

Matemática
Octavo año Básico
PRIMERA UNIDAD DIDÁCTICA

ANALIZANDO Y CONSTRUYENDO GRÁFICOS

Coordinadora
Lorena Espinoza S.

Autores

Joaquim Barbé F.	Lorena Espinoza S.
Francisco Cerda B.	Fanny Waisman C.
Grecia Gálvez P.	Ramón Ruiz O.
Alfredo Carrasco H.	

ÍNDICE

I	Presentación	5
II	Esquema	10
III	Orientaciones para el docente: estrategia didáctica	13
IV	Planes de clases	36
V	Prueba	46
VI	Espacio para la reflexión personal	50
VII	Glosario	51
VIII	Fichas y materiales para alumnas y alumnos	53

PRIMERA UNIDAD DIDÁCTICA
Analizando y construyendo gráficos

APRENDIZAJES ESPERADOS DEL PROGRAMA

- *Establecen relaciones entre magnitudes involucradas en problemas diversos y discriminan entre las relaciones proporcionales directas e inversas apoyándose en la representación gráfica.*
- *Utilizan diversas estrategias para solucionar problemas que implican variaciones proporcionales de las magnitudes, incluida la representación gráfica.*
- *Interpretan gráficos de situaciones diversas e identifican el tipo de relación que se establece entre dos variables relacionándolas con la variación proporcional.*

APRENDIZAJES ESPERADOS PARA LA UNIDAD

- En situaciones diversas, establecen la existencia o no de relaciones entre dos variables.
- Representan gráficamente diversas relaciones entre dos variables.
- Interpretan gráficos de situaciones diversas.
- Utilizan gráficos para resolver problemas.

Aprendizajes previos:

- Organizan datos en una tabla de valores.
- Utilizan tablas de valores para resolver problemas diversos.

I. Presentación de la Unidad Didáctica

Esta Unidad se centra en el estudio de la *construcción e interpretación de gráficos*, y para ello comienza abordando el sistema de coordenadas cartesiano, así como el concepto de variable. El tipo de análisis de gráficos que se desarrolla en la Unidad es esencialmente cualitativo. Es decir, **no** se busca que el alumnado reconozca la expresión matemática de la curva graficada ni el valor numérico de la pendiente en un punto, pero sí que sean capaces de interpretar lo que representa una mayor o menor inclinación de la curva, así como distinguir entre los significados de una inclinación en uno u otro sentido (pendiente positiva o negativa), utilizar el gráfico para obtener el valor de una variable que corresponde a un valor dado de la otra, y describir y comprender el comportamiento global de la relación. Con respecto a la construcción de gráficos, no se espera que los estudiantes dibujen la curva exacta que corresponde al fenómeno, sino que representen datos de una tabla de valores en un sistema de coordenadas cartesiano y los unan mediante una línea recta (que corresponde a una buena aproximación, de acuerdo a los propósitos de la Unidad), comprendiendo el significado y el sentido que tiene el unir dichos puntos, y el aporte que realiza el gráfico obtenido para comprender con mayor profundidad la situación en estudio.

Es importante señalar que en la Unidad se consideran solo **valores positivos** de las variables de las situaciones que se estudian. De esta forma, el gráfico de las relaciones entre variables queda restringido al primer cuadrante del sistema de coordenadas cartesiano.

1. Tareas matemáticas

Las *tareas matemáticas* que niñas y niños realizan para lograr los aprendizajes esperados de esta Unidad son:

- Describen la posición de puntos en el plano.
- Ubican puntos en un sistema de coordenadas cartesiano.
- Distinguen una magnitud variable de una magnitud constante.
- Distinguen distintos tipos de variables: cualitativas y cuantitativas.
- Identifican si existe o no relación de dependencia entre dos variables.
- Grafican la relación entre dos variables.
- Utilizan el gráfico para describir cómo varía una variable cuando la otra también varía.

2. Variables didácticas

Las *variables didácticas* que se consideran para graduar la complejidad de las tareas matemáticas que niñas y niños realizan son:

- El tipo de gráfico: gráfico de línea, gráfico funcional.
- Cantidad de gráficos representados en un mismo sistema: solo uno, más de uno.
- Tipo de variables: cualitativas nominales, cualitativas ordinales, cuantitativas discretas, cuantitativas continuas.
- El contexto de las situaciones: numérico, geométrico, físico.

- Tipo de situación: situaciones realizadas experimentalmente por los estudiantes, presentadas verbalmente.
- Tipo de registro para proporcionar los datos del problema: tabla de valores, pares ordenados, gráfico.

3. Procedimientos

Los *procedimientos* que niñas y niños construyen y se apropian para realizar las tareas son:

- En la descripción de puntos en el plano:
Establecen un sistema de coordenadas cartesiano como referencia y lo utilizan para describir un punto mediante su abscisa y su ordenada. El punto lo describen mediante dos números que indican la distancia de ese punto a cada uno de los ejes. La primera coordenada representa la distancia al eje vertical y, la segunda, la distancia al eje horizontal.
- En la ubicación de puntos en un sistema de coordenadas cartesiano:
Establecen un sistema de coordenadas como referencia y lo utilizan para ubicar un punto mediante su abscisa y su ordenada. Dicho punto, expresado mediante dos números, queda ubicado a la distancia del eje vertical que indica el primer número, y a la distancia del eje horizontal que señala al segundo número.
- En la distinción entre una magnitud variable y una magnitud constante:
Reconocen que hay magnitudes o atributos que pueden asumir distintos valores así como otras magnitudes que pueden asumir un único valor.
- En la distinción de distintos tipos de variables: cualitativas y cuantitativas:
Determinan valores que pueden tomar distintas variables, los comparan en términos de si tiene sentido o no ordenarlos, si corresponden a palabras (etiquetas o categorías) o números.
- En la identificación de dependencia entre dos variables:
Determinan pares de valores correspondientes y buscan regularidades en el comportamiento de los datos.
- En la graficación:
Asignan cada variable a un eje del sistema de coordenadas y escogen la escala con que gradúan cada eje. Usando las reglas del sistema cartesiano, ubican el punto del plano correspondiente a cada par de valores.
- En la interpretación del gráfico:
 - Identifican, en el gráfico, el valor de una de las variables que corresponde a un valor determinado de la otra.
 - Observan la forma de la línea y cómo varían los valores correspondientes del eje vertical al avanzar sobre los valores del eje horizontal.

4. Fundamentos centrales de la Unidad

- ◆ Para ubicar un punto en el plano, es necesario convenir un sistema de referencia común para todos. Para el estudio que realizaremos en esta Unidad escogeremos un sistema de coordenadas rectangulares, también llamado sistema de coordenadas cartesiano, que permite determinar la posición de cualquier punto en el plano mediante dos números que indican la distancia de ese punto a cada uno de los ejes. La primera coordenada representa la distancia al eje vertical y, la segunda, la distancia al eje horizontal.
- ◆ Las rectas que constituyen el sistema de coordenadas cartesianas son rectas numéricas perpendiculares entre sí, en las que se ha definido una escala. Esto significa que sobre cada eje se determina un punto como origen, que coincide con el del otro eje, y una unidad de longitud, no necesariamente la misma para cada eje.
- ◆ Se denomina **variable** a aquella magnitud o atributo que puede tomar distintos valores, mientras que a aquella magnitud o atributo que puede tomar un único valor se le denomina **constante**.
- ◆ Un mismo atributo, dependiendo de la situación que se esté analizando, puede ser *variable* o *constante*.
- ◆ Es importante distinguir entre una *variable* y los *valores* que ella puede tomar. Por un lado, una variable corresponde al atributo de un objeto o fenómeno que se está considerando, mientras que los valores que ella puede tomar son datos específicos relativos a esa variable. Por ejemplo, la variable *peso de una persona* puede tomar valores como 30 kg 50 kg o cualquier valor entre 2 kg y 250 kg.
- ◆ Frecuentemente, en aritmética se estudian relaciones entre valores específicos. Por ejemplo, el área de un cuadrado cuyo lado mide 2 cm es de 4 cm². La noción de variable nos permite estudiar relaciones entre valores no específicos. En el caso del cuadrado, la relación entre la medida de un lado designado como l y su área $A_{\square} = l^2$ permite aplicar esta relación a cualquier cuadrado. El lado y el área pasan, de ser magnitudes constantes, a ser variables.
- ◆ Una variable se dice cualitativa nominal si los valores que puede tomar consisten en etiquetas o categorías que no poseen un orden predeterminado, como por ejemplo: femenino/masculino, tipo de sangre O/ tipo AB/ tipo A/ tipo B.
- ◆ Una variable se dice cualitativa ordinal si los valores que puede tomar consisten en etiquetas o categorías que sí poseen un orden predeterminado, como por ejemplo: bueno/regular/malo, enero/febrero/.../diciembre.
- ◆ Una variable se dice cuantitativa si es que los valores que puede tomar son numéricos. En este caso nos podemos encontrar con variables cuantitativas discretas, cuando entre dos valores contiguos cualesquiera que ella puede tomar no existe ningún otro valor (por ejemplo, número de hijos de una familia, ya que entre 2 y 3 hijos no existe un valor intermedio) o variables continuas, cuando entre dos valores cualesquiera que ella puede tomar siempre existe otro valor que ella también puede tomar (por ejemplo, el perímetro de un cuadrado, ya que entre 3,5 cm de perímetro y 3,6 cm de perímetro se puede encontrar un cuadrado de perímetro 3,55 cm y así sucesivamente).
- ◆ Dos variables están relacionadas mediante una **relación de dependencia** cuando los cambios en una de las variables provoca cambios en la otra variable.
- ◆ En una situación problemática podemos identificar variables que pueden estar relacionadas mediante una relación de dependencia o no. Por ejemplo, la temperatura ambiente no necesariamente está relacionada con la velocidad del viento en un determinado lugar. Así, podemos encontrar vientos huracanados tanto a altas como a bajas temperaturas puesto que la velocidad del tiempo no depende de la temperatura y viceversa.
- ◆ Si bien es posible **asociar** dos variables cualesquiera, **no** siempre estarán relacionadas mediante una relación de dependencia.

