidiéndoles que justifiquen sus procedimientos. Hay que destacar que estos problemas no podrán ser resueltos directamente con las tiras, ya que, para poder resolverlos, las tiras de que disponen deberán ser manipuladas (dobladas o cortadas), según se explica en los ejemplos 4 y 5. Otra posibilidad es que resuelvan estos problemas mediante una representación gráfica. En este proceso es importante rescatar aquellos procedimientos y justificaciones que se muestran en los siguientes ejemplos (sin invalidar los procedimientos alternativos).

**Ejemplo 6:** Juan tiene  $\frac{2}{3}$  de barra de chocolate y la reparte equitativamente entre sus tres hijos. ¿Qué parte de la barra de chocolate le tocó a cada hijo?

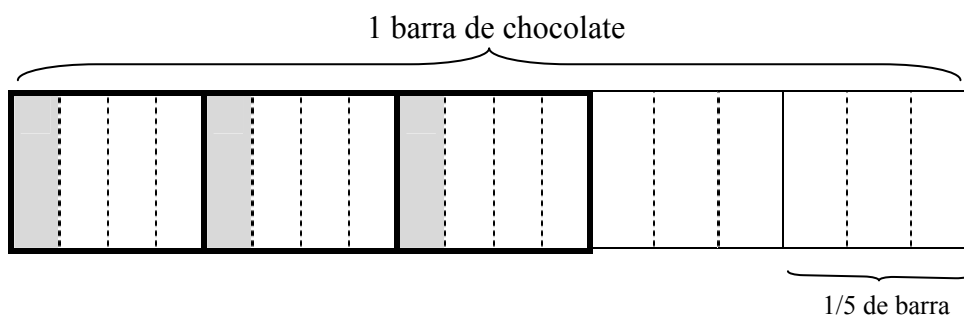


- En el gráfico se evidencia que si reparto  $\frac{2}{3}$  de barra de chocolate entre 3, a cada uno le toca  $\frac{2}{9}$  de barra de chocolate.

- Además, repartir  $\frac{2}{3}$  entre tres es equivalente a repartir cada tercio en tres partes y tomar dos de estas partes (una por cada tercio), y como al repartir cada  $\frac{1}{3}$  entre 3 a cada uno le toca  $\frac{1}{9}$  de la unidad, entonces al repartir  $\frac{2}{3}$  entre 3 a cada uno le toca dos veces  $\frac{1}{9}$ , esto es  $\frac{2}{9}$ .

Así,  $\frac{2}{3} : 3$  es equivalente a  $\frac{2}{3} : 3 = 2 \cdot (\frac{1}{3} : 3) = 2 \cdot (\frac{1}{3 \cdot 3}) = 2 \cdot \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$ .

**Ejemplo 7:** Juan tiene  $\frac{3}{5}$  de barra de chocolate y le convida  $\frac{1}{4}$  de su trozo a Pedro. ¿Qué parte de la barra de chocolate le convidó Juan a Pedro?



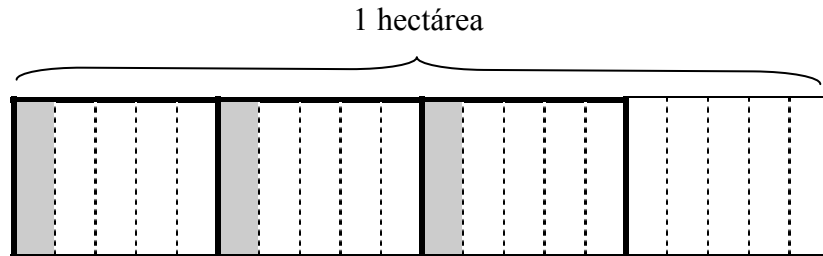
- Calcular  $\frac{1}{4}$  de  $\frac{3}{5}$  es equivalente a partir cada quinto en cuatro partes y tomar tres de estas partes (una por cada quinto), y como  $\frac{1}{4}$  de  $\frac{1}{5}$  es  $\frac{1}{20}$  de la unidad, entonces  $\frac{1}{4}$  de  $\frac{3}{5}$  es igual a tres veces  $\frac{1}{20}$ , esto es  $\frac{3}{20}$ .

De aquí que  $\frac{1}{4}$  de  $\frac{3}{5}$  es equivalente a  $\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{4} \cdot 3 \cdot \frac{1}{5} = 3 \cdot (\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5}) = 3 \cdot \frac{1}{4 \cdot 5} = \frac{3}{4 \cdot 5} = \frac{3}{20}$ .

Antes de seguir adelante, se les puede presentar un par de problemas más a los alumnos y alumnas para que los resuelvan, invitándolos a confrontar y analizar las técnicas utilizadas, fundamentando sus resultados. Es interesante sugerirles graficar la situación, en caso de que la representación gráfica no haya surgido como una técnica. A continuación se muestran dos formas distintas de resolver gráficamente el mismo problema.

**Ejemplo 8:** Repartir equitativamente  $\frac{3}{4}$  hectárea de terreno entre 5 personas.

**Gráfico 1:** Se divide cada cuarto en 5 partes y se toma tres de esas partes (ya que son 3 cuartos los que se repartirán). Esto es equivalente a repartir por separado cada una de las 3 partes entre 5 (parto una de ellas en 5 y la reparto, luego la otra y así sucesivamente).

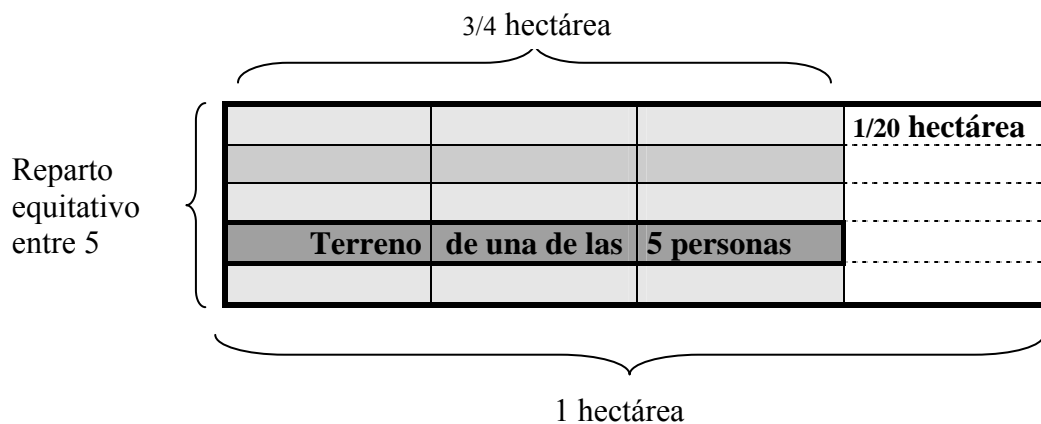


- La parte achurada muestra lo que recibe una (y por tanto cada una) de las personas. Contando, podemos saber que a cada persona le corresponden  $\frac{3}{20}$  hectáreas.

- Por otro lado, se puede razonar que si se reparte cada  $\frac{1}{4}$  de hectárea entre 5 personas, cada una obtiene  $\frac{1}{20}$  de hectárea y como debo repartir  $\frac{3}{4}$  de hectárea, cada persona recibirá  $3 \cdot \frac{1}{20} = \frac{3}{20}$  de hectárea.

*Esta representación gráfica es completamente extensible al caso de los problemas que se resuelven mediante una multiplicación (ponderación de una medida). De hecho, en el gráfico se muestra  $\frac{1}{5}$  de los  $\frac{3}{4}$ , es decir,  $\frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4}$ .*

**Gráfico 2:** Otra opción muy utilizada, es la que muestra la siguiente representación gráfica. No obstante, a lo largo de la Unidad hemos utilizado la representación gráfica de la opción 1, ya que dada la naturaleza del material concreto que se le entrega al alumnado (largo y angosto), dicha representación gráfica se relaciona más directamente con el trabajo que realizarán.



► En caso de que los alumnos no hayan reconocido las operaciones en juego (multiplicación o división, según corresponda) cada docente puede generar un paralelo con problemas de la misma índole, pero en el conjunto de los números naturales, por ejemplo:

- Para la división (reparto equitativo): “*Repartir equitativamente 10 litros de bebida entre 2 personas*”, *este problema se resuelve con la operación  $10:2 = 5$* . Hay que destacar que es el mismo tipo de problema si en vez de repartir 10 litros se repartiera una fracción de litro ( $\frac{1}{2}$  litro,  $\frac{1}{4}$  litro,  $\frac{2}{5}$  litro, etc.) De este modo, los alumnos podrán reconocer el tipo de problemas planteados, como problemas asociados a una división de dos números.
- Para la multiplicación (ponderación de una medida): “*Tengo 5 chocolates y Juan tiene el triple (el doble, el cuádruple, etc.) de los chocolates que yo tengo. ¿Cuánto chocolate tiene Juan?*”, *problema que se resuelve con la operación  $3 \cdot 5 = 15$  (el triple de 5 es igual a 15)*. Hay que destacar que es la misma problemática si en vez de tener el triple tuviera un tercio (la cuarta parte, dos quintos, etc.) de los 5 chocolates. De este modo, alumnas y alumnos podrán reconocer el tipo de problemas planteado, como problemas asociados a una multiplicación de dos números.

► A continuación, se recomienda presentar al curso las operaciones ya resueltas (tanto las de multiplicación como las de división, por separado, procurando expresar los factores, productos, dividendos y cuocientes como fracción y NO como número mixto) e invitar a buscar las regularidades, las que deben ser adecuadamente justificadas, de acuerdo a como se señala en los ejemplos resueltos más arriba. (*En caso de que los estudiantes no sean capaces de formular por si solos una explicación, cada docente puede realizar preguntas como: ¿Si reparto  $1/5$  barra de chocolate entre 3 personas, qué parte de la barra le toca a cada uno? ¿Y si reparto  $2/5$  barra de chocolate entre 3 personas, qué parte de la barra le toca a cada uno? ¿Y si reparto  $3/5$  barra de chocolate entre 3 personas, qué parte de la barra le toca a cada uno? ...*). Una vez detectadas las regularidades, se puede ver que dividir una fracción cualquiera por un natural es equivalente a multiplicar dicha fracción por la fracción unitaria cuyo denominador sea el natural en cuestión (o lo que es lo mismo, por el inverso multiplicativo de dicho natural). Esto es  $\frac{a}{b} : 5 = \frac{1}{5} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b \cdot 5}$ , lo que se puede justificar con el hecho de que repartir equitativamente una cantidad  $\frac{a}{b}$  entre 5 personas ( $\frac{a}{b} : 5$ ) equivale a dar  $\frac{1}{5}$  de dicha cantidad  $\frac{a}{b}$  a cada uno de ellos ( $\frac{1}{5} \cdot \frac{a}{b}$ ). Otra forma de justificar este fenómeno es viendo que  $\frac{a}{b} : 3$  es equivalente a buscar el valor de cada una de las partes resultantes de dividir  $\frac{a}{b}$  en 3 partes iguales, es decir, a buscar  $\frac{1}{3}$  de  $\frac{a}{b}$ , esto es  $\frac{1}{3} \cdot \frac{a}{b}$ . Del mismo modo que, en los naturales, dividir una cantidad (por ejemplo 24) por 2 es equivalente a encontrar la mitad de esa cantidad (12). Esto es fácil de evidenciar con la ayuda del material concreto, ya que el gesto o la acción realizada por los alumnos será el mismo tanto en los problemas asociados con la división (reparto equitativo), como en aquellos que se resuelven mediante multiplicación (ponderación de una medida, en que el factor de ponderación es una fracción unitaria).

► Este es el momento de resolver la **Ficha 2**, la que se recomienda que sea trabajada individualmente y que, una vez resuelta, se corrija colectivamente. Es importante destacar que esta ficha está pensada para ser resuelta **sin el material** (tiras y parches); en efecto, se espera que el desarrollo y corrección de esta ficha sea una buena oportunidad para utilizar los algoritmos ya encontrados. Por esta razón, en caso de que alumnas y alumnos acudan al uso de gráficos y no al

uso de los algoritmos, es recomendable preguntarles cuál es la operación que permite dar respuesta a cada problema.

► Durante el cierre de esta etapa es importante destacar que, por ejemplo, como una unidad tiene 3 tercios, si reparto  $\frac{1}{3}$  en 4 partes iguales cada una de estas partes cabe  $3 \cdot 4 = 12$  veces en la unidad. Además, repartir  $\frac{2}{3}$  entre 4 personas es equivalente a repartir, “*separadamente*”, cada tercio en 4 partes iguales, tocándole a cada uno una de estas partes por cada tercio que haya (en este caso 2, pues hay 2 tercios), esto es:  $\frac{2}{3} : 4 = 2 \cdot (\frac{1}{3} : 4) = 2 \cdot \frac{1}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ .

Del mismo modo, como  $\frac{1}{3}$  cabe 3 veces en la unidad, y  $\frac{1}{4}$  de  $\frac{1}{3}$  cabe 4 veces en el tercio, entonces  $\frac{1}{4}$  de  $\frac{1}{3}$  cabe  $3 \cdot 4 = 12$  veces en la unidad. Además, tomar  $\frac{1}{4}$  de  $\frac{2}{3}$  es equivalente a tomar  $\frac{1}{4}$  de cada tercio, esto es:  $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = 2 \cdot (\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}) = 2 \cdot \frac{1}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ .

Es importante también reforzar el gráfico trabajado, dado su carácter de herramienta para resolver un problema en caso de desconocer la operación a realizar o de haber olvidado el algoritmo. Se deben rescatar, además, los algoritmos estudiados, haciendo fuerte hincapié en la relación existente entre ellos:

$$\frac{a}{b} : n = \frac{1}{n} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{n \cdot b},$$

*Repartir una cantidad entre  $n$  participantes es lo mismo que tomar la  $n$ -ésima parte de esa cantidad. De aquí que, dividir una fracción cualquiera por un natural  $n$ , es equivalente a multiplicar dicha fracción por la fracción unitaria cuyo denominador es el natural  $n$ , y esto es equivalente, a su vez, a multiplicar el denominador de la fracción dividiendo por el natural  $n$ .*

## **Segunda etapa**

---

En la segunda etapa se continúa con el trabajo de multiplicación realizado durante la etapa anterior, pero extendiéndolo a multiplicaciones en las que se multiplican dos fracciones cualesquiera. Para dicho propósito, la tarea de esta etapa consistirá en resolver problemas multiplicativos de ponderación de una medida en que el **factor de ponderación es una fracción propia cualquiera**.