- ◆ Cuando existe una relación de dependencia entre dos variables, interesa averiguar cómo y cuánto varía una variable cuando también varía la otra. Esta relación puede estudiarse determinando pares de valores que pueden ser organizados en una tabla o en un gráfico cartesiano en que cada uno de los ejes corresponde a una de las variables y también puede estudiarse determinando la *ley de correspondencia* entre las dos variables.
- ◆ El gráfico de una relación entre dos variables permite describir y comprender el comportamiento global de la relación, así como identificar valores en los que la relación tiene un comportamiento particular. Generalmente, esto resulta más difícil de lograr a partir de la tabla de valores.
- ◆ La mayor o menor inclinación de la curva (pendiente de la curva) responde a una mayor o menor variación de la variable dependiente por una unidad de variación de la variable independiente. En el caso particular del gráfico de una línea recta, la interpretación es que la variación de la variable dependiente es **siempre la misma** para variaciones iguales de la variable independiente.
- ◆ Una inclinación ascendente (pendiente positiva) significa que al aumentar la variable independiente, la variable dependiente también sufre un aumento.
- ◆ Una inclinación descendente (pendiente negativa) significa que al aumentar la variable independiente, la variable dependiente disminuye.
- ◆ Si al incrementar o disminuir la variable independiente, la variable dependiente no sufre cambios, entonces decimos que el gráfico en esa parte es plano o bien, constante.
- ◆ Como se ha visto, la inclinación de un gráfico (ascendente, descendente o plana) es una característica local, es decir, puede variar a lo largo del gráfico.

5. Descripción del proceso por etapas

El proceso parte en la **primera etapa** proponiendo a los estudiantes un problema que les plantea la necesidad de la utilización de un sistema de coordenadas que sirva de referencia para describir la ubicación precisa de un objeto en el plano. Para dar respuesta a dicha necesidad, durante esta etapa se estudia el sistema de coordenadas rectangular o cartesiano y la ubicación de puntos en el plano, expresados mediante pares de números, enteros y/o decimales, en dicho sistema.

En la **segunda etapa** los estudiantes comienzan estudiando la diferencia entre una magnitud o atributo variable y una magnitud constante, aprendiendo a distinguir distintos tipos de variables: cualitativas nominales y cuantitativas (discretas o continuas). A continuación, abordan el problema de la existencia de leyes de correspondencia entre dos variables. Esto es, estudian problemas en los que existe relación entre variables de una situación dada y en los que no necesariamente existe relación, y se les pide identificar en qué situaciones existe o no una relación entre sus variables. En esta etapa comienza el estudio del análisis de gráficos, buscando obtener el valor de una variable que corresponde a un valor dado de la otra, y estudiar el comportamiento global de la relación con el propósito de reconocer dependencia entre variables.

En la **tercera etapa** se realiza un estudio de construcción de gráficos y una profundización sobre su interpretación. Para ello se recupera lo que los estudiantes ya han estudiado en la etapa anterior sobre la lectura e interpretación de los gráficos, con el propósito de establecer las ventajas que tiene el uso de esta herramienta de análisis por sobre la tabla de valores. Además, el proceso avanza hacia el problema de la construcción e interpretación de gráficos, buscando que alumnas y alumnos sean capaces de interpretar lo que representa una mayor o menor inclinación de la curva, así como distinguir entre los significados de una inclinación en uno u otro sentido (pendiente positiva o negativa). Finalmente, se construyen y analizan diversos gráficos para buscar leyes de correspondencia.

6. Sugerencias para el trabajo de los aprendizajes previos

Antes de dar inicio al estudio de la Unidad, es necesario realizar un trabajo sobre los aprendizajes previos. Interesa que los estudiantes activen los conocimientos necesarios para que puedan enfrentar adecuadamente la Unidad y lograr los aprendizajes esperados en ella. El profesorado debe asegurarse de que todos los estudiantes:

- **Organizan datos en una tabla de valores.** Este conocimiento es indispensable para que puedan realizar gran parte de los problemas de esta Unidad Didáctica. Hasta el momento, en la mayoría de los casos, los estudiantes han utilizado la tabla de valores como *medio* para estudiar el tipo de relación que existe entre dos variables, ya sea que la tabla venga dada o que tengan que construirla. El profesor(a) puede plantear problemas como el siguiente:

“Recopilen datos en los que se asocien dos variables del siguiente tipo:

En personas: número de zapato y largo del pie en centímetros, edad y peso, edad y estatura, estatura y peso.

En precios de: UF y su equivalente en pesos en un mes determinado (día a día), llamadas internacionales por minuto, u otros.

En mediciones: distancia recorrida y tiempo (a una velocidad constante), perímetro y área de cuadrados por variación de la longitud de sus lados.

Luego, puede preguntar a sus estudiantes: ¿para qué sirve colocar los datos en una tabla de valores?, ¿cuándo resulta importante seguir un criterio de orden para organizar los datos? Se espera que reconozcan que la tabla sirve como medio para organizar datos.

- **Utilizan tablas de valores para resolver problemas diversos.** La tabla de valores no es solamente un dispositivo para registrar pares de valores, ya que si los datos se organizan siguiendo un criterio de orden, la tabla se convierte, además, en un *medio* para estudiar el tipo de relación que existe entre las variables de la situación. La profesora o profesor puede plantear problemas cuyos datos vengan dados en tablas de valores y pedir a los estudiantes que determinen el tipo de relación que existe entre las variables del problema: directamente proporcional, inversamente proporcional o de otro tipo. Asimismo, puede plantear preguntas específicas del tipo: ¿Para qué valor de una de las variables se produce un máximo o un mínimo o un valor determinado en la otra variable? ¿Cuáles son los valores máximo y mínimo que asume una variable determinada?

II. Esquema de la Unidad

II. ESQUEMA

APRENDIZAJES ESPERADOS



ETAPA 3

<u>TAREAS MATEMÁTICAS</u>	<u>CONDICIONES</u>	<u>TÉCNICAS</u>	<u>FUNDAMENTOS CENTRALES</u>
<ul style="list-style-type: none"> - Grafican la relación entre dos variables. - Utilizan el gráfico para describir cómo varía una variable cuando la otra también varía. 	<p>Se trabaja tanto con variables numéricas como nominales.</p> <p>Gráficos dados completa o parcialmente.</p> <p>Los datos vienen proporcionados mediante tabla de valores o gráficos.</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Para determinar si existe una relación entre dos variables, estudian cómo varía una de ellas respecto de la otra, determinando pares de valores correspondientes. - En la graficación, asignan cada variable a un eje del sistema de coordenadas y escogen la escala con que gradúan cada eje. Usando las reglas del sistema cartesiano, ubican el punto del plano correspondiente a cada par de valores. - En la interpretación del gráfico, identifican, en el gráfico, el valor de una de las variables que corresponde a un valor determinado de la otra. Observan la forma de la línea y cómo varían los valores correspondientes del eje vertical al avanzar sobre los valores del eje horizontal. 	<ul style="list-style-type: none"> - Cuando existe una relación de dependencia entre dos variables interesa averiguar cómo y cuánto varía una variable cuando también varía la otra. Esta relación puede estudiarse determinando pares de valores que pueden ser organizados en una tabla o en un gráfico cartesiano en que cada uno de los ejes corresponde a una de las variables. - El gráfico de una relación entre dos variables permite describir y comprender el comportamiento global de la relación así como identificar valores en los que la relación tiene un comportamiento particular. Esto generalmente resulta más difícil de lograr a partir de la tabla de valores. - La mayor o menor inclinación de la curva responde a una mayor o menor variación de la variable dependiente por una unidad de variación de la variable independiente. En el caso particular del gráfico de una línea recta, la interpretación es que la variación de la variable dependiente es siempre la misma para variaciones iguales de la variable independiente. - Una inclinación ascendente (pendiente positiva) significa que al aumentar la variable independiente, la variable dependiente también sufre un aumento. - Una inclinación descendente (pendiente negativa) significa que al aumentar la variable independiente, la variable dependiente disminuye. - Si al incrementar o disminuir la variable independiente, la variable dependiente no sufre cambios, entonces decimos que el gráfico en esa parte es plano o bien, constante. - Como se ha visto, la inclinación de un gráfico

(ascendente, descendente o plana) es una característica local, es decir, puede variar a lo largo del gráfico.



ETAPA 2

<u>TAREAS MATEMÁTICAS</u>	<u>CONDICIONES</u>	<u>TÉCNICAS</u>	<u>FUNDAMENTOS CENTRALES</u>
<ul style="list-style-type: none"> - Distinguen una magnitud variable de una magnitud constante. - Distinguen distintos tipos de variables: variables cualitativas y variables cuantitativas. - Identifican si existe o no relación de dependencia entre dos variables. 	<p>Los datos viene dados mediante tablas de valores.</p> <p>Se trabaja tanto con variables cualitativas como cuantitativas.</p>	<ul style="list-style-type: none"> - En la distinción entre una magnitud variable y una magnitud constante, reconocen que hay magnitudes o atributos que pueden asumir distintos valores así como otras magnitudes que pueden asumir un único valor. - En la distinción de distintos tipos de variables: cualitativas y cuantitativas, determinan valores que pueden tomar distintas variables, los comparan en términos de si tiene sentido o no ordenarlos, si corresponden a palabras (etiquetas o categorías) o números. - En la identificación de dependencia entre dos variables, determinan pares de valores correspondientes y buscan regularidades en el comportamiento de los datos. 	<ul style="list-style-type: none"> - Se denomina variable a aquella magnitud o atributo que puede tomar distintos valores, mientras que a aquella magnitud o atributo que puede tomar un único valor se les denomina constante. - Un mismo atributo, dependiendo de la situación que se esté analizando, puede ser variable o constante. - Es importante distinguir entre una variable y los valores que ella puede tomar. Por un lado, una variable corresponde al atributo de un objeto o fenómeno que se está considerando, mientras que los valores que ella puede tomar son datos específicos relativos a esa variable. - Frecuentemente en aritmética se estudian relaciones entre valores específicos. Por ejemplo, el área de un cuadrado cuyo lado mide 2 cm es de 4 cm². La noción de variable nos permite estudiar relaciones entre valores no específicos. En el caso del cuadrado, la relación entre la medida de un lado designado como l y su área $A_{\square} = l^2$ permite aplicar esta relación a cualquier cuadrado. El lado y el área pasan, de ser magnitudes constantes, a ser variables. - Una variable se dice cualitativa nominal si los valores que puede tomar consisten en etiquetas o categorías que no poseen un orden predeterminado. - Una variable se dice cualitativa ordinal si los valores que puede tomar consisten en etiquetas o categorías que sí poseen un orden predeterminado. - Una variable se dice cuantitativa si es que los valores que puede tomar son numéricos. En este caso nos podemos encontrar con variables cuantitativas discretas, cuando entre dos valores contiguos cualesquiera que ella puede tomar, no existe ningún otro valor, o variables continuas cuando entre dos valores cualesquiera que ella