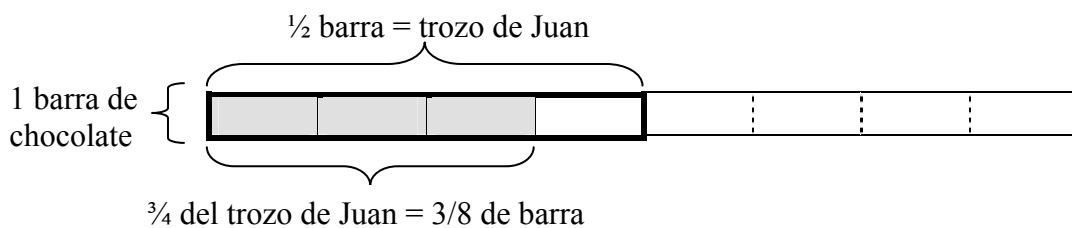
► El profesor o profesora comienza con un par de problemas de **multiplicación** como los vistos en la clase anterior (ponderación de una medida) y pide a su curso resolverlos, reforzando el hecho de que, para determinar  $\frac{1}{c}$  de  $\frac{a}{b}$ , se puede partir en  $c$  partes cada  $b$ -avo y luego tomar  $a$  de estas partes (o una parte de cada  $b$ -avo). **Esto es, por ejemplo**, para tomar  $\frac{1}{5}$  de  $\frac{3}{4}$ , es posible dividir cada cuarto en 5 partes (obteniéndose así veinteavos) y por cada cuarto (son 3 cuartos en total) tomar una de estas partes (con lo que, finalmente, se tienen 3 veinteavos).

► Una vez resueltos algunos ejercicios y habiendo repasado las justificaciones utilizadas en la clase anterior, el docente plantea a su curso: **Si le convido  $\frac{1}{9}$  de  $\frac{3}{4}$  de barra de chocolate a mi hermana mayor, ¿qué parte de la barra recibe? ... Una vez que contesten, se les pregunta: Si a mi hermano menor, en vez de convidarle  $\frac{1}{9}$  de los  $\frac{3}{4}$  de barra de chocolate, le convido  $\frac{2}{9}$  de los  $\frac{3}{4}$  de barra de chocolate, ¿qué parte de la barra recibe? ... Se puede apoyar a los estudiantes con preguntas como: ¿Quién recibió más? ¿Por qué? ¿Cuánto más recibió el hermano menor? (se trata de que los alumnos detecten que el hermano menor recibió el doble que la hermana mayor). Una vez que hayan respondido, pedir que justifiquen sus resultados; la hermana mayor recibió  $\frac{1}{9}$  de  $\frac{3}{4} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$  de barra de chocolate; como el hermano menor recibió el doble que la hermana mayor, entonces él recibió  $\frac{2}{9}$  de  $\frac{3}{4} = 2$  veces  $\frac{1}{9}$  de  $\frac{3}{4} = 2 \cdot \frac{3}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$  de barra de chocolate) ... **Por último, a mi mamá le convidé  $\frac{5}{9}$  de los  $\frac{3}{4}$  de barra de chocolate, ¿qué parte de la barra recibe mi mamá? ... Una vez que hayan respondido, pedir que justifiquen sus resultados (la hermana mayor recibió  $\frac{1}{9}$  de  $\frac{3}{4} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$  de barra de chocolate; como la mamá recibió cinco veces lo que recibió la hermana mayor, entonces ella recibió  $\frac{5}{9}$  de  $\frac{3}{4} = 5$  veces  $\frac{1}{9}$  de  $\frac{3}{4} = 5 \cdot \frac{3}{36} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$  de barra de chocolate).****

► Preguntar a los alumnos **cómo podrían obtener, utilizando el material concreto o un gráfico,  $\frac{1}{4}$  de  $\frac{3}{5}$** . Luego, preguntar **cómo podrían obtener  $\frac{3}{4}$  de  $\frac{3}{5}$**  (se recomienda que se les dé el tiempo necesario, de modo que el reparto sea efectuado efectivamente por ellos, mediante el uso de material concreto). Es importante que niñas y niños visualicen que, así como para obtener  $\frac{1}{4}$  de  $\frac{3}{5}$  se puede dividir cada quinto en 4 partes y se toma una de estas partes por cada quinto, del mismo modo, para obtener  $\frac{3}{4}$  de  $\frac{3}{5}$  es posible dividir cada quinto en 4 partes y tomar 3 de estas partes por cada quinto (como son 3 quintos, en total se toman  $3 \cdot 3 = 9$  partes).

La profesora o profesor podría plantear algunos problemas más en la pizarra e invitar a resolverlos. Para ello pueden ayudarse utilizando las tiras y trozos de papel, una representación gráfica o mediante el análisis ya visto. Al momento de confrontar las técnicas, es bueno invitarlos a graficar la situación en caso de que la representación gráfica no haya surgido como una técnica de parte de los alumnos, ya que en caso de no disponer de material concreto, no reconocer la operación a efectuar o no recordar el algoritmo, el gráfico puede ser una buena herramienta para resolver un problema.

**Ejemplo 1:** Juan tiene  $\frac{1}{2}$  de barra de chocolate y le convida  $\frac{3}{4}$  de su trozo a Pedro. ¿Qué parte de la barra de chocolate le convidó Juan a Pedro?



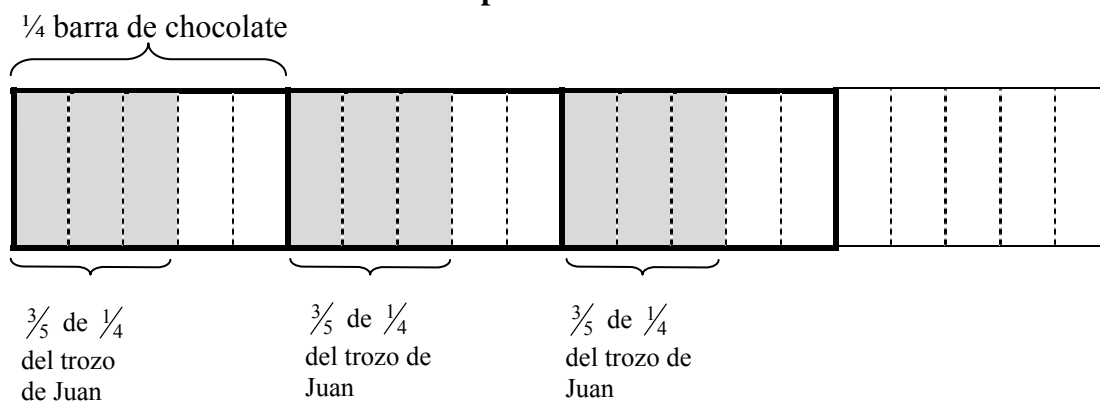
- Del gráfico se puede inferir que si tengo  $\frac{3}{4}$  de  $\frac{1}{2}$  de barra de chocolate, en total tengo  $\frac{3}{8}$  de barra de chocolate.

- Además, un cuarto de un medio cabe 8 veces en el entero, es decir, cada cuarto de un medio es equivalente a un octavo del entero y como son tres cuartos de un medio entonces son tres octavos de la unidad. Esto es  $\frac{3}{4}$  de  $\frac{1}{2}$  es equivalente a  $(\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = 3 \cdot (\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}) = 3 \cdot \frac{1}{4 \cdot 2} = \frac{3}{4 \cdot 2} = \frac{3}{8})$ .

- Por otro lado, este problema pudo haber sido resuelto directamente, mediante la multiplicación de una fracción cualquiera por una fracción unitaria, vista en la etapa anterior, mediante la propiedad conmutativa de la multiplicación.

**Ejemplo 2:** Juan tiene  $\frac{3}{4}$  de barra de chocolate y le convida  $\frac{3}{5}$  de lo que tiene a un amigo, ¿qué parte de la barra de chocolate le convidó Juan a Pedro?

### Reparto 1



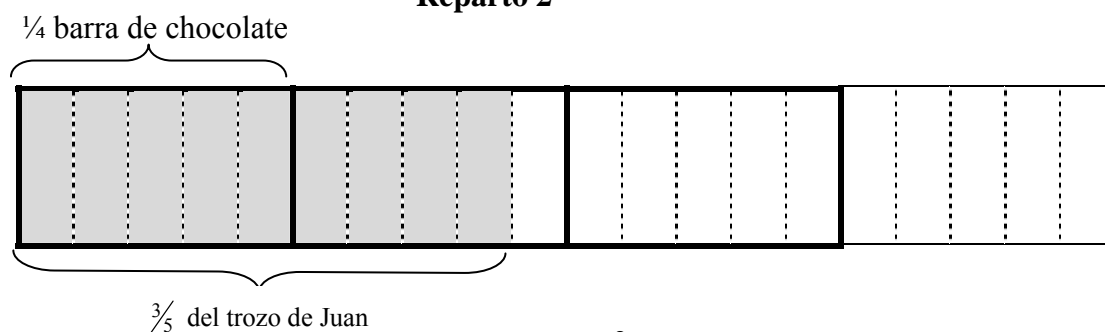
- En el gráfico se puede ver que  $\frac{3}{5}$  de  $\frac{3}{4}$  equivale a  $\frac{9}{20}$ .

- Por otro lado, calcular  $\frac{3}{5}$  de  $\frac{3}{4}$  es equivalente al triple de  $\frac{1}{5}$  de  $\frac{3}{4}$ , y como  $\frac{1}{5}$  de  $\frac{3}{4} = \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{20}$  entonces  $\frac{3}{5}$  de  $\frac{3}{4} = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4} = 3 \cdot (\frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4}) = 3 \cdot \frac{3}{20} = \frac{9}{20}$  de la barra de chocolate.

Es importante que los alumnos y alumnas entiendan que, para efectos prácticos, se podrían tomar los 9 trozos achurados en cualquier orden, por ejemplo:



## Reparto 2



En ambos casos, la parte achurada corresponde a los  $\frac{3}{5}$  del trozo de Juan. Lo importante es destacar que los repartos 1 y 2 son equivalentes entre sí, solo que el primero permite visualizar mejor el procedimiento efectuado.

En esta última representación gráfica, uno podría decir que Juan le convidó a Pedro  $\frac{1}{4} + \frac{4}{20}$ . Esto

es cierto, pero se pide expresarlo con un solo valor, en este caso  $\frac{1}{4} + \frac{4}{20} = \frac{5}{20} + \frac{4}{20} = \frac{9}{20}$  le convidó Juan a Pedro.

► Al momento de realizar la revisión grupal de estos ejercicios, hay que procurar que los alumnos confronten las técnicas utilizadas, justificando sus procedimientos. **En caso de que no hayan reconocido las operaciones en juego, es importante destacar que, al igual que los problemas de ponderación de una medida estudiados en la clase anterior, los problemas resueltos en esta clase corresponden a problemas de multiplicación.**

► A continuación, se recomienda presentar al curso las operaciones ya resueltas (procurando expresar ambos factores y el cociente como fracción y NO como número mixto) e invitarlos a buscar las regularidades, las que deben ser adecuadamente justificadas, de acuerdo a como se señala en los ejemplos resueltos más arriba. De este modo se espera que alumnas y alumnos reconozcan el hecho de que al multiplicar dos fracciones nos da como resultado una fracción cuyo numerador corresponde a la multiplicación de los numeradores de los factores y cuyo denominador corresponde a la multiplicación de los denominadores de los factores, esto es  $\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 3} = \frac{8}{15}$ .

Destacar el hecho sorprendente de que al multiplicar un número cualquiera por una fracción menor que uno, dicho número disminuye su valor. Es importante que comprendan por qué se produce (por ejemplo: Juan tenía 12 dulces y le dio  $\frac{5}{12}$  de sus dulces a su hermano. ¿Cuántos dulces le dio Juan a su hermano?” En este caso la respuesta es: “le dio 5 dulces”, que corresponden a  $\frac{5}{12}$  de los 12 dulces - **una parte del total** - y por tanto, una cantidad obviamente menor que el total de dulces:  $\frac{5}{12} \cdot 12 = 5$  y  $5 < 12$ ).

► Luego, resuelven individualmente la **Ficha 3**. Una vez resuelta, es importante que sea corregida colectivamente. Debemos destacar que está pensada para ser resuelta **sin el material** (tiras y parches); en efecto, se espera que el desarrollo y corrección de esta ficha sea una buena oportunidad para utilizar los algoritmos ya encontrados. Por esta razón, en caso de que acudan al

uso de gráficos y no al uso de los algoritmos, es recomendable preguntarles cuál es la operación que permite dar respuesta a cada problema. Por otro lado, al momento de revisar el ejercicio 4 de la **Ficha 3** es importante reparar en los resultados de los ejercicios (g) al (k), destacando que al multiplicar una fracción cualquiera con otra fracción cuyo numerador y denominador sean iguales al denominador y numerador de la primera, respectivamente, siempre nos da como resultado la unidad. También, identificar este fenómeno con el concepto de inverso multiplicativo, explicando que el inverso multiplicativo de un número es aquel número que multiplicado por el primero nos da como resultado “1”. De aquí que:

dada una fracción  $\frac{a}{b}$  su inverso multiplicativo es  $\frac{b}{a}$ , ya que  $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$ .

► *Posteriormente, se aconseja invitar a los alumnos y alumnas a dar una mirada global respecto a la multiplicación de fracciones, permitiéndoles buscar las relaciones existentes entre el caso visto en esta etapa y el de la etapa anterior, de modo que reconozcan que este último caso presentado es el más general, que engloba al anterior y que, por tanto, basta con conocer este último algoritmo para resolver cualquier multiplicación de fracciones. Esta situación puede ser corroborada utilizando los ejercicios ya resueltos en las diversas clases (ejemplo:  $\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1 \cdot 2}{5 \cdot 3} = \frac{2}{15}$ ).*

Durante el cierre, institucionalizar el algoritmo encontrado para la multiplicación de fracciones:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

*Para multiplicar dos fracciones se multiplican los numeradores de ambos factores para obtener el numerador del producto y se multiplican los denominadores de ambos factores para obtener el denominador del producto.*

Insistir en el hecho de que este algoritmo es el más general y engloba al anterior ( $\frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a \cdot 1}{b \cdot c} = \frac{a}{b \cdot c}$ ); por tanto, basta con conocer el algoritmo más general para resolver cualquier multiplicación de fracciones.

Institucionalizar también el hecho de que dada una fracción cualquiera  $\frac{a}{b}$ , su inverso multiplicativo es  $\frac{b}{a}$ , ya que  $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$  (el inverso multiplicativo de una fracción cualquiera, es aquella fracción cuyo numerador y denominador son iguales al denominador y numerador de la primera, respectivamente). Por analogía,  $\frac{1}{a}$  es el inverso multiplicativo de  $a$ , ya que  $a \cdot \frac{1}{a} = 1$ .

Finalmente, en esta etapa se lleva a cabo la aplicación de una **prueba parcial de la unidad**. Una vez aplicada esta prueba, se sugiere que cada docente realice una corrección de la prueba en la pizarra, preguntando a niños y niñas los procedimientos que utilizaron. Si hubo errores, averiguar por qué se cometieron.

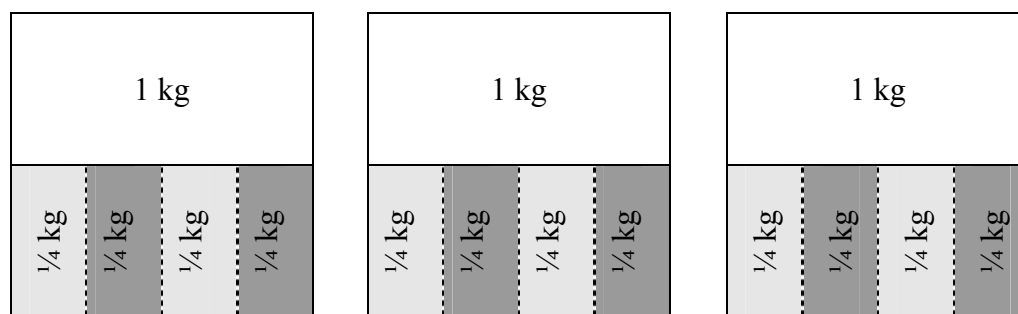
### Tercera etapa

En la tercera etapa, el trabajo del alumnado estará orientado a desarrollar una técnica que les permita dividir fracciones. El trabajo se centrará en las divisiones en las que el divisor es una fracción unitaria. Para lograr dicho propósito, la tarea de esta etapa consiste en resolver problemas de división en situaciones de **distribución en base a una medida**.

► Cada docente comienza presentando a todo el curso algunos problemas en que el **dividendo (cantidad a distribuir en base a una medida) sea una cantidad entera de unidades de medida** y el **divisor (la medida que debe tener cada parte) sea una fracción unitaria**. Estos problemas deben ser resueltos por el curso grupalmente, utilizando el material (tiras y trozos de tira), de modo que realicen el reparto y comprendan así la problemática. Una vez resueltos los problemas, es recomendable revisarlos colectivamente, utilizando el material de que dispone el profesor(a), invitando a los alumnos y alumnas a compartir las diferentes técnicas que hayan surgido. Es importante que los problemas sean variados, procurando que distintos niñas y niños pasen a la pizarra, e incluso, que estimen el resultado previo a resolverlo efectivamente con ayuda del material concreto. Se sugiere también, al final de este trabajo, incorporar algunos ejercicios que no sea posible resolver con el uso del material disponible (ya sea porque la cantidad total a distribuir es muy grande o porque la medida de cada parte es una cantidad fraccionaria no disponible en el material).

**Ejemplo 1:** Para distribuir 3 kg de harina en bolsas de  $\frac{1}{4}$  kg, ¿cuántas bolsas necesito?

Este problema podría resolverse utilizando el material disponible, viendo cuántas veces cabe  $\frac{1}{4}$  en 3 tiras o partiendo cada una de las 3 tiras en cuatro partes y luego contando los trozos obtenidos. De donde se llega a que la respuesta al problema es, necesito 12 bolsas.

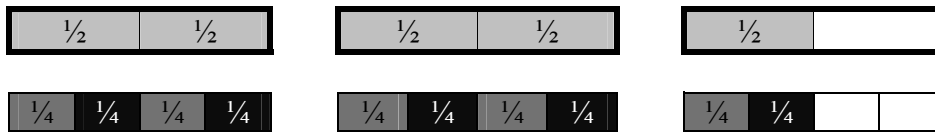


Contando, podemos afirmar que se necesitan 12 bolsas de  $\frac{1}{4}$  kg. De hecho, cada kg contiene 4 cuartos de kg y como son 3 unidades, contienen  $3 \cdot 4 = 12$  cuartos de kg.

Una vez resueltos estos problemas, se recomienda pedir a los alumnos y alumnas que compartan y expliquen las técnicas que utilizaron y que intenten justificarlas.

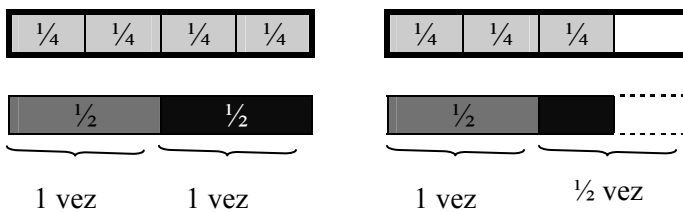
► A continuación se presentará la **Ficha 4**, con problemas de iguales características, pero en los cuales el dividendo es fraccionario; se recomienda que sea trabajada grupalmente (grupos de 4 integrantes). Se trata de comenzar abordando un problema en el que el cociente es una cantidad entera de unidades de medida, para posteriormente abordar algunos problemas en los que el cociente es una fracción. Alumnas y alumnos dispondrán de las tiras y trozos correspondientes, en caso de que quieran utilizarlos.

**Ejemplo 2:** Al distribuir  $\frac{5}{2}$  kg de harina en paquetes de  $\frac{1}{4}$  kg, ¿cuántos paquetes se obtienen?



Contando podemos afirmar que se obtienen 10 paquetes de  $\frac{1}{4}$  de kilo.

**Ejemplo 3:** Tengo que medir  $\frac{7}{4}$  kilos de harina y para ello dispongo de un envase con una capacidad de  $\frac{1}{2}$  kilo. ¿Cuántas medidas necesito?



Contando podemos afirmar que se necesitan  $3 \frac{1}{2}$  medidas. Es importante supervisar el trabajo de los alumnos. En caso de que contesten equivocadamente, por ejemplo, que se necesitan 4 medidas, hay que hacerles ver que no se utilizan las 4 medidas completas y, por otro lado, no basta con 3 medidas, porque en ese caso la cantidad medida sería insuficiente ya que faltaría una porción que, si bien no alcanza a medir  $\frac{1}{2}$  kg, es una parte de  $\frac{1}{2}$  kg y las fracciones nos permiten cuantificar qué parte de  $\frac{1}{2}$  kg es (en este caso es  $\frac{1}{2}$  del  $\frac{1}{2}$  kg, respuesta relativamente fácil de encontrar). Se trata de responder: ¿cuántas medidas son exactamente las que se necesitan? Las fracciones nos permiten dar respuesta a esta pregunta: se necesitan  $3 \frac{1}{2}$  medidas.

Una vez que alumnas y alumnos hayan confrontado las respuestas y los procedimientos utilizados, es importante analizar su eficacia. Conjuntamente, mediante un diálogo dirigido por el docente, se va elaborando una justificación de los procedimientos efectuados. Para ello, es importante tener presente que el análisis que de aquí se puede derivar es el siguiente:

**Para el ejemplo 1:**

- Se necesitan 4 bolsas para distribuir 1 kg de harina y si disponemos de 3 kg de harina, entonces necesitaremos  $4 \cdot 3 = 12$  bolsas para distribuir 3 kg de harina.

**Para el ejemplo 2:**

- Se obtienen 4 paquetes al distribuir 1 kg de harina, luego con 2 kg de harina se obtiene el doble de paquetes (esto es  $2 \cdot 4 = 8$  paquetes), con  $\frac{1}{2}$  kg de harina obtenemos la mitad ( $\frac{1}{2}$ ) de paquetes (esto es  $\frac{1}{2}$  de  $4 = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$  paquetes), con  $\frac{1}{4}$  kg se obtiene  $\frac{1}{4}$  de los paquetes (esto es  $\frac{1}{4}$  de  $4 = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1$  paquetes), etc. Del mismo modo, para este caso, en que disponemos de  $\frac{5}{2}$  kg de harina,

obtendremos  $\frac{5}{2}$  de los 4 paquetes mencionados, esto es  $\frac{5}{2} \cdot 4 = 10$  paquetes en total, de donde:

$$\frac{5}{2} : \frac{1}{4} = \frac{5}{2} \cdot 4 = 10.$$

- Otra posibilidad sería: con 5 kg obtenemos 20 paquetes, por tanto con la mitad de harina ( $\frac{5}{2}$  kg) obtenemos la mitad de paquetes ( $\frac{20}{2} = 10$  paquetes). Esto se puede expresar de la siguiente

manera:  $\frac{5}{2} \div \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot 5 \div \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times (5 \div \frac{1}{4}) = \frac{1}{2} \times (5 \cdot 4) = \frac{5 \cdot 4}{2} = \frac{20}{2} = 10$

- Además,  $\frac{5}{2} : \frac{1}{4}$  es equivalente a buscar el número de veces que cabe  $\frac{1}{4}$  en  $\frac{5}{2}$  y como  $\frac{1}{4}$  cabe 2 veces en  $\frac{1}{2}$  entonces cabe  $2 \cdot 5 = 10$  veces en  $\frac{5}{2}$ .

### Para el ejemplo 3:

- Se utilizan 2 medidas para medir 1 kg de harina, luego si quisiéramos medir 3 kg de harina se necesitaría el triple de medidas (esto es  $3 \cdot 2 = 6$  medidas), para  $\frac{1}{2}$  kg de harina necesitamos  $\frac{1}{2}$  de

medidas (esto es  $\frac{1}{2}$  de 2 =  $\frac{1}{2} \cdot 2 = 1$  1 medidas), para  $\frac{1}{4}$  kg necesitamos  $\frac{1}{4}$  de los medidas (esto es  $\frac{1}{4}$  de 2 =  $\frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$  medida), etc. En este caso, como necesitamos medir  $\frac{7}{4}$  kg de harina,

ocuparemos  $\frac{7}{4}$  de los 2 medidas mencionados, esto es  $\frac{7}{4} \cdot 2 = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$  medidas en total, esto es:

$$\frac{7}{4} : \frac{1}{2} = \frac{7}{4} \cdot 2 = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}.$$

- Otra posibilidad sería: para 7 kg ocupamos 14 medidas, por tanto para la cuarta parte de harina ( $\frac{7}{4}$  kg) ocuparemos la cuarta parte de medidas ( $\frac{14}{4} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$  medidas). Esto se puede

expresar de la siguiente manera:  $\frac{7}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \cdot 7 \div \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \cdot (7 \div \frac{1}{2}) = \frac{1}{4} \cdot (7 \cdot 2) = \frac{7 \cdot 2}{4} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$ .

- Además,  $\frac{7}{4} : \frac{1}{2}$  es equivalente a buscar el número de veces que cabe  $\frac{1}{2}$  en  $\frac{7}{4}$  y como  $\frac{1}{2}$  cabe  $\frac{1}{2}$  vez en  $\frac{1}{4}$  entonces cabe  $7 \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$  veces en  $\frac{7}{4}$ .

► Si alumnas y alumnos no reconocen que la operación que están efectuando es una división, cada docente puede realizar un paralelo con problemas de la misma índole, pero en el conjunto de los números naturales. Por ejemplo, el problema “¿Cuántas botellas de 2 litros necesito para embotellar 14 litros de parafina?” se resuelve mediante la división  $14 : 2 = 7$ , de donde se necesitan 7 botellas. Hay que destacar que es el mismo tipo de problema, si en vez de distribuir los 14 litros en envases de 2 litros, se repartieran en envases de  $\frac{1}{2}$  litro (o  $\frac{1}{4}$  de litro o  $\frac{2}{3}$

de litro, etc). De este modo, los estudiantes podrán reconocer el tipo de problemas planteados, como problemas asociados a una división de dos números.

► A continuación, anotando las divisiones ya realizadas en la pizarra (en las que dividendo, divisor y cociente estén expresados como fracción y NO como número mixto), invite al curso a encontrar las regularidades existentes (una fórmula), pero procurando que sean justificadas de acuerdo a como se muestra en los ejemplos, más arriba. Es posible que este tipo de análisis no surja de inmediato, en cuyo caso se puede pedir a los estudiantes la justificación de casos más sencillos como se muestra en los ejemplos 2 y 3 (*en caso de que no sean capaces de formular inmediatamente una explicación, puede realizar preguntas como: ¿Cuántas medidas de 1/12 litro se necesitan para distribuir 1 litro de leche? ¿Cuántas medidas de 1/12 litro se necesitan para distribuir 2 litros de leche? ¿Por qué? ¿Cuántas medidas de 1/12 litro se necesitan para distribuir 5 litros de leche? ¿Por qué? ¿Cuántas medidas de 1/12 litro se necesitan para distribuir 1/2 litro de leche? ¿Por qué? ¿Cuántas medidas de 1/12 litro se necesitan para distribuir 1/4 litro de leche? ¿Por qué?...).* De este modo se espera que alumnas y alumnos reconozcan el hecho de que dividir una fracción por una fracción unitaria es equivalente a multiplicar la fracción dividendo por el denominador de la fracción divisor, esto es:

$$\frac{4}{3} : \frac{1}{6} = \frac{4}{3} \cdot 6 = \frac{4 \cdot 6}{3} = \frac{24}{3}$$

*Destacar el hecho sorprendente de que al dividir un número cualquiera por una fracción unitaria, el cociente nos da un número mayor que el dividendo. Es importante que alumnas y alumnos*

*comprendan por qué se produce (por ejemplo: Para distribuir  $\frac{7}{2}$  kg de harina en frascos de  $\frac{1}{4}$  kg*

*necesito 14 frascos, y  $14 > \frac{7}{2}$ . En este caso, por contener cada frasco de  $\frac{1}{4}$  kg. menos de 1 kg, entonces cada kg me alcanza para más de un frasco (cuatro en este caso), por lo que tiene sentido que la cantidad de frascos que se necesitan sea mayor que la cantidad total de kg con que se cuenta).*

► Una vez realizado este análisis, se invita al curso a trabajar individualmente en la **Ficha 5**, la que se recomienda sea corregida grupalmente. Es importante destacar que está pensada para ser resuelta **sin el material** (tiras y trozos); en efecto, se espera que el desarrollo y corrección de esta ficha sea una buena oportunidad para utilizar los algoritmos ya encontrados. Por esta razón, en caso de que acudan al uso de gráficos y no al uso de los algoritmos, es recomendable preguntarles cuál es la operación que permite dar respuesta a cada problema.

► Durante un primer momento de sistematización de esta etapa se debe señalar al alumnado que, así como en los casos vistos en clases, para saber el resultado de dividir una fracción por otra se multiplica la fracción dividendo por el inverso multiplicativo de la fracción divisor (ejemplo:

$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c}$  y  $\frac{d}{e} : \frac{1}{f} = \frac{d}{e} \cdot f$ ); del mismo modo, la división de dos fracciones cualesquiera

$(\frac{a}{b} : \frac{c}{d})$  se puede calcular multiplicando la fracción dividendo por el inverso multiplicativo de la

fracción divisor (esto es,  $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$ ). Esta relación no se construirá con los estudiantes, dada su complejidad algebraica, pero se resolverán ejercicios en que tengan que aplicarla y practicarla. Por otro lado, una vez dado el algoritmo convencional, cada docente puede intentar justificarlo mediante alguno de los siguientes procedimientos:

**Opción 1:** Dar a los alumnos y alumnas la oportunidad de comprobarlo en diversos ejemplos, utilizando la relación inversa entre la división y la multiplicación (*al igual que ocurre en el caso de los números naturales, también para división de fracciones el cuociente es el número de veces que se debe multiplicar el divisor para igualar al dividendo*). Por ejemplo: se calcula  $\frac{2}{5} : \frac{8}{3}$  haciendo

$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{8} = \frac{6}{40} = \frac{3}{20}$  y luego se comprueba que este resultado es correcto multiplicándolo por el divisor,  $\frac{3}{20} \cdot \frac{8}{3} = \frac{24}{60} = \frac{2}{5}$ . Como al multiplicar el cuociente por el divisor se obtuvo como resultado el dividendo, entonces la división está bien efectuada.

**Opción 2:** Primero, mostrar la siguiente relación:  $x : y = (x \cdot n) : (y \cdot n)$ , explicándola según corresponde [*por ejemplo, si tengo 21 chocolates para repartir entre 7 personas y, por otro lado, tengo el doble de chocolates (42), pero para ser repartidos entre el doble de personas (14), a las personas correspondientes a ambos repartos les toca la misma cantidad de chocolates*]. Además, habría que recordar el hecho de que, *cualquier número dividido por 1 me da como resultado el mismo número*.