			<p>puede tomar siempre existe otro valor que también puede tomar.</p> <ul style="list-style-type: none"> - Dos variables están relacionadas mediante una relación de dependencia cuando los cambios en una de las variables provoca cambios en la otra variable. - En una situación problemática podemos identificar variables que pueden estar relacionadas mediante una relación de dependencia o no. Por ejemplo, la temperatura ambiente no necesariamente está relacionada con la velocidad del viento en un determinado lugar. Así, podemos encontrar vientos huracanados tanto a altas como a bajas temperaturas puesto que la velocidad del tiempo no depende de la temperatura y viceversa. - Si bien es posible asociar dos variables cualesquiera, dos variables no siempre estarán relacionadas mediante una relación de dependencia.
--	--	--	--



ETAPA 1

<u>TAREAS MATEMÁTICAS</u>	<u>CONDICIONES</u>	<u>TÉCNICAS</u>	<u>FUNDAMENTOS CENTRALES</u>
<ul style="list-style-type: none"> - Describen la posición de puntos en el plano. - Ubican puntos en un sistema de coordenadas cartesianas. 	<p>Para la descripción y ubicación de puntos en el plano, se dispone solo de referentes verticales y horizontales.</p>	<ul style="list-style-type: none"> - En la descripción de puntos en el plano, establecen un sistema de coordenadas cartesiano como referencia y lo utilizan para describir un punto mediante su abscisa y su ordenada. El punto lo describen mediante dos números que indican la distancia de ese punto a cada uno de los ejes. La primera coordenada representa la distancia al eje vertical y, la segunda, la distancia al eje horizontal. - En la ubicación de puntos en un sistema de coordenadas cartesiano, establecen un sistema de coordenadas como referencia y lo utilizan para ubicar un punto mediante su abscisa y su ordenada. Dicho punto, 	<ul style="list-style-type: none"> - Para ubicar un punto en el plano, es necesario convenir un sistema de referencia común para todos. Para el estudio que realizaremos en esta Unidad escogeremos el sistema de coordenadas cartesiano, que permite determinar la posición de cualquier punto en el plano mediante dos números que indican la distancia de ese punto a cada uno de los ejes. La primera coordenada representa la distancia al eje vertical y, la segunda, la distancia al eje horizontal. - Las rectas que constituyen el sistema de coordenadas cartesianas son rectas numéricas perpendiculares entre sí, en las que se ha definido una escala. Esto significa que sobre cada eje se determina un punto como origen, que coincide con el del otro eje, y una unidad de longitud, no necesariamente la misma para cada eje.

		expresado mediante dos números, queda ubicado a la distancia del eje vertical que indica el primer número, y a la distancia del eje horizontal que señala al segundo número.	
--	--	--	--



APRENDIZAJES PREVIOS

III. Orientaciones para el docente: desarrollo de la estrategia didáctica

La estrategia didáctica propuesta para esta Unidad considera tres etapas que van abordando progresivamente los aspectos esenciales de la construcción e interpretación de gráficos. Las etapas son: ubicando puntos en el plano, estudiando tipos de variables y dependencia entre ellas y profundizando el trabajo con gráficos.

Es importante señalar que en la Unidad se consideran solo **valores positivos** de las variables de las situaciones que se estudian. De esta forma, el gráfico de las relaciones entre variables queda limitado al primer cuadrante del sistema de coordenadas cartesiano.

ETAPA I: UBICANDO PUNTOS EN EL PLANO

I.1. Posibilidad de representar pares de valores asociados en un sistema de coordenadas.

En muchas situaciones de la vida cotidiana aparece la necesidad de describir la ubicación exacta de un lugar o un punto específico de la ciudad. Usamos aquí palabras como a la derecha de, a la izquierda de, etc. Todo un sistema de códigos para orientar los desplazamientos. El problema que rápidamente aparece aquí es la relatividad de la descripción en función del punto tomado como referencia. Por ejemplo, si en una calle se encuentran la escuela, la municipalidad y la iglesia, una a continuación de la otra, podemos decir que la municipalidad está a la izquierda, si consideramos como referencia a la iglesia, y podemos decir que está a la derecha, si consideramos como referencia a la escuela. Esto pone de manifiesto la necesidad de convenir un sistema de referencia.

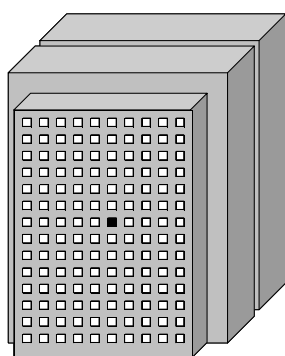
Con el objetivo de que niños y niñas discutan sobre la necesidad de dicho sistema de referencia, proponemos las siguientes actividades.

Actividad 1:

Se plantea a los alumnos y alumnas que resuelvan el siguiente problema:

En un edificio del barrio una señora pidió auxilio por la ventana. El conserje del edificio llamó a los bomberos quienes llegaron muy rápidamente. Para hacer la maniobra, los bomberos le preguntaron al conserje cuál era la ventana, mirando de frente al edificio.

En la **Ficha 1** se presenta un dibujo del edificio con sus respectivas ventanas, y aparece ennegrecida la ventana del siniestro:



¿Qué les diría el conserje a los bomberos para que identifiquen la ventana exacta del suceso? El profesor(a) pide a distintos alumnos sus respuestas y verifican entre todos si las instrucciones formuladas permiten efectivamente identificar la ventana ennegrecida.

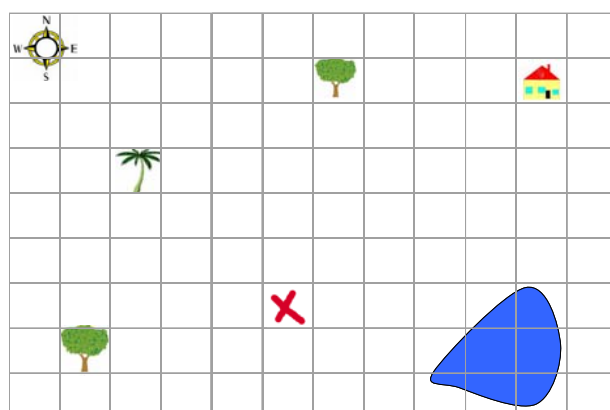
Posteriormente, el docente conduce una discusión sobre los distintos procedimientos usados por los alumnos para responder a la actividad. Se pregunta sobre cuáles formas de comunicar la ubicación de la ventana del incendio funcionaron, cuáles no y por qué, y sobre la equivalencia entre ellas.

Para continuar con el estudio, alumnas y alumnos trabajan en la siguiente actividad:

Actividad 2:

Los estudiantes trabajan en la **Ficha 2** donde se les propone la siguiente actividad.

Un explorador va en busca de un tesoro a la isla Maru Maru. Para ello tiene el siguiente mapa en donde aparece la ubicación exacta del tesoro.



En el trayecto a la isla pierde el mapa. Le manda un telegrama a su socio, quien posee una copia del mapa, y le pide que le dé las instrucciones para poder ubicar el tesoro. Si tú fueras la persona que tiene que enviar el telegrama, ¿qué instrucciones le darías al explorador para que pueda encontrar el tesoro? Se debe tener en cuenta que cada cuadrado corresponde a un paso.

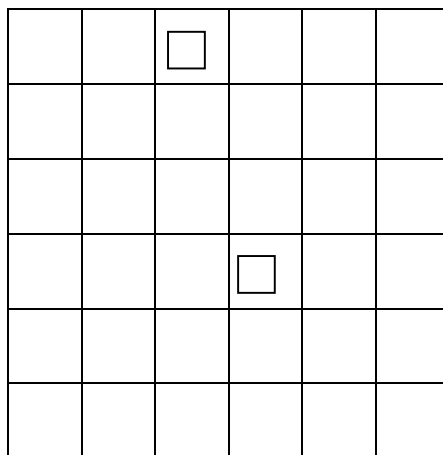
El profesor(a) conduce una discusión de las distintas maneras en que se dieron las instrucciones, con cuáles fue posible encontrar el tesoro y con cuáles no. Luego, destaca que aunque todos tienen el mismo mapa, las instrucciones dadas fueron muy variadas.

Se espera que concluyan que para dar la ubicación de un objeto en un plano, es necesario establecer un sistema de referencia, pero que no necesariamente será único.

El estudio continúa con la siguiente actividad.

Actividad 3:

Se propone a los estudiantes jugar el juego que aparece en la **Ficha 3**. El juego consiste en que cada participante ubique dos tesoros en el sector cuadrículado de juego (sin que los vea su compañero). Los tesoros se pueden representar con cuadrados, círculos, etc. y no pueden estar ubicados en dos cuadrados contiguos. Luego, por turnos, se debe tratar de adivinar la ubicación en que el otro jugador ubicó los tesoros. Para cada intento, el jugador a quien le están adivinando debe indicar si es que ha sido descubierto o no alguno de sus tesoros. Es solamente un intento por turno. Gana aquel jugador que encuentra todos los tesoros del otro jugador.



En un comienzo, aparecerán distintas maneras de comunicar la posible ubicación de los tesoros. Pero, a medida que se avanza en el juego, se espera que unifiquen la forma de comunicación. Es de esperar que, como consecuencia de esta actividad, los estudiantes concluyan que, si bien se pueden considerar distintos puntos de referencia, en algunas situaciones, con el objetivo de simplificar la comunicación y unificar la información, es necesario establecer un punto de referencia común, así como una forma única de dar los mensajes.

Tras esto, la profesora o profesor destaca la necesidad de establecer un único sistema de referencia con el objetivo de simplificar los mensajes enviados. Luego, explica al curso que durante las próximas actividades se estudiara el sistema de referencia más utilizado.

Para establecer un sistema de referencia único, que ayudará a lo largo de esta unidad, se proponen las siguientes actividades.

Actividad 4:

Se propone a los estudiantes que marquen un punto rojo y uno azul en una hoja de su cuaderno de matemáticas (sin usar), ubicándolos en un cruce del cuadriculado. Se les pide que intenten recordar la posición en que ellos se ubican, para luego poder reproducir dichos puntos en una hoja en blanco, en la misma posición. Luego de darles un tiempo, se les pide que cierren su cuaderno y cuenten hasta diez, que corten de su cuaderno una hoja en blanco cualquiera y que marquen los dos puntos tratando de que queden en la misma posición. A continuación, verifican si los puntos coinciden superponiendo las hojas y comentan los procedimientos utilizados.

Se invita a los estudiantes a que compartan los distintos procedimientos utilizados para ubicar los puntos en la misma posición. Se discute en relación a los procedimientos que funcionaron y cuáles no. Continúan desarrollando la siguiente actividad.

Actividad 5:

A ambos alumnos se les entrega un cuadriculado idéntico (**material 1**). Se pide que cada uno ubique dos puntos en su cuadriculado, sin que los vea su compañero. Luego, se les indica que escriban un mensaje a su compañero para que dibuje en su cuadriculado dos puntos en la misma posición. Quien recibe el mensaje no podrá pedir más información anexa al mensaje escrito. Luego que ambos hayan dibujado los puntos, superponen las hojas para verificar si los puntos han quedado en la misma posición.

En la **actividad 4** no se pide comunicar la ubicación de los dos puntos, razón por la cual la información que el estudiante debe registrar se simplifica, ya que él conoce la ubicación relativa de los puntos con respecto a la hoja y comprende, sin problemas, su propia codificación. En cambio, en la **actividad 5**, se debe encontrar una forma clara de comunicación, para que cualquier persona que lea el mensaje pueda ubicar dichos puntos, sin ambigüedad. Es por esto que se complejiza el trabajo de escribir un mensaje y se hace **más evidente la necesidad de establecer un sistema de referencia común**.

Se espera que concluyan que, para ubicar un punto en el plano sin ambigüedad, es necesario convenir un sistema de referencia común para todos. Para el estudio que realizaremos en esta Unidad escogeremos un sistema de coordenadas rectangulares, también llamado sistema de coordenadas cartesianas, que permite determinar la posición de cualquier punto en el plano mediante dos números que indican la distancia de ese punto a cada uno de los ejes. La primera coordenada representa la distancia al eje vertical y, la segunda, la distancia al eje horizontal.

Se recomienda que, una vez realizada esta puesta en común, se proponga a los estudiantes la tarea de describir, verbalmente y utilizando el sistema de coordenadas ya establecido, la ubicación de un punto que **no se encuentra en un cruce del cuadriculado**. Es de esperar que, para el desarrollo de esta actividad, los estudiantes reconozcan que, para describir el punto en cuestión, es necesario recurrir a los números decimales. Esta actividad se puede realizar dos o tres veces partiendo con puntos cuya ubicación sea más sencilla (por ejemplo, 2,5 ;7)) para concluir con un punto cuya ubicación sea más compleja de determinar (por ejemplo, (13,8; 15,6)) para cuyo caso, basta con que identifiquen de manera aproximada su ubicación. Para que los estudiantes trabajen los procedimientos surgidos, se les plantea que realicen la siguiente actividad.

Actividad 6:

Los estudiantes ubican una cantidad razonable de puntos en la hoja del cuaderno de matemáticas que usaron en la **Actividad 4**, que permita asegurar el dominio de esta tarea matemática. Es conveniente que en un comienzo, los puntos tengan coordenadas enteras, para así evitar dificultades relacionadas con la graduación de los ejes coordenados. Así, el punto $(12, 7)$ queda ubicado a la distancia de 12 unidades del eje vertical y de 7 unidades del eje horizontal. Se avanza pidiendo a los estudiantes que ubiquen puntos que tengan coordenadas decimales. Por ejemplo, el punto $(8,5;10)$ se ubica a 8,5 unidades del eje vertical y de 10 unidades del eje horizontal, así como el punto $(5,8;3,2)$ se ubica a 5,8 unidades del eje vertical y de 3,2 unidades del eje horizontal.

El tema de la graduación de los ejes será estudiado en la siguiente Unidad Didáctica, cuando se realice el estudio de la proporcionalidad directa.

Finalmente, se realiza una sistematización de lo estudiado en esta etapa:

Las rectas que constituyen el sistema de coordenadas cartesianas son rectas numéricas perpendiculares entre sí, en las que se ha definido una escala. Esto significa que sobre cada eje se determina un punto como origen, que coincide con el del otro eje, y una unidad de longitud, no necesariamente la misma para cada eje.

ETAPA II: ESTUDIANDO TIPOS DE VARIABLES Y DEPENDENCIA ENTRE ELLAS

II.1. Reconociendo variables en un problema

Frecuentemente en aritmética se estudian relaciones entre *valores específicos*. Por ejemplo, el área de un cuadrado cuyo lado mide 2 cm es de 4 cm². La noción de variable nos permite estudiar relaciones entre magnitudes o atributos, más allá de relaciones entre *valores específicos*, generalizando la relación a un amplio conjunto de valores. En el caso del cuadrado, la relación entre la medida de un lado designado como l y su área $A_{\square} = l^2$ permite aplicar esta relación a cualquier cuadrado. El lado y el área pasan, de ser consideradas como valores específicos o magnitudes **constantes**, a ser magnitudes **variables**, pudiendo tomar en este caso cualquier valor positivo.

Para que el alumnado pueda iniciarse en el estudio de esta distinción, se propone la siguiente actividad:

Actividad 7:

El profesor o profesora propone al curso que se **autodescriban mediante la mayor cantidad de datos posibles**. Por ejemplo, el nombre, edad, número de calzado, cantidad de hermanos, cantidad de dedos que tienen en una mano, cantidad de ojos, etc. Los anota en la pizarra y luego les pregunta cuáles de los datos son constantes en el tiempo y cuáles son variables. Luego, les pregunta sobre otros datos, primero constantes y luego variables, que no hayan sido propuestos.

Una vez terminada esta actividad, comenta con sus alumnos que hay atributos que toman un único valor en el tiempo, por ejemplo, el nombre de una persona, y que por tanto se denominan **constantes**; en cambio, hay atributos que toman distintos valores en el tiempo, como la edad, que se denominan **variables**.

Luego, pregunta por los distintos valores que las variables mencionadas pueden tomar, por ejemplo, la variable *edad* puede tomar valores como 12 años, 11 años o cualquier valor entre 0 años y 110 años (que, por lo que indican las evidencias, es la edad mayor que una persona puede llegar a tener), mientras que la variable *altura* puede tomar valores como 1,4 m, 1,6 m o cualquier valor entre 45 cm y 2,50 m (la altura aproximada que una persona tiene al nacer, y la mayor altura de un ser humano conocido). Se puntualiza entonces la distinción entre una *variable* y los *valores* que ella puede tomar.

Para continuar con el estudio, se realiza la siguiente actividad:

Actividad 8:

El profesor(a) plantea al curso: para los mismos atributos considerados en la actividad anterior, si en vez de considerar dichos atributos para cada alumno individualmente, consideramos los mismos atributo, pero dentro del **grupo curso**, ¿la cantidad de brazos de cada alumno del curso es variable o constante en el grupo curso?, ¿qué ocurre con el nombre de los alumnos del curso?, ¿y con la estatura?, etc. ¿Qué otros datos son constante dentro del grupo curso y cuáles son variables?

Esta actividad tiene como objetivo que los alumnos reconozcan que un atributo puede ser variable o constante dependiendo de la situación considerada. Por ejemplo, el atributo *nombre de una persona* es constante para ella misma, pero el atributo *nombre* considerado dentro de un grupo, puede tomar distintos valores: Ana, Juan, Federico, etc., por lo que en estas condiciones este atributo pasa a ser *variable*.

Luego, el profesor(a) pregunta por los valores que las variables mencionadas toman para el grupo curso, por ejemplo, la variable *edad* toma valores entre 12 años y 15 años, mientras que la variable *género* puede tomar los valores femenino o masculino. Pregunta por las diferencias que existen entre los valores que pueden tomar variables como el género (el nombre, color de piel, etc.) y los valores que pueden tomar variables como la edad (la estatura, el peso, etc.). Se espera que los estudiantes reconozcan que algunas variables pueden tomar valores que corresponden a **palabras** (etiquetas simples o categorías), así como otras variables pueden tomar valores **numéricos**. Por otro lado, los valores que pueden tomar las variables como el *género*, no llevan implícita una relación de orden, mientras que las variables como la *edad*, tienen un orden preestablecido. En este punto se sugiere explicar a los alumnos que las variables que consisten en palabras y que no tienen un orden inherente, se denominan **variables cualitativas nominales**, mientras que las variables que consisten en datos numéricos se denominan **variables cuantitativas**.

Finalmente, se realiza una sistematización de las ideas matemáticas más importantes de este primer apartado:

- Se denomina **variable** a aquella magnitud o atributo que puede tomar distintos valores, mientras que a aquella magnitud o atributo que puede tomar un único valor se le denomina **constante**.
- Un mismo atributo, dependiendo de la situación que se esté analizando, puede ser *variable* o *constante*.

- Es importante distinguir entre una *variable* y los *valores* que ella puede tomar. Por un lado, una variable corresponde al atributo de un objeto o fenómeno que se está considerando, mientras que los valores que ella puede tomar son datos específicos relativos a esa variable. Por ejemplo, la variable *peso de una persona* puede tomar valores como 30 kg, 50 kg o cualquier valor entre 2 kg y 250 kg.
- Las variables pueden tomar valores que corresponden a *palabras* (etiquetas simples o categorías) o a *números*. Las variables que consisten en palabras y que no tienen un orden inherente se denominan **variables cualitativas nominales**, mientras que las variables que consisten en datos numéricos se denominan **variables cuantitativas**.

En problemas anteriores se ha estudiado la distinción entre variables cualitativas nominales y variables cuantitativas. Ahora profundizaremos en el estudio de las variables cuantitativas, es decir, aquellas que toman valores numéricos. Nos centraremos en el estudio de los valores que pueden tomar este tipo de variables, considerando aspectos tales como, si su naturaleza permite que tomen cualquier valor comprendido entre otros dos valores dados o bien, si su naturaleza no lo permite.

Actividad 9:

El profesor(a) propone a los estudiantes que, organizados en parejas, consideren distintos tipos de polígonos regulares y que respondan a las siguientes preguntas:

- a. ¿La cantidad de lados que puede tener un polígono regular cualquiera es una cantidad que varía, es decir, es una magnitud variable? ¿Por qué?
- b. ¿Es posible que esta variable tome valores entre 9 lados y 11 lados? ¿Y entre 9 lados y 10 lados? ¿Por qué?
- c. ¿Qué valores puede tomar esta variable?

Luego de que los estudiantes responden las preguntas de la actividad, el docente gestiona una discusión que conduzca a generar una distinción entre los distintos tipos de variables cuantitativas que pueden existir, tal como se explica a continuación.