Ya vistas las propiedades anteriormente mencionadas, se presenta a los estudiantes diversas divisiones y se les dice: *¿Por cuánto habría que multiplicar el divisor para obtener 1 como resultado?... Entonces, multipliquemos dividendo y divisor por el mismo número y veamos qué pasa...*

Ejemplo:  $\frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5}\right) : \left(\frac{5}{7} \cdot \frac{7}{5}\right) = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5}\right) : 1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5}$

De este modo, a través de los distintos ejemplos, se va mostrando al alumnado que esta relación es verdadera.

**Opción 3:** Primero, mostrar la siguiente relación:  $a : (b \cdot c) = (a : b) : c$ , explicándola según corresponda [*por ejemplo, si se quiere repartir 120 caramelos en un curso en que están sentados en filas y en total hay 5 filas con 8 alumnos(as) cada una, ¿cuántos caramelos le corresponden a cada uno? Es fácil evidenciar que existen al menos dos caminos para resolver este problema, equivalentes entre sí:*

- Si hay 5 filas con 8 alumnos cada una, en total hay  $5 \times 8 = 40$  alumnos. Por tanto, a cada uno le toca  $120 : 40 = 3$  dulces.
- Otra opción es repartir los 120 dulces primero por filas, de modo que a cada fila le tocan  $120 : 5 = 24$  dulces, los que han de ser repartidos entre los 8 alumnos correspondientes a cada fila, quedando cada alumno con  $24 : 8 = 3$  dulces.

De este modo se puede evidenciar que  $120 : (5 \times 8) = (120 : 5) : 8$  ]?

Con esto claro, y ya habiendo construido los algoritmos  $\frac{a}{b} : n = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{n}$  y  $\frac{a}{b} : \frac{1}{c} = \frac{a}{b} \cdot c$ , entonces, mediante diversos casos particulares se puede ver que, por ejemplo:

$\frac{2}{3} : \frac{5}{4} = \frac{2}{3} : \left(5 \cdot \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{2}{3} : 5\right) : \frac{1}{4} = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5}\right) \cdot 4 = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}$

► A continuación, alumnas y alumnos resuelven en parejas la **Ficha 6**, en la que aparecen problemas que se resuelven mediante la división de dos fracciones cualesquiera. Al igual que todas, es recomendable que sea corregida grupalmente.

► *Se recomienda invitar al alumnado a dar una mirada más global respecto a la división de fracciones, motivándolos a buscar las relaciones existentes entre los distintos casos particulares estudiados, de modo que reconozcan que el último caso presentado es el más general, que engloba al resto y que, por tanto, basta con conocer este último algoritmo para resolver cualquier división de fracciones. Esta situación puede ser corroborada utilizando los ejercicios ya resueltos en las diversas clases.*

Durante el cierre de esta etapa, institucionalizar el algoritmo encontrado para la división de fracciones (*para dividir dos fracciones, una posible técnica consiste en multiplicar el dividendo con el inverso multiplicativo del divisor*):

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

También, sería conveniente retomar el algoritmo de la multiplicación de fracciones. (*Para multiplicar dos fracciones se multiplican los numeradores de ambos factores para obtener el numerador del producto y se multiplican los denominadores de ambos factores para obtener el denominador del producto*):

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

## **Cuarta etapa**

---

La cuarta etapa tiene como propósito que alumnas y alumnos se enfrenten a distintos problemas multiplicativos de variación proporcional con fracciones, vale decir, problemas de división y de multiplicación como los vistos en las clases anteriores, de modo que se encuentren frente a la tarea de discriminar, frente a cada problema, la operación a plantear. Del mismo modo, esta es una oportunidad para recordar y practicar los distintos algoritmos de multiplicación y división de fracciones aprendidos.

En una primera instancia, cada docente plantea un par de problemas similares a los de las clases anteriores, con el fin de recordar y revisar los aprendizajes de la Unidad.

Posteriormente, los estudiantes resuelven en parejas las **Fichas 7 y 8**, que contienen problemas multiplicativos de variación proporcional así como otras operaciones. Mediante el trabajo con la Ficha 7, se espera que se encuentren frente a la tarea de tener que discriminar la operación a plantear frente a cada problema. Por esta razón, al momento de la corrección de esta ficha es de suma importancia analizar en conjunto los distintos problemas, pudiendo generar un paralelo con problemas del mismo tipo en el ámbito de los naturales, en caso de que no visualicen la operación en juego. Por otro lado, mediante el trabajo con la Ficha 8, se espera que ejerciten los algoritmos de cálculo construidos (trabajo de la técnica).

Durante el cierre de esta etapa, es importante repasar con el curso los aprendizajes de la Unidad.

Finalmente, se lleva a cabo la aplicación de la **prueba final de la Unidad**. Una vez aplicada esta prueba, se sugiere que cada docente realice una corrección de la prueba en la pizarra, preguntando a su curso los procedimientos que utilizaron. Si hubo errores, averiguar por qué los cometieron.



## V PLANES DE CLASES

### Planes de clases de la PRIMERA ETAPA

Sexto Básico – Primer Semestre

**Materiales:** 1 juego de tiras de tamaño 1 unidad y trozos de papel de las siguientes medidas ( $1/2$ ,  $1/3$ ,  $1/4$ ,  $1/5$ ,  $1/6$ ,  $1/8$ ,  $1/10$  y  $1/12$  de tira), por estudiante. **Ficha 1** y **Ficha 2** para cada niño y niña. Para el profesor(a), 2 juegos de trozos y tiras de papel descritos en la estrategia didáctica (página 19-20) y masilla adhesiva.

**Tarea matemática:** Resuelven problemas de división en situaciones de reparto equitativo, así como problemas multiplicativos de ponderación de una medida; construyen procedimientos resumidos para efectuar multiplicaciones y divisiones de fracciones; calculan productos y cuocientes de fracciones.

Actividades	Evaluación
<p><b>Clase 1:</b> En esta clase el alumnado resuelve problemas de división (en situaciones de reparto equitativo), cuyos dividendos son fracciones unitarias, así como problemas de multiplicación (en situaciones de ponderación de una medida) en los que ambos factores son fracciones unitarias.</p> <p>Cada docente plantea a su curso, intercaladamente, problemas del tipo: a) <i>Juan tomó <math>1/2</math> barra de su chocolate y lo repartió equitativa y exhaustivamente entre sus 4 mejores amigos. ¿Qué cantidad de la barra de chocolate recibió cada uno de sus amigos?</i></p> <p style="text-align: right;">b) <i>Juan recibió <math>1/2</math> barra de chocolate y le convidó <math>1/4</math> de su porción a Pedro. ¿Qué parte de la barra de chocolate recibió Pedro?</i></p> <p>Se debe procurar que todas las fracciones que aparecen sean unitarias y que los problemas planteados puedan resolverse mediante el uso de las tiras y trozos de tiras disponibles. (Ver estrategia didáctica, etapa 1, <b>página 21-22</b>).</p> <p>Estos problemas deben ser resueltos grupalmente, utilizando el material (tiras y trozos de tira), de modo que realicen el reparto y comprendan así la problemática. Una vez resueltos los problemas, es recomendable revisarlos colectivamente, utilizando el material de que dispone cada docente, invitando a su curso a compartir las diferentes técnicas que hayan surgido.</p> <p>A continuación se presentan al curso algunos problemas que no es posible resolver con el material entregado y se pide resolverlos justificando sus procedimientos. (Ver estrategia didáctica, etapa 1, <b>página 22-23</b>).</p> <p><b>Cierre:</b></p> <p>Durante el cierre, es importante explicitar los fundamentos de las técnicas utilizadas en la resolución de los problemas trabajados, mediante ejemplos numéricos del tipo:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- <i>Si divido <math>1/5</math> de barra en 3 partes iguales, cada una de estas partes cabe 3 veces en el <math>1/5</math> barra, el que a su vez cabe 5 veces en una barra completa, por tanto, cada una de las partes resultantes del reparto cabe <math>3 \cdot 5 = 15</math> veces en una barra completa, por lo que cada una de estas partes corresponde a <math>1/15</math> de barra. Esto es: <math>\frac{1}{5}</math> repartido entre 3 = <math>\frac{1}{5 \cdot 3} = \frac{1}{15}</math>.</i></li> <li>- <i>Por otro lado <math>1/3</math> de <math>1/5</math> cabe 3 veces en <math>1/5</math> y este, a su vez, cabe 5 veces en la unidad, luego <math>1/3</math> de <math>1/5</math> cabe <math>3 \cdot 5 = 15</math> veces en la unidad, por lo que corresponde a <math>1/15</math> de dicha unidad. Esto es: <math>\frac{1}{3}</math> de <math>\frac{1}{5} = \frac{1}{3 \cdot 5} = \frac{1}{15}</math>.</i></li> </ul>	<p>Procurar que se comprendan los problemas del tipo (a) previo a empezar a intercalarlos con los del tipo (b).</p> <p>Asegúrese de que resuelvan adecuadamente los problemas planteados y que entiendan lo que están haciendo.</p>

**Clase 2:** Resuelven problemas de reparto equitativo en los cuales las cantidades a repartir son fracciones cualesquiera, así como problemas de ponderación de una medida en los que el factor de ponderación es una fracción unitaria y la medida es una fracción cualquiera.

Cada docente plantea alternadamente problemas como los vistos durante la clase 1 pero, esta vez, en los problemas de reparto equitativo las cantidades a repartir son fracciones cualesquiera, y en los problemas de ponderación de una medida solo el factor de ponderación es una fracción unitaria. Por ejemplo:

a) *Juan tomó  $\frac{2}{3}$  de su barra de chocolate y lo repartió equitativa y exhaustivamente entre sus 4 mejores amigos. ¿Qué cantidad de la barra de chocolate recibió cada uno de sus amigos?*

b) *Juan recibió  $\frac{2}{3}$  de barra de chocolate y le convidó  $\frac{1}{2}$  de su porción a Pedro. ¿Qué parte de la barra de chocolate recibió Pedro?*

Se debe cautelar que los problemas planteados puedan resolverse mediante el uso de las tiras y trozos de tiras disponibles. (Ver estrategia didáctica, etapa 1, página 23-24).

Al igual que para los ejercicios planteados durante la clase 1, estos problemas deben ser resueltos grupalmente, utilizando el material de que disponen (tiras y trozos de tira), de modo que realicen el reparto y comprendan así la problemática. Una vez resueltos los problemas, es recomendable revisarlos colectivamente, utilizando el material que tiene cada docente, invitando al curso a compartir las diferentes técnicas que hayan surgido, justificando cada uno de los procedimientos utilizados. (Ver estrategia didáctica, etapa 1, página 24-27).

### Cierre:

Durante el cierre, es importante explicitar los fundamentos de las técnicas utilizadas en la resolución de los problemas trabajados, mediante ejemplos numéricos del tipo:

- *Repartir  $\frac{3}{5}$  en 2 partes iguales es equivalente a repartir cada quinto en dos partes iguales y luego tomar 3 de estas partes*

*(una por cada quinto), esto es:  $\frac{3}{5}$  repartido entre 2 = 3 veces  $(\frac{1}{5}$  repartido entre 2) = 3 veces  $\frac{1}{10} = \frac{3}{10}$*

- *Por otro lado, tomar  $\frac{1}{2}$  de  $\frac{3}{4}$  es equivalente a tomar  $\frac{1}{2}$  de cada uno de los 3 cuartos, o sea 3 trozos de tamaño  $\frac{1}{2}$  de  $\frac{1}{4}$ , y*

*como  $\frac{1}{2}$  de  $\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ , entonces  $\frac{1}{2}$  de  $\frac{3}{4} = \frac{3}{8}$ , esto es:  $\frac{1}{2}$  de  $\frac{3}{4} = 3$  veces  $(\frac{1}{2}$  de  $\frac{1}{4}) = 3$  veces  $\frac{1}{8} = \frac{3}{8}$*

Es importante en este proceso, rescatar aquellos procedimientos y justificaciones que se muestran en la estrategia didáctica, etapa 1 (sin invalidar otras justificaciones).

**Clase 3:** Resuelven problemas de reparto equitativo cuyas cantidades a repartir son fracciones cualesquiera, así como problemas de ponderación de una medida en los que solo el factor de ponderación es una fracción unitaria. Durante esta clase resolverán la **Ficha 1**.

Trabajan grupalmente en la **Ficha 1** (grupos de 4 integrantes), donde se presenta un problema de división en el cual su dividendo es una fracción cualquiera, así como un problema de multiplicación en el cual solo uno de sus factores es una fracción unitaria (el factor de ponderación). La ficha es resuelta utilizando las tiras y trozos de papel que tienen los estudiantes. A diferencia de los problemas planteados en la clase anterior, para poder dar respuesta a estos problemas se verá en la necesidad de realizar efectivamente el reparto y determinar a qué fracción corresponde el resultado obtenido de dicho reparto (esto debido a que el material no incluye trozos del tamaño requerido para dar respuesta a estos problemas). Esta Ficha debe ser revisada colectivamente, pidiendo que justifiquen sus procedimientos. (Ver estrategia didáctica, etapa 1, página 25-27).

Una vez revisada la Ficha 1, en caso de que alumnas y alumnos no hayan reconocido las operaciones en juego en cada uno de los problemas planteados durante esta etapa (multiplicación o división según corresponda) cada docente puede generar un paralelo con problemas de la misma índole, pero en ámbitos naturales. (Ver estrategia didáctica, etapa 1, página 27-28).

A continuación, se presentan las operaciones ya resueltas durante las tres primeras clases a los alumnos (tanto las de multiplicación, por un lado, como las de división, separadamente, y procurando expresar los factores, productos, dividendos y cuocientes como fracción y no como número mixto) y se les invita a buscar las regularidades y establecer un algoritmo de cálculo (una fórmula), lo que debe ser adecuadamente justificado por los estudiantes, con apoyo docente.

Una vez detectadas las regularidades, se puede ver que dividir una fracción cualquiera por un natural es equivalente a multiplicar dicha fracción por la fracción unitaria cuyo denominador sea el natural en cuestión. (Ver estrategia didáctica, etapa 1, página 25-28).

#### **Cierre:**

Durante el cierre, es importante institucionalizar que: repartir equitativamente una cantidad  $\frac{a}{b}$  entre 5 personas ( $\frac{a}{b} : 5$ ) equivale

a dar  $\frac{1}{5}$  de dicha cantidad  $\frac{a}{b}$  a cada uno de ellos ( $\frac{1}{5} \cdot \frac{a}{b}$ ) y esto es equivalente a multiplicar el denominador de dicha cantidad

por 5, o sea,  $\frac{a}{b} : 5 = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{5} = \frac{a}{b \cdot 5}$ .

Es importante en este proceso, rescatar aquellos procedimientos y justificaciones que se muestran en la estrategia didáctica, etapa 1. (sin invalidar otras justificaciones)

**Clase 4:** Resuelven problemas de reparto equitativo cuyas cantidades a repartir son fracciones cualesquiera, así como problemas de ponderación de una medida en los que el factor de ponderación es una fracción unitaria. Durante esta clase resolverán la **Ficha 2**.

Individualmente, resuelven la **Ficha 2**, la que se recomienda corregir colectivamente. En caso de que acudan al uso de gráficos y no al uso de los algoritmos, es recomendable preguntar cuál es la operación que permite dar respuesta a cada problema.

**Cierre:**

- Durante el cierre de esta etapa es importante recordar que, por ejemplo, repartir  $\frac{2}{3}$  entre 4 personas es equivalente a repartir, “*separadamente*”, cada tercio en 4 partes, tocándole a cada uno una parte por cada tercio, dos en total, esto es:

$\frac{2}{3} : 4 = 2 \cdot \left(\frac{1}{3} : 4\right) = 2 \cdot \frac{1}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ . De este mismo modo, tomar  $\frac{1}{4}$  de  $\frac{2}{3}$  es equivalente a tomar  $\frac{1}{4}$  de cada tercio, esto es:

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = 2 \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}\right) = 2 \cdot \frac{1}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

- Es importante rescatar y reforzar el gráfico que haya surgido durante el trabajo de los alumnos en esta etapa, dado su carácter de herramienta para resolver un problema en caso de desconocer la operación a realizar o de haber olvidado el algoritmo.
- Se deben rescatar, además, los algoritmos estudiados, haciendo fuerte hincapié en la relación existente entre ellos:  
 $\frac{a}{b} : n = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{n} = \frac{a}{b \cdot n}$  (*dividir una fracción cualquiera por un natural  $n$ , es equivalente a multiplicar dicha fracción por la fracción unitaria cuyo denominador es el natural  $n$ , y es equivalente a su vez a multiplicar el denominador de la fracción dividendo por el natural  $n$* ).

Asegúrese que entiendan lo que hacen y apliquen el algoritmo encontrado.

## Planes de clases de la SEGUNDA ETAPA

Sexto Básico – Primer Semestre

**Materiales:** 1 juego de tiras de tamaño 1 unidad y trozos de papel de las siguientes medidas (1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/8, 1/10 y 1/12 de tira), por estudiante. **Ficha 3 y Prueba parcial de la unidad** para cada niño y niña. Para cada docente, 2 juegos de trozos y tiras de papel descritos en la estrategia didáctica (página 20) y masilla adhesiva.

**Tarea matemática:** Resuelven problemas multiplicativos de ponderación de una medida; construyen procedimientos resumidos para efectuar multiplicaciones de fracciones; calculan productos de fracciones.

Actividades	Evaluación
<p><b>Clase 5:</b> En esta clase alumnas y alumnos resuelven problemas de ponderación de una medida que se resuelven mediante multiplicaciones de dos fracciones cualesquiera.</p> <p>Cada docente plantea a su curso: <b>Si le convido 1/9 de 3/4 de barra de chocolate a mi hermana mayor, ¿qué parte de la barra recibe? .... Una vez que contesten, se les pregunta.... Si a mi hermano menor, en vez de convidarle 1/9 de los 3/4 de barra de chocolate, le convido 2/9 de los 3/4 de barra de chocolate. ¿qué parte de la barra recibe? ... En caso de ser necesario, se puede apoyar a los alumnos(as) con preguntas como: ¿Quién recibió más? ¿Por qué? ¿Cuánto más recibió el hermano menor? (Se trata de que detecten que el hermano menor recibió el doble que la hermana mayor). Una vez que hayan respondido, pedir que justifiquen sus resultados ... Por último, a mi mamá le convidé 5/9 de los 3/4 de barra de chocolate, ¿qué parte de la barra recibe? ... Una vez que hayan respondido, pedir que justifiquen sus resultados.</b> (Ver estrategia didáctica, etapa 2, página 30).</p> <p>Se pregunta al curso <b>cómo podrían obtener, utilizando el material concreto o un gráfico, 1/4 de 3/5.</b> Luego, preguntar <b>cómo podrían obtener 3/4 de 3/5</b> (se recomienda que este reparto sea realizado por los estudiantes mediante el uso de material concreto o mediante un gráfico). (Ver estrategia didáctica, etapa 2, página 30-31).</p> <p>Cada docente plantea algunos problemas más en la pizarra e invita al curso a resolverlos. Pueden ayudarse utilizando las tiras y trozos de papel, un gráfico o mediante análisis como el que haya surgido al comienzo de la clase. (Ver estrategia didáctica, etapa 2, página 30).</p> <p>En caso de que no reconozcan que los problemas resueltos corresponden a problemas de multiplicación, el profesor(a) puede generar un paralelo con los problemas de multiplicación resueltos la clase anterior. A continuación, se hace una lista en la pizarra con las operaciones ya resueltas por los estudiantes (procurando expresar ambos factores y el producto como fracción y no como número mixto) y se les invita a buscar las regularidades y establecer un algoritmo de calculo (una fórmula), lo que debe ser adecuadamente justificado. (Ver estrategia didáctica, etapa 2, página 30-32).</p> <p><b>Cierre:</b></p> <p>Durante el cierre, es importante explicitar los fundamentos de las técnicas utilizadas en la resolución de los problemas trabajados, mediante ejemplos numéricos del tipo: Para obtener 3/5 de 2/3 se puede dividir cada tercio en 5 partes y tomar tres de estas partes por cada uno de los dos quintos. Podemos ver entonces que 3/5 de 2/3 es <b>el triple</b> de 1/5 de 2/3, esto es,</p> $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} = 3 \cdot \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3}\right) = 3 \cdot \frac{2}{15} = \frac{6}{15}.$	<p>Propiciar aquellos procedimientos y justificaciones que se muestran en la estrategia didáctica, etapa 2 (valorando también distintas justificaciones).</p>

**Clase 6:** Resuelven problemas de ponderación de una medida mediante multiplicaciones de dos fracciones cualesquiera. Durante esta clase resolverán la **Ficha 3**.

Cada docente comienza la clase proponiendo un par de problemas para que los resuelvan SIN utilizar material concreto (se espera que utilicen el algoritmo encontrado) aprovechando de recordar, conjuntamente con los estudiantes, los fundamentos de las técnicas utilizadas en la resolución de los problemas trabajados durante la clase 5.

A continuación, resuelven la **Ficha 3** individualmente, la que se aconseja corregir colectivamente. En caso de que acudan al uso de gráficos y no al uso de los algoritmos, es recomendable preguntarles cuál es la operación que permite dar respuesta a cada problema.

Al momento de revisar el ejercicio 4 de la Ficha 3 es importante reparar en los resultados de los ejercicios (g) al (k), destacando que al multiplicar una fracción cualquiera por otra fracción cuyo numerador y denominador sean iguales al denominador y numerador de la primera, respectivamente, siempre nos da como resultado la unidad. Identificar este fenómeno con el concepto de inverso multiplicativo, explicando que el inverso multiplicativo de un número es aquel número que, multiplicado por el primero, nos da como resultado el neutro multiplicativo “1”. En particular, dada una fracción  $\frac{a}{b}$  su inverso

multiplicativo es  $\frac{b}{a}$ , ya que  $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$ .

**Cierre:**

Invitar al alumnado a dar una mirada global respecto a la **multiplicación de fracciones**, permitiéndoles buscar las relaciones existentes entre el caso visto en esta etapa y el caso de multiplicación de fracciones visto en la etapa anterior, de modo que reconozcan que el último caso presentado es el más general, engloba al anterior y, por tanto, basta con conocer este último algoritmo para resolver cualquier multiplicación de fracciones. Esta situación puede ser corroborada utilizando los ejercicios ya resueltos en las diversas clases.

(Continúa)

Asegúrese de que resuelvan adecuadamente los problemas planteados y utilicen el algoritmo encontrado.

Es importante velar porque visualicen la relación existente entre las técnicas trabajadas.

- Es importante rescatar y reforzar el gráfico que haya surgido durante el trabajo de los alumnos(as) en esta etapa, dado su carácter de herramienta para resolver un problema en caso de desconocer la operación a realizar o de haber olvidado el algoritmo.
- Institucionalizar el algoritmo encontrado para la multiplicación de fracciones:  $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ , y el hecho de que este es el algoritmo general y engloba al anterior ( $\frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a \cdot 1}{b \cdot c} = \frac{a}{b \cdot c}$ ), por tanto, basta con conocer el algoritmo más general para resolver cualquier multiplicación de fracciones (*para multiplicar dos fracciones se multiplican los numeradores de ambos factores para obtener el numerador del producto y se multiplican los denominadores de ambos factores para obtener el denominador del producto*).
- Institucionalizar el hecho de que dada una fracción cualquiera  $\frac{a}{b}$ , su inverso multiplicativo es  $\frac{b}{a}$ , ya que  $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$  (*el inverso multiplicativo de una fracción cualquiera, es aquella fracción cuyo numerador y denominador son iguales al denominador y numerador de la primera, respectivamente*).

**Clase 7:** En esta clase se lleva a cabo la aplicación y revisión grupal de la **Prueba parcial de la unidad**.

En una primera parte de esta etapa, se aplica la **Prueba parcial de la unidad**.

En una segunda parte, se sugiere que cada docente realice una corrección de la prueba en la pizarra, preguntando a niños y niñas los procedimientos que utilizaron. Si hubo errores, averiguar por qué los cometieron.

Para finalizar, el profesor(a) destaca y sistematiza nuevamente los fundamentos centrales de la Unidad y señala que estos se relacionan con aprendizajes que se trabajarán en unidades posteriores.

## Planes de clases de la TERCERA ETAPA

Sexto Básico – Primer Semestre

**Materiales:** 1 juego de tiras de tamaño 1 unidad y trozos de papel de las siguientes medidas ( $1/2$ ,  $1/3$ ,  $1/4$ ,  $1/5$ ,  $1/6$ ,  $1/8$ ,  $1/10$  y  $1/12$  de tira), por estudiante. **Fichas 4, 5 y 6** para cada niño y niña. Para cada docente, 2 juegos de trozos y tiras de papel descritos en la estrategia didáctica (página 20) y masilla adhesiva.

**Tarea matemática:** Resuelven problemas de división en situaciones de distribución en base a una medida fraccionaria; construyen procedimientos resumidos para efectuar divisiones de fracciones; calculan cuocientes de fracciones.

Actividades	Evaluación
<p><b>Clase 8:</b> Resuelven problemas de división en situaciones de distribución en base a una medida, en los que el dividendo es una cantidad entera de unidades de medida y el divisor es una fracción unitaria.</p> <p>Cada docente plantea a su curso problemas del tipo: <i>Tengo una tira de papel que mide 2 u de largo y quiero obtener con ella todos los trozos posibles de largo <math>1/6</math> u. ¿Cuántos trozos puedo obtener?</i> Es importante procurar que la medida de la cantidad a agrupar tenga un valor <b>entero</b> dado en la unidad que corresponda, así como procurar que la medida en la que se distribuye sea siempre una fracción unitaria. Estos problemas deben ser resueltos grupalmente, utilizando el material (tiras y trozos de tira), de modo que realicen el reparto y comprendan así la problemática. Se sugiere también, al final de este trabajo, incorporar algunos ejercicios que no puedan ser resueltos con el uso del material disponible (ya sea porque la cantidad total a distribuir es muy grande o porque la medida de cada parte es una cantidad fraccionaria no disponible en el material). Una vez resueltos los problemas, es recomendable revisarlos colectivamente, utilizando el material de que dispone el profesor(a), invitando a los alumnos y alumnas a compartir las diferentes técnicas que hayan surgido, justificando sus procedimientos. (Ver estrategia didáctica, etapa 3, página 35).</p> <p><b>Cierre:</b> Durante el cierre, es importante explicitar los fundamentos de las técnicas utilizadas en la resolución de los problemas trabajados, mediante ejemplos numéricos del tipo: Un litro contiene cuatro veces <math>1/4</math> de litro, entonces 5 litros contienen <math>5 \cdot 4 = 20</math> veces <math>1/4</math> de litro, esto es: <i>5 distribuido en porciones de <math>\frac{1}{4} = 5 \cdot 4 = 20</math>.</i></p>	<p>Asegúrese de que puedan resolver los problemas planteados y que entiendan lo que están haciendo.</p> <p>Propiciar aquellos procedimientos y justificaciones que se muestran en la estrategia didáctica, etapa 3.</p>



**Clase 9:** Resuelven problemas de división en situaciones de distribución en base a una medida en los que el dividendo es una fracción cualquiera y el divisor es una fracción unitaria. Durante esta clase resolverán la **Ficha 4**.

Cada docente plantea a su curso un par de problemas más, del mismo tipo que el presentado en la clase 8.

A continuación, trabajan grupalmente en la **Ficha 4** (grupos de 4 integrantes), con problemas de iguales características, pero en los cuales el dividendo es fraccionario. Se trata de comenzar abordando un problema en el que el cociente es una cantidad entera de unidades de medida para, posteriormente, abordar algunos problemas en los que el cociente es una fracción. Una vez resueltos los problemas, es recomendable revisarlos colectivamente, utilizando el material de que dispone el profesor(a), invitando a los alumnos y alumnas a compartir las diferentes técnicas que hayan surgido, justificando sus procedimientos. (Ver estrategia didáctica, etapa 3, página 35-37).

Una vez revisada la Ficha 4, en caso de que no reconozcan que la operación en juego es una división, el profesor(a) puede generar un paralelo con problemas de la misma índole, pero en ámbitos naturales. (Ver estrategia didáctica, etapa 3, página 36).

Luego, anotando en la pizarra las divisiones ya realizadas (expresando dividendo, divisor y cociente como fracción y NO como número mixto), se invita a los alumnos y alumnas a encontrar las regularidades existentes, pero procurando que sean justificadas. (Ver estrategia didáctica, etapa 3, página 35-38).

#### **Cierre:**

Durante el cierre, es importante explicitar los fundamentos de las técnicas utilizadas en la resolución de los problemas trabajados, mediante ejemplos numéricos del tipo: *se necesitan 4 frascos para repartir 1 kg de harina en frascos de  $\frac{1}{4}$  de kg, luego para 2 kg de harina se necesita el doble de frascos (esto es  $2 \cdot 4 = 8$  frascos), para  $\frac{1}{2}$  kg de harina necesitamos la mitad de frascos (esto es  $\frac{1}{2}$  de 4 =  $\frac{1}{2} \cdot 4 = 2$  frascos), para  $\frac{1}{4}$  kg. necesitamos  $\frac{1}{4}$  de los frascos (esto es  $\frac{1}{4}$  de 4 =  $\frac{1}{4} \cdot 4 = 1$  frasco), , para  $\frac{5}{2}$  kg. de harina, necesitaremos  $\frac{5}{2}$  de los frascos, (esto es  $\frac{5}{2} \cdot 4 = 10$  frascos), etc. De aquí que,  $\frac{a}{b} : \frac{1}{c} = \frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b}$ , esto es: “Para dividir una fracción cualquiera por una fracción unitaria, se multiplica la fracción dividendo por el denominador de la fracción divisor”.*

Asegúrese de que puedan resolver los problemas planteados y que entiendan lo que están haciendo.

Propiciar aquellos procedimientos y justificaciones que se muestran en la estrategia didáctica, etapa 3.

**Clase 10:** Resuelven problemas de división en situaciones de distribución en base a una medida en los que el dividendo es una fracción cualquiera y el divisor es una fracción unitaria. Durante esta clase resolverán la **Ficha 5**.

Se invita a los alumnos y alumnas a trabajar individualmente en la **Ficha 5**, la que se recomienda corregir colectivamente. En caso de que acudan al uso de gráficos y no al uso de los algoritmos, es recomendable preguntarles cuál es la operación que permite dar respuesta a cada problema.