En el caso de esta actividad, la *variable* considerada “*cantidad de lados de un polígono regular*” es una variable **cuantitativa** que no puede tomar cualquier valor numérico. En efecto, no existen polígonos con *un* lado ni con *dos*, por lo que esta variable no puede tomar estos valores. Por otro lado, tampoco existen polígonos que tengan 3,5 lados o cualquier cantidad **no** entera de lados, por lo que esta variable solo puede tomar valores naturales mayores o iguales a 3. Por esta razón se dice que esta es una **variable discreta**, ya que entre dos valores consecutivos de la variable no existe ningún otro valor que ella pueda tomar.

Esta actividad permite inmediatamente que los estudiantes imaginen, por contraste, que pueden existir variables numéricas tales que, para dos valores cualesquiera de la variable siempre existe un valor intermedio que ella puede tomar. Este tipo de variable cuantitativa se denomina **variable continua**. Por ejemplo, el *peso de distintos animales*, la *altura de distintos cerros*, el *número de calzado de distintas personas*, etc., son variables continuas.

- Una variable se dice cuantitativa si es que los valores que puede tomar son numéricos. En este caso nos podemos encontrar con variables cuantitativas discretas, cuando entre dos valores contiguos cualesquiera que ella puede tomar, no existe ningún otro valor (por ejemplo, número de hijos de una familia, ya que entre 2 y 3 hijos no existe un valor intermedio) o variables continuas, cuando entre dos valores cualesquiera que ella puede tomar siempre existe otro valor que ella también puede tomar (por ejemplo, el perímetro de un cuadrado, ya que entre 3,5 cm de perímetro y 3,6 cm de perímetro se puede encontrar un cuadrado de perímetro 3,55 cm y así sucesivamente).

II.2. Existencia de relación de dependencia entre dos variables

El estudio continúa abordando el hecho de que en una situación problemática podemos identificar variables que pueden estar relacionadas mediante una relación de dependencia o no. Por ejemplo, la temperatura ambiente no necesariamente está relacionada con la velocidad del viento en un determinado lugar del planeta. Así, podemos encontrar vientos huracanados tanto a altas como a bajas temperaturas, puesto que la velocidad del viento **no depende** de la temperatura y viceversa. Por el contrario, en un cuadrado la variable *medida de la superficie* **sí depende** de la variable *medida del lado*, mediante la relación (o ley de correspondencia): la medida de la superficie (*área*) es igual al cuadrado de la medida del lado ($A_{\square} = l^2$). En este caso se dice que hay una **relación de dependencia entre las dos variables**.

Este apartado comienza con una actividad que tiene como propósito que los estudiantes reconozcan que una variable puede estar relacionada con otra (u otras variables), de modo tal que si esta última cambia su estado, se produce como consecuencia un cambio de estado en la primera. Se trata también de que alumnas y alumnos reconozcan que para un problema determinado, en el que existe relación de dependencia entre dos variables, una de dichas variables asume un rol de **variable independiente**, es decir, aquella que el enunciado del problema requiere que sea manipulada para estudiar los cambios que ocurren en la otra variable, mientras que la otra asume el rol de **variable dependiente**, es decir, aquella que es afectada por los cambios experimentados en la primera.

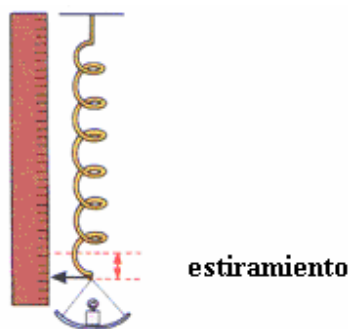
La actividad es la siguiente y corresponde a la **Ficha 4**:

Actividad 10:

La actividad consiste en una situación experimental en la que consideraremos un **resorte** (un espiral grueso y ancho, de aquellos que se utilizan para anillar hojas) que lo fijaremos en forma vertical y en cuyo extremo inferior se colgará un soporte (una bolsita plástica, por ejemplo) para colocar distintos pesos. Se pide medir las distintas longitudes alcanzadas por el resorte al colocar los distintos pesos.

Para ello, una vez fijado el resorte, se marcará la longitud que alcanza el extremo inferior cuando este no tiene ningún peso agregado (nivel cero).

Se medirá experimentalmente el estiramiento del resorte con diferentes cantidades de objetos de un mismo tipo (por ejemplo, monedas de \$10: 1 moneda, 3 monedas, 7 monedas, etc.).



Mientras se realiza la actividad, se formulan las siguientes preguntas:

- ¿Qué sucede al agregar peso en el extremo del resorte? ¿Qué sucede con el resorte si hay 5 monedas de \$10 en su extremo?
- ¿Qué sucede con el resorte si hay 10 monedas de \$10 en su extremo?
- ¿Qué esperarías que sucediera con el largo del resorte si se agregan 5 monedas más? ¿Y si se quitan 10 monedas?
- ¿Cuáles son las variables en este experimento?
- ¿Existe dependencia de una de estas variables con respecto a la otra? Justifica tu respuesta.
- Para este problema, ¿cuál de las variables es la que está siendo determinada por el comportamiento de la otra?, ¿por qué?

Una vez realizada la actividad y su correspondiente revisión colectiva, el docente señala el hecho de que existe una **relación de dependencia** cuando los cambios efectuados en una de las variables provoca cambios en la otra. Por otro lado, cada vez que nos encontremos frente a una relación de dependencia entre dos variables, una de esas variables asume un rol de **variable independiente**, es decir, aquella que el enunciado del problema requiere que sea manipulada para estudiar los cambios que ocurren en la otra variable, mientras que la otra asume el rol de **variable dependiente**, es decir, aquella que es afectada por los cambios experimentados en la primera. En el caso particular del experimento estudiado, la variable independiente es la *cantidad de monedas que se ponen en el extremo del resorte*, y la variable dependiente es el *alargamiento del resorte*, dado que el experimento consiste en colocar distintas cantidades de monedas en el extremo del resorte para estudiar qué ocurre con el largo que alcanza el resorte.

Del mismo modo, se debe tener claro que no siempre existe una relación de dependencia entre dos variables cualesquiera y, por tanto, es necesario aprender a distinguir cuándo existe o no una relación de dependencia entre dos variables. Con este propósito se propone realizar la siguiente actividad, para la cual se sugiere que el profesor(a) lleve a la clase uno o varios recortes del cuadro del pronóstico del tiempo del diario del día. La actividad que sugerimos es la siguiente:

Actividad 11:

Se pregunta a alumnas y alumnos cuál es la temperatura anunciada para este día. Luego, se les pregunta: ¿La temperatura es una variable o una constante? ¿Qué valores puede tomar la variable temperatura? ¿De qué factores depende la temperatura del ambiente?

Para responder a la última pregunta, el profesor puede apoyar a los estudiantes formulándoles preguntas del tipo: ¿La temperatura es constante a través del año? ¿La temperatura permanece constante a lo largo del día? ¿La temperatura permanece constante a lo largo del país? Etc.

Luego de que los alumnos respondan y planteen distintos factores que influyan en la temperatura ambiental, se les pregunta: ¿Los factores mencionados son variables o constantes? Se espera que los alumnos reconozcan que los factores de los que depende la variable temperatura también son variables. Finalmente, se les pregunta: ¿La temperatura depende del día de la semana en el que me encuentro? ¿La temperatura depende de mi edad?

La actividad termina preguntando a los estudiantes si es posible encontrar una relación de dependencia entre dos variables cualesquiera.

Una vez concluida esta actividad, comenta con los estudiantes el hecho de que dos variables pueden estar relacionadas mediante una relación de dependencia, siempre y cuando los cambios en una de las variables afecten directamente a la otra variable. Esto no siempre ocurre, y en este caso decimos que las variables en cuestión **no están relacionadas** mediante una relación de dependencia. Por ejemplo, el peso de los miembros de una familia **no depende** del número de integrantes que tenga la familia, pero **sí depende** de los hábitos alimenticios de la misma, de condiciones genéticas, etc.

Luego, puede proponer un conjunto de situaciones en que aparezcan dos variables, para que los estudiantes analicen y determinen si existe o no relación de dependencia entre ellas. Por ejemplo, numeración de la casa y altura de la construcción; piso en que vive una familia y cantidad de hijos, consumo de luz al mes y precio a pagar; edad y peso, etc.

- Dos variables están relacionadas mediante una **relación de dependencia** cuando los cambios en una de las variables provoca cambios en la otra variable.
- En una situación problemática podemos identificar variables que pueden estar relacionadas mediante una relación de dependencia o no. Por ejemplo, la temperatura ambiente no necesariamente está relacionada con la velocidad del viento en un determinado lugar. Así, podemos encontrar vientos huracanados tanto a altas como a bajas temperaturas, puesto que la velocidad del tiempo no depende de la temperatura y viceversa.

Se termina con un trabajo que asegure la apropiación de los conocimientos estudiados por parte de los estudiantes, mediante el desarrollo de la **Ficha 5**.

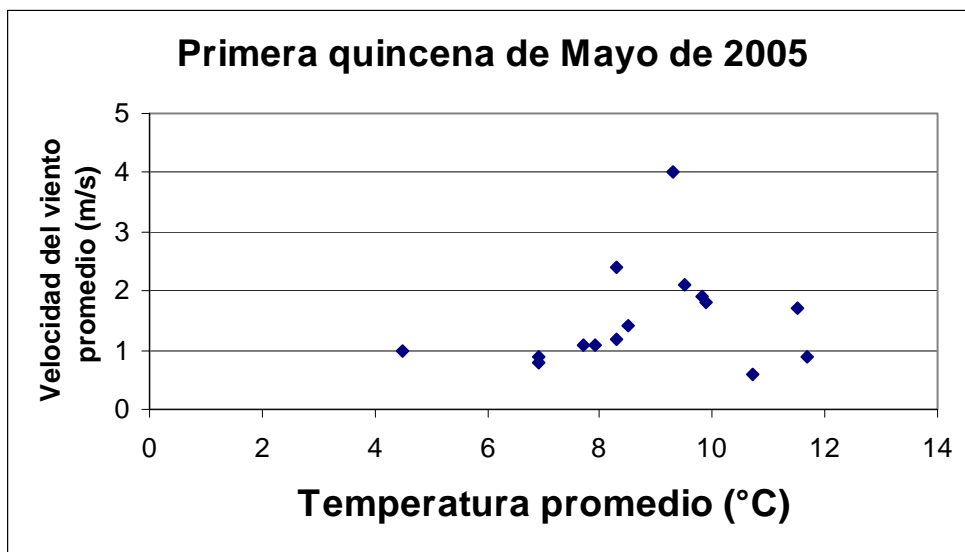
II.3 Representación gráfica de variables para reconocer si existe o no relación de dependencia entre dos variables

Esta etapa continúa con el desarrollo de la **Ficha 6**, que plantea la problemática de identificar en diversas situaciones, si existe o no una relación de dependencia entre las dos variables asociadas.

Actividad 12:

1. Observa la siguiente tabla con su respectivo gráfico:

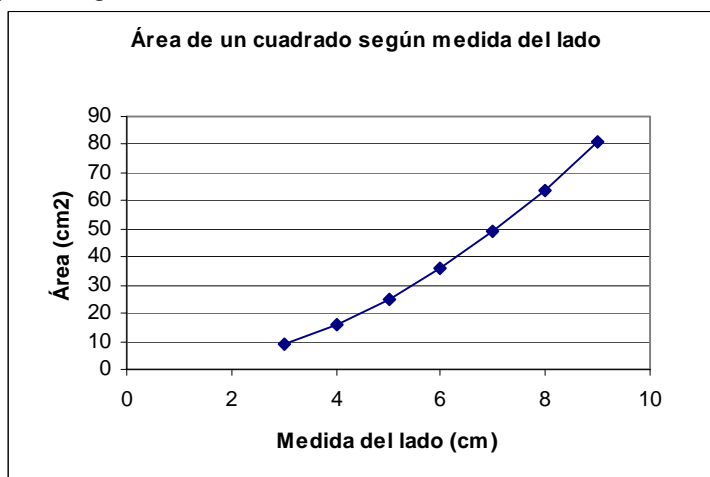
Primera quincena de Mayo	
Temperaturas promedio (°C)	Velocidad del viento promedio (m/s)
9,3	4
11,5	1,7
7,9	1,1
7,7	1,1
9,5	2,1
9,9	1,8
8,3	1,2
10,7	0,6
11,7	0,9
8,3	2,4
9,8	1,9
8,5	1,4
6,9	0,8
4,5	1
6,9	0,9



- ¿Cuáles son las dos *variables asociadas* de la situación?
- ¿Cuál fue la mayor velocidad del viento de esta quincena?
- ¿Cuál fue la velocidad del viento cuando la temperatura promedio fue la mayor?
- ¿Cuál fue la velocidad del viento cuando la temperatura promedio fue de 6,9°C?
- ¿Cuál fue la velocidad del viento cuando la temperatura promedio fue de 8,3°C?
- ¿Qué ocurre con la velocidad del viento a medida que disminuye la temperatura?
- ¿Es posible conocer la temperatura del viento que habrá si es que hay 12°C de temperatura?
- ¿Existe una relación de dependencia entre las dos variables asociadas? ¿Por qué?

2. Observa la siguiente tabla con su respectivo gráfico:

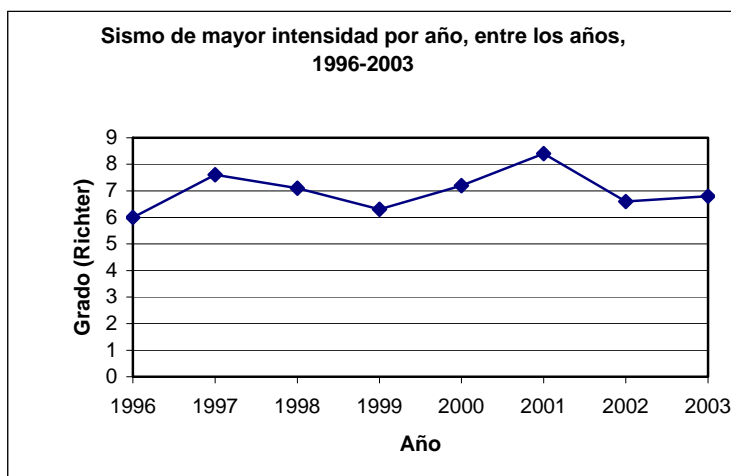
Medida del lado del cuadrado (cm)	Área del cuadrado (cm ²)
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
9	81



- ¿Cuáles son las dos variables asociadas de la situación?
- ¿Cuál es el área de un cuadrado de lado 12 cm?
- ¿Qué ocurre con el área del cuadrado cuando aumenta la longitud de su lado?
- ¿Es posible conocer el área del cuadrado para cualquier valor de la longitud de su lado?
- ¿Existe una relación de dependencia entre las dos variables asociadas? ¿Por qué?

3. Observa la siguiente tabla con su respectivo gráfico:

Año	Grado del sismo de mayor intensidad (escala de Richter)
1996	6
1997	7,6
1998	7,1
1999	6,3
2000	7,2
2001	8,4
2002	6,6
2003	6,8



- n) ¿Cuáles son las dos variables asociadas de la situación?
- o) ¿Cuántos grados en la escala de Richter tuvo el terremoto de mayor intensidad del año 1998?
- p) ¿En qué año, entre 1996 y 2003, fue el terremoto de mayor intensidad?
- q) ¿Es posible saber cuántos grados tuvo el terremoto de mayor intensidad del año 2005?
- r) ¿Qué ocurre con el grado del sismo de mayor intensidad del año, a medida que avanzan los años?
- s) ¿Se puede saber el grado del sismo de mayor intensidad que habrá en los años venideros?
- t) ¿Existe una relación de dependencia entre las dos variables asociadas? ¿Por qué?

Una vez resuelta la actividad por los estudiantes, es importante destacar que siempre es posible asociar dos variables cualesquiera, con el fin de realizar algún estudio o registro, sin que necesariamente exista una relación de dependencia entre dichas variables. Así, se pueden asociar dos variables que no tengan relación de dependencia entre ellas, como por ejemplo la velocidad del viento y la temperatura; del mismo modo podemos asociar dos variables que sí estén relacionadas mediante una relación de dependencia, como es el caso del lado del cuadrado y su área.

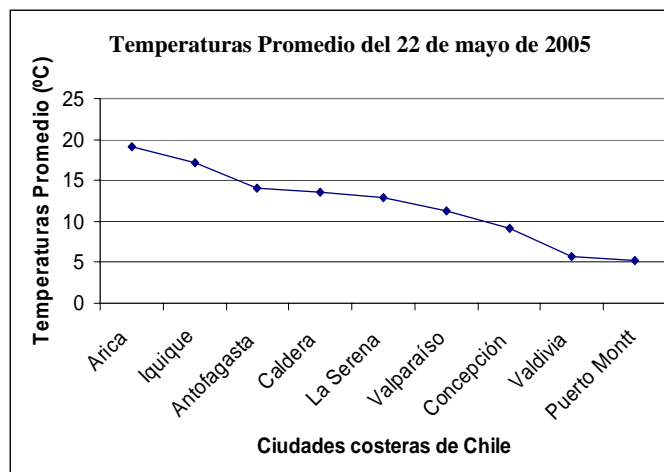
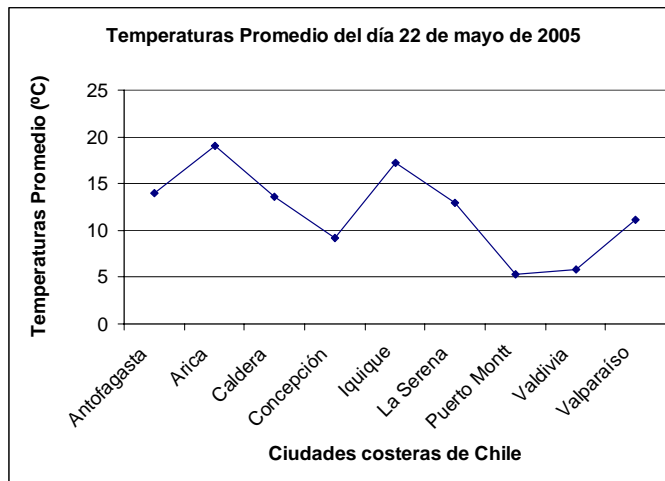
Es posible representar en un gráfico pares de puntos que corresponden a variables que no están relacionadas mediante una relación de dependencia. En este caso **no** es posible determinar valores desconocidos de una de las variables, a partir de valores conocidos de la otra variable. Sin embargo, es posible estudiar el comportamiento global de la relación. En cambio, cuando las variables están relacionadas mediante una relación de dependencia, además de poder estudiar el comportamiento global de la relación, es posible predecir valores de una variable a partir de valores de la otra.

Con el propósito de reforzar esta idea, se propone que realicen las siguientes actividades:

Actividad 13:

Desarrollan las actividades propuestas en la **Ficha 7 sobre Temperaturas en Chile**. Los estudiantes estudian dos gráficos en los que una de las variables es *ciudades costeras de Chile*, y la otra *temperatura*

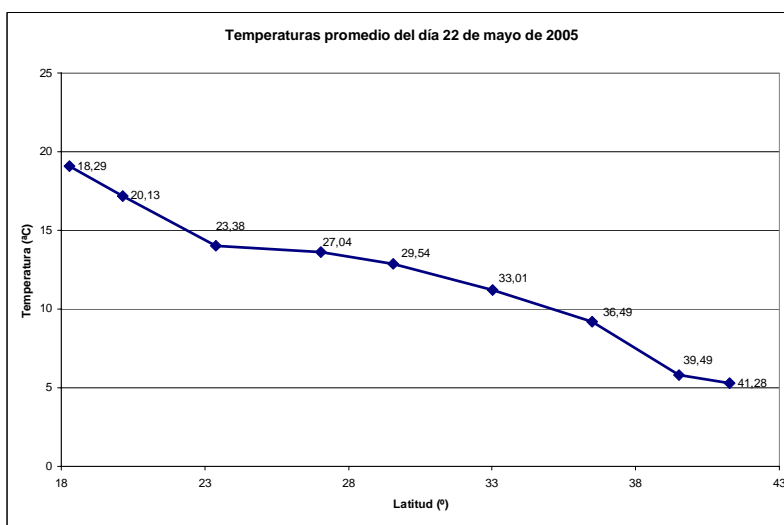
promedio en un día determinado, en grados Celsius. Los estudiantes deben establecer semejanzas y diferencias entre ambos gráficos, y buscar razones por las cuáles los gráficos son diferentes. Los gráficos son:



A continuación, el profesor(a) les propone que agreguen una nueva ciudad costera, por ejemplo, Tocopilla. Pregunta ¿dónde quedaría ubicada esa ciudad en el primer gráfico? Los alumnos aplican aquí el criterio alfabético. Luego, pregunta ¿dónde quedaría ubicada en el segundo gráfico? Los alumnos aplican el criterio geográfico. Finalmente, pregunta si pueden estimar la temperatura promedio de esta ciudad a partir de cada gráfico.