**Cierre:**

En el cierre de esta etapa se debe institucionalizar el algoritmo de división de una fracción cualquiera por una fracción unitaria:

$\frac{a}{b} : \frac{1}{c} = \frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b}$ , esto es, *para obtener el resultado de la división de una fracción cualquiera por una fracción unitaria, se multiplica la fracción dividendo por el denominador de la fracción divisor.*

Además, es importante rescatar y reforzar el gráfico que haya surgido durante el trabajo de los alumnos(as) en esta etapa, dado su carácter de herramienta para resolver un problema en caso de desconocer la operación a realizar o de haber olvidado el algoritmo.

Asegúrese de que resuelvan adecuadamente los problemas planteados y que apliquen el algoritmo construido.

**Clase 11:** Resuelven problemas de división en situaciones de distribución en base a una medida en los que el dividendo y el divisor son fracciones cualesquiera. Durante esta clase resolverán la **Ficha 6**.

Cada docente señala a su curso que, así como  $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c}$  y  $\frac{d}{e} : \frac{1}{f} = \frac{d}{e} \cdot f$ , del mismo modo,  $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$  se puede calcular resolviendo el producto  $\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$ , esto es, para obtener el resultado de la división de dos fracciones cualesquiera, se multiplica la fracción dividendo por el inverso multiplicativo de la fracción divisor. Es recomendable invitar a los alumnos a comprobar esta relación, mediante el método que se estime conveniente. (Ver estrategia didáctica, etapa 3, página 38).

A continuación, resuelven en parejas la **Ficha 6**, en la que aparecen problemas que se resuelven mediante la división de dos fracciones cualesquiera. Al igual que todas las fichas, se recomienda corregirla grupalmente.

### Cierre:

El profesor(a) invita a los alumnos(as) a dar una mirada más global respecto a la **división de fracciones**, de modo que reconozcan que el último caso presentado es el más general y engloba tanto al caso recientemente visto (fracción dividida por fracción unitaria), como al caso visto en la etapa 1 (fracción dividida por un natural), por tanto, basta con conocer este último algoritmo para resolver cualquier división de fracciones. Esta situación puede ser corroborada utilizando los ejercicios ya resueltos en clases.

– Además, es importante institucionalizar los algoritmos de multiplicación y división de dos fracciones cualesquiera:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad \text{y} \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

- Para multiplicar dos fracciones cualesquiera, se multiplican los numeradores de ambos factores para obtener el numerador del producto y se multiplican los denominadores de ambos factores para obtener el denominador del producto.*
- Para obtener el resultado de la división de dos fracciones cualesquiera, se multiplica la fracción dividendo por el inverso multiplicativo de la fracción divisor.*

Procure que sean capaces de visualizar mediante la comprobación, que el algoritmo mostrado es válido.

Es importante velar por que integren los conocimientos de las etapas previas y visualicen la relación existente entre las técnicas trabajadas.

## Planes de clases de la CUARTA ETAPA

Sexto Básico – Primer Semestre

**Materiales:** Ficha 7, Ficha 8 y una Prueba final de la unidad para cada niño y niña.

**Tarea matemática:** Resuelven problemas de multiplicación y división de fracciones; calculan multiplicaciones y divisiones de fracciones.

Actividades	Evaluación
<p><b>Clase 12:</b> Resuelven problemas de multiplicación y división de fracciones como los vistos en las clases anteriores.</p> <p>En una primera instancia, cada docente plantea a su curso algunos problemas similares a los de las clases anteriores, con el fin de recordar y revisar los nuevos aprendizajes.</p> <p>Luego, resuelven en parejas la <b>Ficha 7</b>, en la que aparecen distintos problemas del campo multiplicativo con fracciones como los vistos en todas las clases anteriores. El propósito es que alumnas y alumnos se encuentren con diversos problemas del campo multiplicativo y puedan discriminar, frente a cada problema, si se trata de un problema que se resuelve con una división o con una multiplicación. Al igual que todas las fichas de la Unidad, debe ser corregida colectivamente y, en caso de que acudan al uso de gráficos y no al uso de los algoritmos, es recomendable preguntarles cuál es la operación que permite dar respuesta a cada problema, pudiendo generar un paralelo con problemas del mismo tipo en el ámbito de los naturales, en caso de que no visualicen la operación en juego.</p> <p><b>Cierre:</b> Repasar con el curso los aprendizajes de la Unidad.</p> <p><b>Clase 13:</b> Calculan productos y cuocientes de fracciones como los vistos durante la Unidad.</p> <p>En una primera instancia, cada docente plantea a su curso algunas multiplicaciones y divisiones de fracciones similares a las de las clases anteriores, con el fin de recordar y revisar los algoritmos construidos por los estudiantes.</p> <p>Luego, resuelven en parejas la <b>Ficha 8</b>, en la que aparecen distintos problemas del campo multiplicativo con fracciones, como los vistos en todas las clases anteriores. El fin es ejercitar las técnicas institucionalizadas las clases anteriores. Al igual que todas las fichas de la Unidad, se recomienda corregir colectivamente.</p> <p><b>Cierre:</b> Repasar con los alumnos y alumnas los aprendizajes de la Unidad.</p>	<p>Asegúrese de que entiendan lo que están haciendo y que sepan distinguir la operación que resuelve el problema.</p>

**Clase 14:** Aplicación y revisión grupal de la **Prueba final de la Unidad.**

En una primera parte de esta etapa, se aplica la **Prueba final de la Unidad.**

En una segunda parte, se sugiere que cada docente realice una corrección de la prueba en la pizarra, preguntando a niños y niñas los procedimientos que utilizaron. Si hubo errores, averiguar por qué los cometieron.

Para finalizar, destaque y sistematice nuevamente los fundamentos centrales de la Unidad y señale que estos se relacionan con aprendizajes que se trabajarán en unidades posteriores.

**Se incluye, además de la Prueba final, la Pauta de corrección de la misma y una tabla para verificar el dominio del curso de las tareas matemáticas estudiadas en esta Unidad.**

## VI PRUEBAS Y PAUTA DE CORRECCIÓN

### PRUEBA PARCIAL PRIMERA UNIDAD 6º BÁSICO

Nota

Nombre: \_\_\_\_\_ Escuela: \_\_\_\_\_

Curso: \_\_\_\_\_ Fecha: \_\_\_\_\_ Puntaje: \_\_\_\_\_

*Resuelve los siguientes problemas:*

1. En mi casa había  $\frac{3}{8}$  de una cassata y yo me comí  $\frac{1}{6}$  de lo que había. **¿Qué parte de la cassata me comí el domingo?**



2. Para la clase de tecnología compramos  $\frac{3}{2}$  pliegos de cartulina entre 6 compañeros. Si los pliegos de cartulina los repartimos equitativamente, **¿cuántos pliegos de cartulina le tocó a cada uno?**



3. Pedro tiene  $5 \frac{1}{4}$  de pliegos de papel lustre y le prestó  $\frac{2}{3}$  de lo que tenía a Juana. **¿Cuántos pliegos de papel lustre le prestó Pedro a Juana?**



**Resuelve el siguiente problema SIN utilizar representación gráfica.**

4. Juan tenía  $2\frac{1}{4}$  litros de bebida y le convidó  $\frac{2}{5}$  de lo que tenía a Diego. 5 amigas se repartieron equitativamente  $3\frac{1}{2}$  litros de bebida.
- a. ¿Cuántos litros de bebida recibió Diego?

b. ¿Cuántos litros de bebida recibió cada amiga?

c. ¿Quién recibió más bebida, cada una de las 5 amigas o Diego?



**6. Resuelve las siguientes operaciones:**

a)  $\frac{1}{8} \cdot \frac{2}{5} =$

d)  $\frac{5}{9} : 10 =$

b)  $25 : \frac{1}{6} =$

e)  $5\frac{2}{3} : 6 =$

c)  $\frac{4}{5} \cdot \frac{7}{3} =$

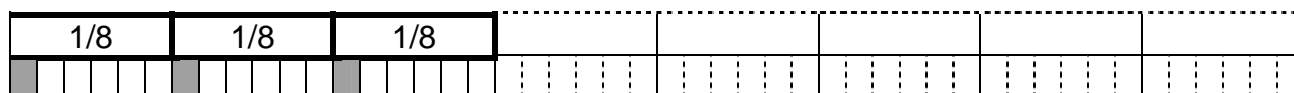
f)  $\frac{1}{9} \cdot 9 =$

## PAUTA DE CORRECCIÓN PRUEBA PARCIAL DE LA UNIDAD

Resuelve los siguientes problemas:

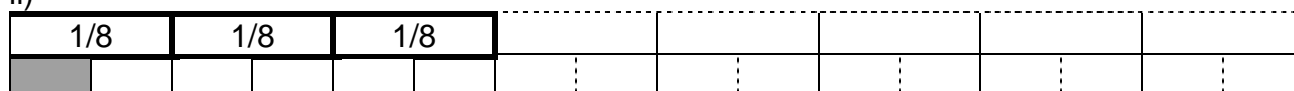
1. En mi casa había  $\frac{3}{8}$  de una cassata y yo me comí  $\frac{1}{6}$  de lo que había.  
**¿Qué parte de la cassata me comí el domingo?**

i)



Se comió  $\frac{3}{48} = \frac{1}{16}$  de cassata.

ii)



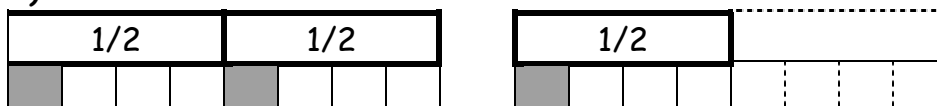
Se comió  $\frac{1}{16}$  de cassata.

- iii)  $\frac{1}{6}$  de  $\frac{1}{8}$  cabe  $6 \cdot 8 = 48$  veces en la unidad, luego corresponde a  $\frac{1}{48}$ , y como  $\frac{1}{6}$  de  $\frac{3}{8}$  es el triple de  $\frac{1}{6}$  de  $\frac{1}{8}$ , entonces,  $\frac{1}{6}$  de  $\frac{3}{8} = 3 \cdot \frac{1}{48} = \frac{3}{48} = \frac{1}{16}$ , de donde, se comió  $\frac{1}{16}$  de cassata.

- iv)  $\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{48} = \frac{1}{16}$ , de donde, se comió  $\frac{1}{16}$  de cassata.

2. Para la clase de tecnología compramos  $\frac{3}{2}$  pliegos de cartulina entre 4 compañeros. Si los pliegos de cartulina los repartimos equitativamente, **¿Cuántos pliegos de cartulina le tocó a cada uno?**

i)



A cada uno le tocó  $\frac{3}{8}$  de pliegos de cartulina.

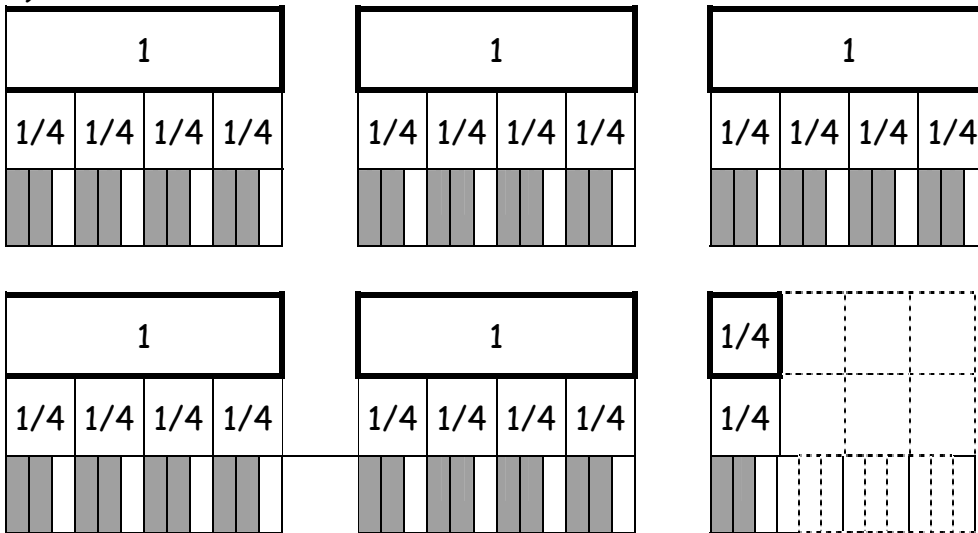
- ii) Si cada  $\frac{1}{2}$  se reparte en 4 partes iguales cada parte cabe  $2 \cdot 4 = 8$  veces en la unidad por lo que es equivalente a  $\frac{1}{8}$ , pero como se están repartiendo  $\frac{3}{2}$ , a cada participante del reparto le toca 3 veces  $\frac{1}{8}$ , esto es  $\frac{3}{8}$ , de donde, a cada uno le tocó  $\frac{3}{8}$  de pliegos de cartulina.



iii)  $\frac{3}{2} : 4 = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{2 \cdot 4} = \frac{3}{8}$ , de donde, a cada uno le tocó  $\frac{3}{8}$  de pliegos de cartulina.

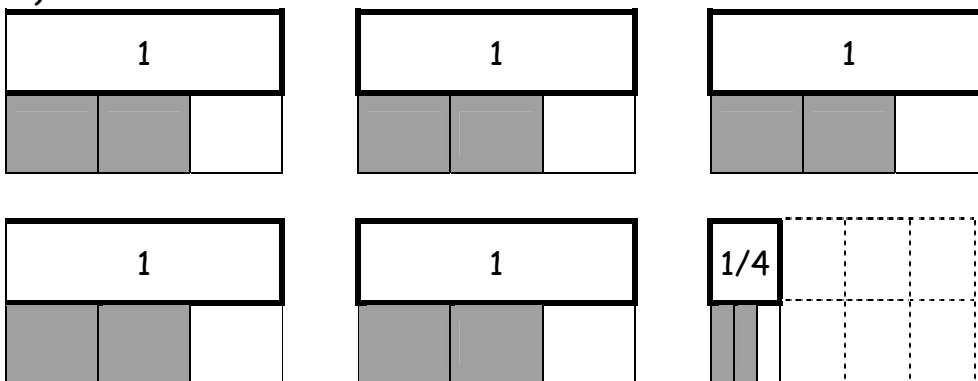
3. Pedro tiene  $5 \frac{1}{4}$  de pliegos de papel lustre y le prestó  $\frac{2}{3}$  de lo que tenía a Juana. ¿Cuántos pliegos de papel lustre le prestó Pedro a Juana?

i)



Pedro le prestó a Juana  $\frac{42}{12} = \frac{7}{2} = 3 \frac{1}{2}$  pliegos de papel lustre.

ii)



Pedro le prestó a Juana  $\frac{10}{3} + \frac{2}{12} = \frac{40}{12} + \frac{2}{12} = \frac{42}{12} = \frac{7}{2} = 3 \frac{1}{2}$  pliegos de papel lustre.

iii)  $5 \frac{1}{4} = \frac{21}{4} \Rightarrow \frac{2}{3} \cdot 5 \frac{1}{4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{21}{4} = \frac{42}{12} = \frac{7}{2} = 3 \frac{1}{2}$ , de donde Pedro le prestó a Juana  $3 \frac{1}{2}$  pliegos de papel lustre.