Los gráficos de la **Ficha 7** se diferencian en el criterio seguido para ordenar la variable *nominal*. En el primer gráfico, los valores dados de la variable nominal *ciudades costeras de Chile*, se encuentran ordenados por orden alfabético. En tanto, en el segundo gráfico, los valores dados para esta variable se encuentran ordenados por ubicación geográfica de las ciudades, de norte a sur. Al intercalar una ciudad, en el primer gráfico no es posible estimar su temperatura, puesto que esta no depende del orden alfabético de las ciudades. En cambio, en el segundo gráfico es posible, ya que en este caso la temperatura depende del criterio usado para ordenar las ciudades. En efecto, el orden geográfico de norte a sur está íntimamente relacionado con la latitud, y la temperatura depende de la latitud. De hecho, si realizamos el gráfico

considerando las **latitudes de norte a sur** de las mismas ciudades, el gráfico resulta muy parecido al gráfico en que se consideraron las **ciudades de norte a sur**, tal como se puede apreciar en el siguiente gráfico:



En relación a la pregunta sobre la temperatura en la ciudad de Tocopilla (la que se encuentra al norte de Antofagasta), al ubicarla en el primer gráfico (ordenado por orden alfabético) queda entre Puerto Montt y Valdivia. En este caso no tiene sentido tomar el gráfico como base para hacer una estimación, dado que al hacerlo de este modo nos da que la temperatura aproximada en esta ciudad en el día registrado es de 6° Celsius. En cambio, al ubicarla en el segundo gráfico, queda entre Iquique y Antofagasta y en este caso sí tiene sentido hacer una estimación, puesto que a medida que se avanza hacia el norte, la temperatura de las ciudades costeras aumenta. Así, la temperatura promedio de Tocopilla en el día registrado, al ubicarla en el segundo gráfico, es de aproximadamente 16° Celsius.

Finalmente, se sistematizan con los estudiantes los aprendizajes de este apartado:

- Si bien es posible **asociar** dos variables cualesquiera, dos variables **no** siempre estarán relacionadas mediante una relación de dependencia.
- Dos variables están relacionadas mediante una **relación de dependencia** cuando los cambios en una de las variables provoca cambios en la otra variable.

ETAPA III: PROFUNDIZANDO EL TRABAJO CON GRÁFICOS

Esta etapa tiene como propósito que alumnas y alumnos construyan gráficos, que avancen en el estudio de su interpretación y que comprendan que el gráfico proporciona una mirada global y profunda del fenómeno, lo que permite inferir información que no siempre es posible a partir de la tabla de valores.

III.1. Construcción de gráficos

Este apartado tiene como propósito que los alumnos construyan gráficos y avancen en el estudio de su interpretación. Para ello, se comienza con una actividad en que, para su resolución, será necesario que los alumnos construyan el gráfico a partir de una tabla de valores.

Es bueno destacar en este punto que los alumnos ya han realizado, en la primera etapa, un trabajo de ubicación de puntos en un sistema de coordenadas cartesiano, razón por la cual es de esperar que la tarea de ubicar los puntos de la tabla de valores en el gráfico no represente un problema para ellos.

Actividad 14:

Los alumnos realizan el estudio de la **Ficha 8**.

En la Ficha médica de un paciente se encuentra el registro de su temperatura durante los tres primeros días de hospitalización. Una enfermera ha organizado estos datos en la siguiente tabla:

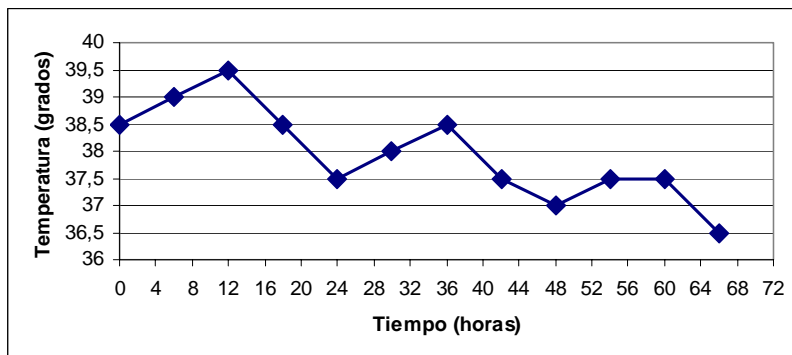
Tiempo (Hrs.)	Temperatura (°C)
0	38,5
6	39
12	39,5
18	38,5
24	37,5
30	38
36	38,5
42	37,5
48	37
54	37,5
60	37,5
66	36,5

El profesor(a) realiza preguntas respecto a hechos puntuales, posibles de determinar a partir de la tabla, por ejemplo, ¿cada cuántas horas se ha tomado la temperatura?, ¿cuándo tuvo la temperatura más alta? ¿y la más baja?, ¿en torno a qué valor estuvo la temperatura más frecuente? Luego, realiza preguntas respecto a hechos globales que no son fáciles de inferir a partir de la tabla, por ejemplo, ¿cómo ha sido la evolución del paciente respecto a la temperatura en estos tres días de hospitalización?

Para visualizar la evolución del paciente, el profesor les propone representar en el sistema de coordenadas dado en la Ficha los datos recogidos en la tabla. Orienta el trabajo de los alumnos en la realización de esta tarea. Luego, pregunta qué temperatura creen que tuvo el paciente a las tres horas de hospitalización. Los alumnos discuten si es posible encontrar una hipótesis razonable. El profesor orienta esta discusión para que los alumnos concluyan que si unen los puntos graficados mediante líneas rectas podrán obtener una visión más clara de la evolución del paciente en los tres días.

El profesor repite las preguntas que respondieron consultando la tabla, para que ahora las respondan basándose en la información del gráfico, a fin de que comparen la mayor o menor dificultad en la obtención de las respuestas, en ambos casos.

Un momento clave para el desarrollo de esta actividad se vive cuando, para poder tener una imagen global del comportamiento de la temperatura del paciente a lo largo de los tres días, se considera que es conveniente unir los puntos graficados, tal como muestra el siguiente gráfico:



¿Qué significado tiene el hecho de unir puntos de un gráfico? ¿Siempre tiene sentido hacerlo?

Unir puntos del gráfico que corresponden a valores sucesivos de la variable independiente es útil para estimar, en base al gráfico, valores no conocidos de la variable dependiente. En particular, cuando los puntos se unen con una **línea recta**, esta representa una estimación razonable de los valores de la variable dependiente para los valores intermedios de la otra variable. Por ejemplo, si la temperatura del paciente a las 6 horas de su ingreso fue de $39,2^{\circ}$ y a las 12 horas fue de 40° , es posible estimar que a las 9 horas, el valor de la temperatura fue de $(39,2^{\circ} + 40^{\circ})/2$. Este tipo de análisis no tendría sentido si entre las 6 y las 12 horas no existiera otra hora posible, como sucede cuando la variable independiente está graduada de 1 en 1 y corresponde a objetos discretos no fraccionables, ni tampoco en caso de que las variables no estuvieran relacionadas mediante una ley de correspondencia. Claro está que, la mayor contribución que realiza el gráfico en este caso, es permitir el estudio de la evolución del paciente a lo largo de tres días, es decir, permite tener una visión global del fenómeno y predecir el futuro estado de salud del paciente.

Por otro lado, hay gráficos en los que se representan pares de puntos que corresponden a valores de dos variables que no tienen relación de dependencia entre ellas y, por ello, no es posible determinar valores de una de las variables a partir de valores de la otra. Un ejemplo de esta situación es el caso de las temperaturas promedio en ciudades costeras de Chile ordenadas alfabéticamente. El único sentido que podría tener unir puntos sucesivos del gráfico, en este caso, es el de visualizar la diferencia entre valores contiguos de la variable ubicada en el eje vertical, dado que esos trazos no nos permiten inferir ninguna otra información.

Cuando existe una relación de *dependencia* entre dos variables interesa averiguar cómo y cuánto varía una variable, designada como *variable dependiente*, cuando también varía la otra, designada como *variable independiente*. Esta relación puede estudiarse determinando pares de valores correspondientes que pueden ser organizados en una tabla o en un gráfico cartesiano, en que cada uno de los ejes corresponde a una de las variables. La variable independiente se representa en el eje horizontal y, la variable dependiente, en el eje vertical.

Para que los estudiantes puedan valorar el aporte que realiza el gráfico al estudio de determinadas situaciones, se propone que realicen la siguiente actividad.

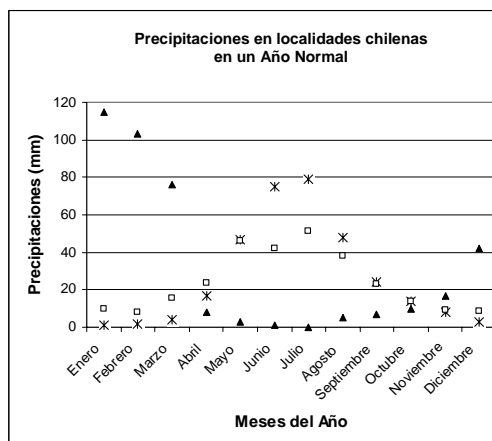
Actividad 15:

Continúan con el estudio realizando la **Ficha 9**.

En la Ficha aparece una tabla que contiene las precipitaciones (en milímetros) de tres ciudades de Chile, durante los 12 meses del año. Además, contiene un gráfico en que aparecen graficados los puntos de la tabla por ciudad.

Los alumnos deben identificar los puntos que corresponden a cada ciudad y comparar el comportamiento general de las precipitaciones en las tres ciudades. Para ello contestan las preguntas de la Ficha.

	Precipitaciones		
	Santiago	Chile Chico	Parinacota
Enero	1	10	115
Febrero	2	8	103
Marzo	4	16	76
Abril	17	24	8
Mayo	47	46	3
Junio	75	42	1
Julio	79	52	0
Agosto	48	38	5
Septiembre	24	23	7
Octubre	14	14	10
Noviembre	8	9	17
Diciembre	3	9	42



- ¿En qué ciudad hubo una mayor cantidad de agua caída durante el mes de Abril?
- Comparando la tabla con el gráfico, identifica los códigos del gráfico que corresponden a cada ciudad.
- A partir del gráfico, determina:
 - ¿En qué mes tuvo Santiago la mayor cantidad de agua caída en el año?
 - ¿En qué mes tuvo Chile Chico la menor cantidad?
 - ¿En qué mes no llovió en Parinacota?
- ¿Es igual el comportamiento de las precipitaciones caídas durante el año en las tres ciudades? Justifica tu respuesta.