4. Juan tenía  $2\frac{1}{4}$  litros de bebida y le convidó  $\frac{2}{5}$  de lo que tenía a Diego. 5 amigas se repartieron equitativamente  $3\frac{1}{2}$  litros de bebida.

**a. ¿Cuántos litros de bebida recibió Diego?**

i)  $\frac{2}{5} \cdot 2\frac{1}{4} = \frac{2}{5} \cdot \frac{9}{4} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$  litros de bebida recibió Diego

**b. ¿Cuántos litros de bebida recibió cada amiga?**

ii)  $3\frac{1}{2} : 5 = \frac{7}{2} : 5 = \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{7}{10}$

**c. ¿Quién recibió más bebida, cada una de las 5 amigas o Diego?**

$\frac{9}{10} > \frac{7}{10}$ , de donde Diego recibió más bebida.

**7. Resuelve las siguientes operaciones:**

a)  $\frac{1}{8} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{8 \cdot 5} = \frac{2}{40} = \frac{1}{20}$

b)  $25 : \frac{1}{6} = 25 \cdot 6 = 150$

c)  $\frac{4}{5} \cdot \frac{7}{3} = \frac{4 \cdot 7}{5 \cdot 3} = \frac{28}{15} = 1\frac{13}{15}$

d)  $\frac{5}{9} : 10 = \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{10} = \frac{5}{9 \cdot 10} = \frac{5}{90} = \frac{1}{18}$

e)  $4\frac{2}{3} : 6 = \frac{14}{3} : 6 = \frac{14}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{14}{18} = \frac{7}{9}$

f)  $\frac{1}{9} \cdot 9 = 1$

## Evaluación parcial de la unidad por el curso:

Tareas matemáticas	Preg.	Cantidad de alumnos(as) que respondieron correctamente	Porcentaje de alumnos(as) que respondieron correctamente	Promedios parciales de los porcentajes de alumnos(as) que respondieron correctamente
Resuelven problemas multiplicativos de ponderación de una medida.	1.			
	3.			
	4 a			
Resuelven problemas de división en situaciones de reparto equitativo.	2			
	4 b			
Resuelven problemas de comparación de fracciones con igual numerador.	4 c			
Calculan productos de fracciones.	7 a			
	7 c			
	7 f			
Calculan cuocientes de fracciones.	7 b			
	7 d			
	7 e			
% total de logro del curso = $\bar{X}$ de los % parciales				

## PRUEBA FINAL PRIMERA UNIDAD 6° BÁSICO

Nota

Nombre: \_\_\_\_\_ Escuela: \_\_\_\_\_

Curso: \_\_\_\_\_ Fecha: \_\_\_\_\_ Puntaje: \_\_\_\_\_

### *Resuelve los siguientes problemas*

1. La jornada de trabajo de un pediatra comprende 7 horas diarias de trabajo. **¿Cuántos pacientes puede citar al día si utiliza  $\frac{1}{5}$  hora por paciente?**



### Resuelve el problema 2, SIN utilizar representación gráfica.

2. Ayer hicimos un kuchen para la once y sobraron  $\frac{3}{8}$  de él. Hoy me comí  $\frac{2}{3}$  del trozo que sobró. **¿Qué parte del kuchen me comí?**



3. Juanita tenía  $\frac{7}{2}$  barras de chocolate y le dio  $\frac{1}{4}$  de sus barras a su hermano. **¿Cuántas barras de chocolate le dio Juanita a su hermano?**

**Resuelve el problema 4, SIN utilizar representación gráfica.**

4. Necesito obtener  $1\frac{1}{2}$  kilo de azúcar y solo dispongo para medir de una taza con una capacidad de  $\frac{1}{5}$  kilo. **¿Con cuántas tazas de azúcar se completa  $1\frac{1}{2}$  kilo?**

**Resuelve el problema 5, SIN utilizar representación gráfica.**

5. El dueño de la parcela regaló  $21\frac{1}{4}$  litros de leche para que fuera repartida equitativamente entre 5 familias vecinas. **¿Cuántos litros de leche le corresponde a cada familia?**



6. Mi padre fue a comprar almendras confitadas para vender en su quiosco. Compró almendras confitadas suficientes para llenar 30 bolsas de  $\frac{1}{5}$  kg cada una. **¿Cuántos kg de almendras confitadas compró?**



7. En el refrigerador había  $\frac{2}{3}$  de una torta. A la hora del té, mi madre repartió equitativamente la torta entre nosotros, sus 6 hijos. ¿Qué parte de la torta nos tocó a cada uno?



8. Resuelve las siguientes operaciones:

a)  $\frac{5}{8} \cdot \frac{3}{10} = \square$

d)  $\frac{8}{9} : 12 = \square$

b)  $3\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \square$

e)  $\square : \frac{1}{8} = 40$

c)  $\frac{20}{3} : \frac{1}{21} = \square$

f)  $\frac{5}{8} \cdot \square = 1$

## PAUTA DE CORRECCIÓN PRUEBA FINAL DE LA UNIDAD

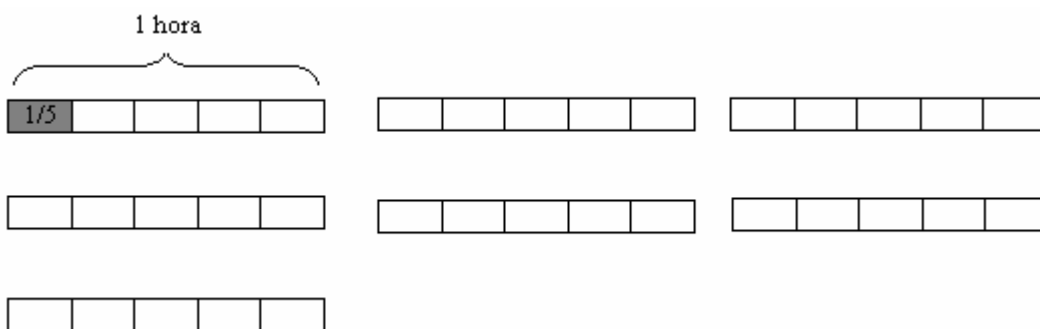
*Resuelve los siguientes problemas:*

1. La jornada de trabajo de un pediatra comprende 7 horas diarias de trabajo. ¿Cuántos pacientes puede citar al día si utiliza  $\frac{1}{5}$  hora por paciente?

i. En 1 hora puede citar a 5 pacientes, luego en 7 horas puede citar a  $7 \cdot 5 = 35$  pacientes.

ii. 7 horas contienen  $7 : \frac{1}{5} = 7 \cdot 5 = 35$  quintos de hora, luego, en 7 horas puede citar a 35 pacientes.

iii.



En 7 horas puede citar 35 pacientes.

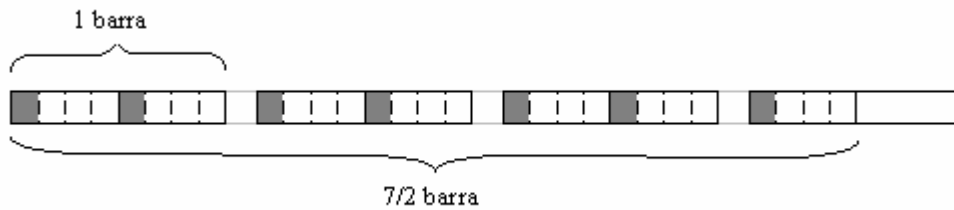
2. Ayer hicimos un kuchen para la once y sobraron  $\frac{3}{8}$  de él. Hoy me comí  $\frac{2}{3}$  del trozo que sobró. ¿Qué parte del kuchen me comí?

i.  $\frac{2}{3}$  de  $\frac{3}{8} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 8} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$  me comí  $\frac{1}{4}$  de kuchen.

3. Juanita tenía  $\frac{7}{2}$  barras de chocolate y le dio  $\frac{1}{4}$  de sus barras a su hermano. ¿Cuántas barras de chocolate le dio Juanita a su hermano?

i.  $\frac{1}{4}$  de  $\frac{7}{2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{2} = \frac{7}{8}$ , Juanita le dio a su hermano  $\frac{7}{8}$  barras de chocolate.

ii.



Juanita le dio a su hermano  $\frac{7}{8}$  barras de chocolate.

4. Necesito obtener  $1\frac{1}{2}$  kilo de azúcar y solo dispongo para medir de una taza con una capacidad de  $\frac{1}{5}$  kilo. ¿Con cuántas tazas de azúcar se completa  $1\frac{1}{2}$  kilo?

i.  $1\frac{1}{2} : \frac{1}{5} = \frac{3}{2} : \frac{1}{5} = \frac{3}{2} \cdot 5 = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$  con  $7\frac{1}{2}$  tazas.

ii. Con 5 tazas se completa 1 kilo y para completar  $\frac{1}{2}$  kilo necesito la mitad de tazas ( $2\frac{1}{2}$ ), luego, para  $1\frac{1}{2}$  kilos necesito  $5 + 2\frac{1}{2} = 7\frac{1}{2}$  tazas.

5. El dueño de la parcela regaló  $21\frac{1}{4}$  litros de leche para que fuera repartida equitativamente entre 5 familias vecinas. ¿Cuántos litros de leche le corresponde a cada familia?

i.  $21\frac{1}{4} = \frac{85}{4}$ , cada parte resultante de repartir  $\frac{1}{4}$  en 5 partes iguales cabe  $4 \cdot 5 = 20$  veces en la unidad, por lo que es equivalente a  $\frac{1}{20}$ , luego, como son  $\frac{85}{4}$  al repartirlos en 5 partes iguales se obtienen 85 veces lo que se obtiene al repartir  $\frac{1}{4}$  en 5 partes iguales, esto es, se obtienen 85 veces  $\frac{1}{20}$  lo que es igual a  $\frac{85}{20} = \frac{17}{4} = 4\frac{1}{4}$ , de donde a cada familia le corresponden  $4\frac{1}{4}$  litros de leche.

ii.  $21\frac{1}{4} : 5 = \frac{85}{4} : 5 = \frac{85}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{85}{20} = \frac{17}{4} = 4\frac{1}{4}$  a cada familia le corresponden  $4\frac{1}{4}$  litros de leche.



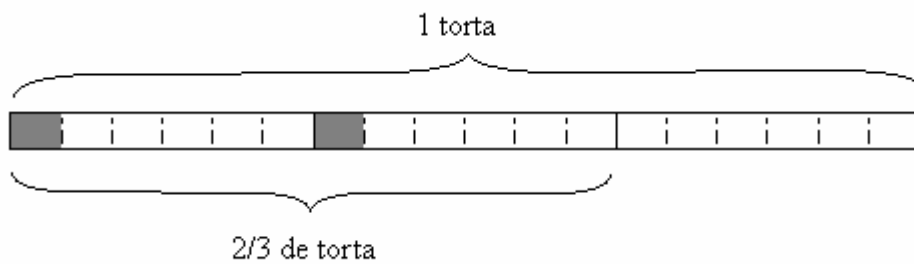
6. Mi padre fue a comprar almendras confitadas para vender en su quiosco. Compró almendras confitadas suficientes para llenar 30 bolsas de  $\frac{1}{5}$  kg cada una. **¿Cuántos kg de almendras confitadas compró?**

i.  $30 \cdot \frac{1}{5} = \frac{30}{5} = 6$  compro 6 kg de almendras.

8. En el refrigerador había  $\frac{2}{3}$  de una torta. A la hora del té, mi madre repartió equitativamente la torta entre nosotros, sus 6 hijos. **¿Qué parte de la torta nos tocó a cada uno?**

i.  $\frac{2}{3} : 6 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$  a cada uno le tocó  $\frac{1}{9}$  de la torta.

ii.



A cada uno le tocó  $\frac{1}{9}$  de la torta.

9. Resuelve las siguientes operaciones:

a)  $\frac{5}{8} \cdot \frac{3}{10} = \frac{15}{80} = \frac{3}{16}$

b)  $3\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{17}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{51}{20}$

$$\text{c) } \frac{20}{3} : \frac{1}{21} = \frac{20}{3} \cdot 21 = \frac{420}{3} = 140$$

$$\text{d) } \frac{8}{9} : 12 = \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{12} = \frac{8}{108} = \frac{2}{27}$$

$$\text{e) } \boxed{\phantom{00}} : \frac{1}{8} = 40$$

$$\boxed{\phantom{00}} \cdot 8 = 40$$

$$\boxed{5} \cdot 8 = 40$$

$$\text{f) } \frac{5}{8} \cdot \boxed{\phantom{00}} = \frac{35}{72}$$

$$\frac{5}{8} \cdot \boxed{\frac{7}{9}} = \frac{35}{72}$$



**Evaluación de la unidad por el curso:**

Tareas matemáticas	Preg.	Cantidad de alumnos(as) que respondieron correctamente	Porcentaje de alumnos(as) que respondieron correctamente	Promedios parciales de los porcentajes de alumnos(as) que respondieron correctamente
Resuelven problemas de división en situaciones de distribución en base a una medida fraccionaria.	1.			
	4.			
Resuelven problemas multiplicativos de ponderación de una medida.	2.			
	3.			
Resuelven problemas de división en situaciones de reparto equitativo.	5.			
	7.			
Resuelven problemas que involucran la multiplicación de un número natural por una fracción menor que 1.	6.			
Calculan productos de fracciones.	8a			
	8b			
	8f			
Calculan cuocientes de fracciones.	8c			
	8d			
	8e			
% total de logro del curso = $\bar{X}$ de los % parciales				

## VII ESPACIO PARA LA REFLEXIÓN PERSONAL

Busque en el momento de cierre de cada uno de los planes de clase, el o los fundamentos centrales de la Unidad con el cual se corresponde:

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

Describa los principales aportes que le ha entregado esta Unidad y la forma en que puede utilizarlos en la planificación de sus clases.

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## VIII GLOSARIO

- **Fracción unitaria:** Fracción cuyo numerador es 1.
- **Fracción propia:** Toda fracción menor que 1 ( $\frac{a}{b} < 1$ ). En toda fracción propia el numerador es menor que el denominador.
- **Fracción impropia:** Toda fracción mayor o igual que 1 ( $\frac{a}{b} \geq 1$ ). En toda fracción impropia el numerador es mayor o igual que el denominador.
- **Reparto equitativo:** Reparto en el cual a cada uno de los integrantes del reparto le toca la misma cantidad.
- **Reparto exhaustivo:** Reparto en el cual se reparte en su totalidad la cantidad a repartir, esto es, no sobra nada.
- **Campo multiplicativo:** Conjunto de problemas que se resuelven por una multiplicación, por una división o por una combinación de estas, y cuyo tratamiento implica esquemas, conceptos y teoremas en estrecha relación, así como las representaciones lingüísticas y simbólicas que pueden utilizarse para representarlos. El campo de problemas multiplicativo comprende problemas de variación proporcional, de producto de medidas, de comparación por cociente. **Problemas multiplicativos de variación proporcional:** Problemas del campo multiplicativo que se caracterizan por poner en relación de proporcionalidad directa dos variables.
- **Problemas de distribución en base a una medida:** Problemas multiplicativos de variación proporcional en los que los datos son la cantidad a distribuir y la medida que debe tener cada parte, siendo la incógnita la cantidad de partes resultantes de distribuir dicha cantidad en base a la medida. Cuando los datos son números naturales, estos problemas suelen llamarse “de agrupamiento en base a una medida”.
- **Problemas de ponderación de una medida:** Problemas multiplicativos de variación proporcional en los que los datos son el factor de ponderación y la medida a ponderar y se pregunta por la medida resultante de la ponderación. Cuando el factor de ponderación es un número natural, estos problemas suelen llamarse “de iteración de una medida”.
- **Inverso multiplicativo:** Aquel número que multiplicado por el primero nos da como resultado el neutro multiplicativo “1”. En particular, dada una fracción  $\frac{a}{b}$  su inverso multiplicativo es  $\frac{b}{a}$ , ya que  $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$ . [En el caso de la adición, el inverso aditivo de un número cualquiera (a), es aquel número (-a) que sumado con el primero nos da como resultado el neutro aditivo ( $a + -a = 0$ )].
- **Mostrar:** Mostrar que una determinada afirmación es verdadera para todos los casos, siempre y cuando se cumplan las condiciones que especifica dicha afirmación.
- **Evidenciar:** Mostrar mediante una evidencia o ejemplo concreto la veracidad de una afirmación específica.
- **Cantidad entera de unidades de medida:** Medida que viene expresada mediante un número natural. En la Unidad se habla de *cantidad entera de unidades de medida* y no de *número natural*, dada la naturaleza continua de dicha cantidad, que es la que posibilita su fraccionamiento.
- **Cantidades de naturaleza continua:** Cantidades tales que, dadas dos cantidades distintas cualesquiera, siempre es posible encontrar una cantidad intermedia, razón por la cual para dichas cantidades no es pertinente la noción de sucesor.

- **Cantidades de naturaleza discreta:** Cantidades tales que, dadas dos cantidades distintas cualesquiera, no siempre es posible encontrar una cantidad intermedia, razón por la cual para dichas cantidades sí es pertinente la noción de sucesor.
- **Conjunto de los números racionales:** Conjunto formado por todos los números que pueden ser expresados mediante una fracción irreducible, tal que, tanto su numerador como su denominador sean números enteros y el denominador sea distinto de cero.

## **IX FICHAS Y MATERIALES PARA ALUMNAS Y ALUMNOS**



1. La mamá de Pablo vende unas tartas de cereza que son exquisitas. La receta que ella ocupa es la siguiente:



Tarta de cerezas

**Cantidad:** 1 tarta

<u>Ingredientes:</u>	<u>Instrucciones:</u>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• 1 taza de harina.</li> <li>• 1/4 taza de azúcar flor.</li> <li>• 1/8 kg de margarina.</li> <li>• 1/2 kg de cerezas en mitades.</li> <li>• 3/4 taza de jalea de frambuesas.</li> </ul>	<p>Mezcle la harina, el azúcar y la mantequilla con un tenedor hasta formar la masa. Engrase un molde para tarta y fórralo con la masa, presionando con los dedos. Póngalo en horno a gas mediano por 10 a 12 minutos. Disuelva la jalea y espárzala sobre la tarta en una capa delgada. Ponga encima las mitades de cereza y refrigere.</p>

Si diariamente la mamá de Pablo vende 15 tartas, **¿qué cantidad de cada ingrediente ocupa en un mes ? (30 días)**

Corrección:

2. Después de una fiesta quedaron 3 botellas de bebida de  $1 \frac{1}{2}$  litro llenas y 6 botellas de bebida de  $\frac{1}{2}$  litro también llenas. **¿Cuántos litros de bebida quedaron en total?**



Corrección:

Ficha 1

Primera  
Unidad  
Clase 3

Sexto  
Básico

Nombre: \_\_\_\_\_

Curso: \_\_\_\_\_

Pide a tu profesora o profesor el sobre con las tiras y trozos de papel. Cada tira de tamaño igual a una unidad, representa una barra de chocolate, de modo que un trozo de tamaño  $\frac{1}{4}$  de unidad representa  $\frac{1}{4}$  de la barra de chocolate, un trozo de tamaño  $\frac{1}{2}$  de unidad representa  $\frac{1}{2}$  de la barra de chocolate, etc.



1. Juan tiene  $\frac{3}{4}$  de barra de chocolate y la reparte equitativamente entre sus 4 hijos:

- a) Realiza tú el reparto de los  $\frac{3}{4}$  barra de chocolate utilizando el material disponible. Explica cómo realizaste el reparto.



- b) Intenta averiguar a qué parte de la barra de chocolate corresponde lo que recibe cada hijo. Justifica tu respuesta.



2. Andrés tiene  $\frac{2}{5}$  de barra de chocolate y le convida  $\frac{1}{3}$  de su trozo a Carolina.

a) Ayuda a Andrés a convidarle dicha porción a Carolina, utilizando el material disponible. Explica cómo realizaste el reparto.



b) Intenta averiguar a qué parte de la barra de chocolate corresponde lo que le convidó Andrés a Carolina. Justifica tu respuesta.



1. Anoche compramos pizza y sobró  $\frac{1}{4}$  de pizza. Hoy, yo y mis hermanos queremos comer pizza de nuevo. Si en total somos 7 hermanos, **¿qué parte de la pizza debería comer cada uno, para que el reparto sea equitativo?**



Corrección:

2. Para la semana de Fiestas Patrias, mi curso ganó la competencia. Como premio recibimos una torta y  $9\frac{1}{2}$  litros de bebida. Si en total somos 38 compañeras y compañeros, y decidimos repartir equitativamente el premio, **¿cuánta bebida, expresada en litros, le corresponde a cada uno?**

Corrección:

3. José tomó  $\frac{1}{2}$  botella de bebidas de  $\frac{3}{4}$  litro y Mauricio tomó  $\frac{1}{10}$  de una botella de  $2\frac{1}{2}$  litros. **¿Quién tomó más bebida?**



Corrección:

4. Resuelve las siguientes operaciones:

a)  $7 \cdot \frac{2}{3} =$

e)  $\frac{5}{9} \cdot 6 =$

b)  $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{10} =$

f)  $\frac{8}{9} \cdot \frac{1}{20} =$

c)  $\frac{1}{10} : 5 =$

g)  $\frac{1}{20} \cdot \frac{8}{9} =$

d)  $\frac{2}{7} : 12 =$

h)  $\frac{1}{9} : 15 =$

**FICHA DE SISTEMATIZACIÓN**

**¿QUÉ APRENDÍ HOY?**

***DUDAS QUE TENGO Y PREGUNTAS QUE ME HAGO***

1. Un señor dejó la mitad de sus bienes en herencia para su esposa. De la mitad restante  $\frac{1}{8}$  es para el hijo menor,  $\frac{3}{8}$  para el hijo del medio y  $\frac{1}{2}$  es para el hijo mayor. **¿Qué fracción del total de la herencia recibió cada hijo?**



a) Hijo menor:

Corrección:

b) Hijo del medio:

Corrección:

c) Hijo mayor:

Corrección:

2. Una niña se dio cuenta de que, en promedio, un tercio del día lo ocupa para dormir. De los dos tercios restantes ocupa la mitad para estudiar,  $\frac{3}{10}$  para jugar y  $\frac{1}{5}$  para actividades varias.

**A) Qué parte del día ocupa para:**

a) Estudiar:

Corrección:

b) Jugar:

Corrección:

**B) Cuántas horas diarias ocupa para:**

a) Dormir:

Corrección:

b) Actividades diarias:

Corrección:

**3. Completa la siguiente tabla:**

<b>Situación</b>	<b>Multiplicación</b>	<b>Resultado</b>
Un tercio de la mitad	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$
Un quinto de la mitad		
Cinco octavos de un noveno		
Tres cuartos de 32		



4. Resuelve las siguientes operaciones:

$$\text{a) } \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{16} =$$

$$\text{g) } \frac{3}{5} \cdot \text{---} = \frac{15}{15}$$

$$\text{b) } \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} =$$

$$\text{h) } \frac{3}{4} \cdot \text{---} = 1$$

$$\text{c) } \frac{2}{5} : 4 =$$

$$\text{i) } \frac{7}{15} \cdot \text{---} = 1$$

$$\text{d) } 3\frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} =$$

$$\text{j) } \frac{25}{33} \cdot \text{---} = 1$$

$$\text{e) } 5 \cdot \frac{7}{25} =$$

$$\text{k) } 4 \cdot \text{---} = 1$$

$$\text{f) } \frac{2}{3} \cdot \text{---} = \frac{4}{6}$$

## FICHA DE SISTEMATIZACIÓN

**¿QUÉ APRENDÍ HOY?**

**PARA MULTIPLICAR DOS FRACCIONES SE PUEDE:**

**¿CÓMO SE JUSTIFICA ESTE PROCEDIMIENTO?**

***DUDAS QUE TENGO Y PREGUNTAS QUE ME HAGO***

Ficha 4

**Primera  
Unidad**  
Clase 9

**Sexto  
Básico**

Nombre: \_\_\_\_\_  
Curso: \_\_\_\_\_

**Pide a tu profesora o profesor el sobre con las tiras y trozos de papel, de modo que puedas utilizarlos si lo consideras conveniente.**

1. Paula quiere armar una tira de papel de  $\frac{3}{2}$  m de largo y dispone para ello de trozos de largo  $\frac{1}{4}$  m.  
**¿Cuántos trozos va a ocupar para obtener el largo deseado?**

2. Andrés va a preparar salsa blanca. Para ello necesita  $\frac{1}{2}$  litro de leche. Sabiendo que una taza tiene una capacidad de  $\frac{1}{5}$  litro de leche. **¿Cuántos tazas de leche debe añadir Andrés a la receta?**



3. Necesito  $\frac{3}{4}$  kg de harina para hacer pan. Si tengo un recipiente con una capacidad de  $\frac{1}{3}$  kg, **¿cuántos recipientes de harina necesito para la receta?**



1. En el café de la esquina venden tortas. Diariamente venden un total de 9 tortas. Si cada porción de torta corresponde a  $\frac{1}{10}$  de torta, **¿cuántas porciones venden al día?**



2. Juan compró  $2\frac{1}{4}$  litros de bebida y le dio  $\frac{1}{3}$  de su bebida a Carolina. **¿Cuántos litros de bebida le dio Juan a Carolina?**



3. Necesito  $\frac{5}{16}$  kg de harina para preparar una receta que aprendí. Sabiendo que una taza de harina equivale a  $\frac{1}{8}$  kg de harina, **¿cuántas tazas de harina debo ocupar?**



4. Tengo que medir  $1\frac{3}{4}$  kg de azúcar. Si una taza de azúcar equivale a  $\frac{1}{5}$  kg de azúcar, **¿cuántas tazas de azúcar equivalen a  $1\frac{3}{4}$  kg de azúcar?**

1. Dispongo de  $2\frac{2}{5}$  litros de perfume para vender **¿Para cuántos frascos de  $\frac{6}{45}$  litro me alcanza?**



2. Josefina mezcla una botella de  $2\frac{1}{4}$  litro de agua mineral con una botella de  $1\frac{1}{2}$  de granadina y reparte la mezcla en botellas de  $\frac{3}{4}$  litros. **¿Para cuántas botellas le alcanza?**



3. Resuelve las siguientes operaciones:

a)  $\frac{5}{43} : 15 =$

d)  $\frac{27}{15} : \frac{9}{10} =$

b)  $\frac{7}{9} \cdot 25 =$

e)  $5\frac{1}{9} : 4 =$

c)  $\frac{15}{21} \cdot \frac{7}{5} =$

f)  $5\frac{2}{3} \cdot 7\frac{1}{2} =$

## FICHA DE SISTEMATIZACIÓN

**¿QUÉ APRENDÍ HOY?**

**PARA DIVIDIR DOS FRACCIONES SE PUEDE:**

**¿CÓMO SE JUSTIFICA ESTE PROCEDIMIENTO?**

***DUDAS QUE TENGO Y PREGUNTAS QUE ME HAGO***

1. La receta básica para preparar mermelada indica que por cada kilogramo de fruta se debe agregar  $\frac{3}{4}$  kg de azúcar. De acuerdo a esto, **¿cuántos kilos de azúcar se necesitan para preparar una mermelada si se dispone de  $3\frac{1}{2}$  kg de fruta?**



2. El curso de Andrea ha decidido reunir dinero para hacer una fiesta de fin de año. Para este propósito compran diariamente 15 litros de bebidas y los venden todos, servidos en vasos de  $\frac{1}{10}$  litro. **¿Cuántas porciones de bebida venden diariamente?**



3. Tengo  $2\frac{1}{2}$  litros de jugo de uva. **¿Cuántas botellas llenas de  $\frac{3}{4}$  litro puedo obtener? Con lo que sobra, ¿qué parte de otra botella puedo llenar?**

4. Para el partido de fútbol salimos terceros y nos dieron de premio unas bebidas. Si cada uno de los 15 integrantes del equipo tomó  $\frac{3}{5}$  litros de bebida y no sobró nada, **¿cuántos litros de bebida nos ganamos?**



5. Mi sueldo es de \$180.000. Yo separo  $\frac{1}{10}$  de mi sueldo mensualmente y lo reparto equitativamente entre 5 instituciones de caridad distintas.

a) **¿Qué parte de mi sueldo le doy a cada una de las 5 instituciones de caridad?**



b) **¿Cuánto dinero le doy a cada una de las 5 instituciones de caridad?**

6. Seis amigos prepararon una bebida, mezclando 5 botellas de  $\frac{1}{2}$  litro de agua mineral con 2 botellas de  $\frac{3}{4}$  litro de néctar de duraznos. Una vez hecha la mezcla, la reparten equitativamente. **¿Cuánto le tocó a cada uno?**

7. Se mezclan  $\frac{1}{5}$  litro de pintura color azul con  $\frac{1}{3}$  litro de pintura color rojo. Luego se guarda la pintura en envases de  $\frac{1}{2}$  litro. **¿Para cuántos envases llenos alcanza? ¿Cuánto sobra?**



Ficha 8

**Primera  
Unidad**  
Clase 13

Sexto  
Básico

Nombre: \_\_\_\_\_

Curso: \_\_\_\_\_

Resuelve las siguientes operaciones:

a)  $45 : \frac{1}{20} = \text{---}$

b)  $\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2} = \text{---}$

c)  $\frac{2}{9} : \frac{1}{15} = \text{---}$

d)  $7 \cdot \frac{1}{7} = \text{---}$

e)  $5\frac{2}{9} \cdot 7\frac{3}{4} = \text{---}$

f)  $14 : 10 = \text{---}$

g)  $5 : 20 = \text{---}$

h)  $27 : (\frac{1}{5} \cdot 5) = \text{---}$

i)  $(27 : \frac{1}{5}) \cdot 5 = \text{---}$

j)  $\frac{4}{9} \cdot (18 \cdot \frac{5}{4}) = \text{---}$

k)  $\frac{5}{9} \cdot \text{---} = 1$

l)  $5 \cdot \text{---} = \frac{15}{25}$

m)  $\text{---} \cdot \frac{3}{4} = \frac{21}{4}$

n)  $\text{---} : \frac{1}{3} = 21$

o)  $\frac{2}{7} \cdot \text{---} = \frac{6}{35}$

p)  $\text{---} : 5 = \frac{7}{25}$

q)  $7 : \text{---} = 21$