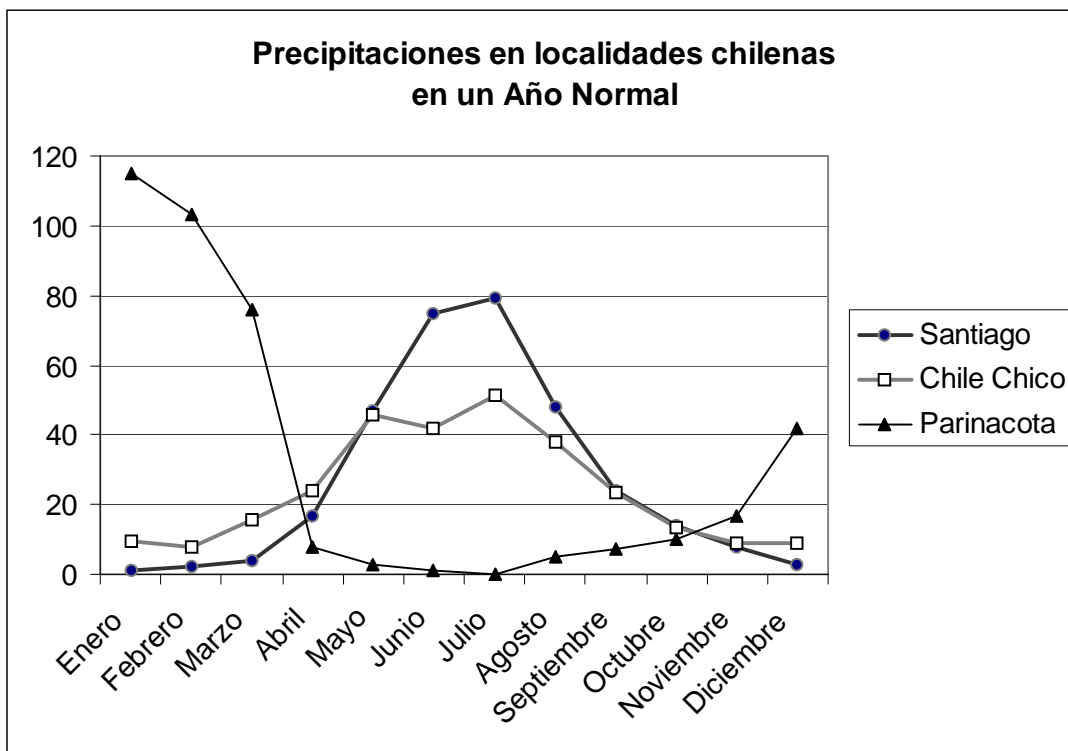
El propósito de esta actividad es que alumnas y alumnos valoren qué tipo de información es más fácil obtener a partir de la tabla y cuál a partir del gráfico. Por ello la respuesta de la letra **d** es clave, en el sentido de que comparar el comportamiento de las precipitaciones caídas durante el año, es claramente más fácil de realizar a partir del gráfico. Para que los alumnos puedan constatar esta **ventaja**, es necesario que decidan unir los puntos del gráfico antes de contestar. En caso de que no los unan y respondan solo comparando los meses en que hubo más o menos precipitaciones en cada una de las ciudades, el profesor(a) debe apoyarlos realizando preguntas del tipo: ¿Qué ocurrió el resto de los meses comparativamente? ¿Cómo es el comportamiento general de las precipitaciones caídas en Santiago con respecto a las de Chile Chico? El profesor finaliza esta discusión preguntando qué sentido tiene unir los puntos del gráfico.

Se espera que los alumnos, apoyados por el profesor, puedan realizar un análisis que les permita llegar a una conclusión como la siguiente:

De la lluvia caída durante el mes de abril puede decirse que en Santiago llovió más que en Parinacota y menos que en Chile Chico. Esta información se puede obtener muy fácilmente a partir de la tabla. Las curvas, en cambio, por mostrarnos globalmente los datos, permiten comparar la **variación** de las lluvias en

el año, correspondientes a un régimen normal de lluvias. Comparando Santiago con Chile Chico se puede apreciar que el régimen de lluvias tiene un comportamiento **similar** en ambas ciudades, no obstante, durante la época de lluvias (Mayo-Agosto), en Santiago llueve más que en Chile Chico. Este comportamiento es típico de la mayoría de las ciudades de Chile. Sin embargo, comparando las curvas de Santiago y Chile Chico con la curva de Parinacota, se puede observar que el régimen de lluvias en esa localidad está *invertido*. Esto es, en Parinacota llueve más cuando en Santiago y Chile Chico llueve menos, y viceversa. Ese es un efecto climático de esa zona debido a la circulación del aire por el altiplano boliviano, efecto que se conoce con el nombre de “invierno boliviano”. Al ver los datos **en su conjunto** en el gráfico, es más fácil deducir este efecto.

Por otro lado, se deberá hacer notar a los estudiantes que en esta actividad aparece un nuevo tipo de variable cualitativa: la variable ordinal. Esta corresponde a los meses del año, ya que si bien esta variable también consiste en palabras (etiquetas o categorías) en este caso, a diferencia de lo que ocurre para las variables nominales, dichas etiquetas sí poseen un orden predeterminado.



- El gráfico de una relación entre dos variables permite describir y comprender el comportamiento global de la relación, identificar valores en los que la relación tiene un comportamiento particular, así como predecir comportamientos. Generalmente, esto resulta más difícil de lograr a partir de la tabla de valores.
- Una variable se dice ordinal si los valores que puede tomar consisten en etiquetas o categorías que sí poseen un orden predeterminado, por ejemplo: bueno/regular/malo, enero/febrero/.../diciembre.

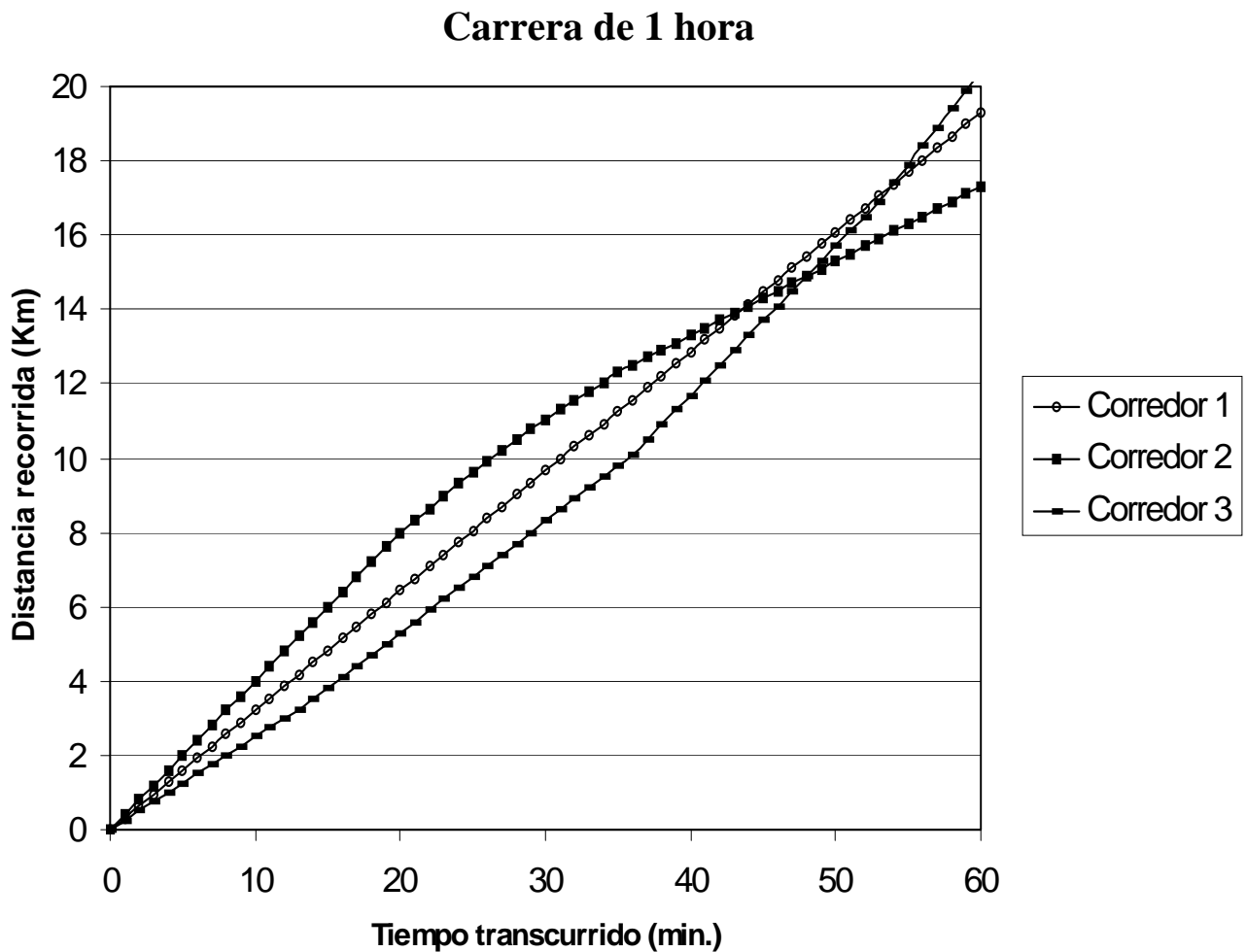
III.2. Profundizando en el análisis de gráficos.

La etapa continúa con un trabajo de profundización en el análisis de gráficos mediante el desarrollo de las **Fichas 10 y 11**, que tienen como objetivo introducir al alumnado en un análisis cualitativo de la pendiente del gráfico:

Actividad 16:

Los alumnos realizan en parejas la **Ficha 10**.

El siguiente gráfico describe en forma aproximada el comportamiento de tres corredores, durante una competencia llamada “carrera de 1 hora”. Esta es una carrera muy peculiar, en la que los corredores corren durante una hora, y gana aquel corredor que, una vez concluido el tiempo de competencia, haya recorrido una mayor distancia.



De acuerdo a la información entregada por el gráfico, respondan:

- 1) ¿Cuál de los tres corredores recorrió una mayor distancia?
- 2) ¿Cuál de los corredores mantuvo siempre el mismo ritmo durante la carrera? ¿Por qué?
- 3) ¿Cuál de los tres corredores comenzó la carrera con una mayor velocidad?
- 4) ¿Por qué falló la estrategia del corredor que llegó último de los tres?
- 5) ¿En qué consistió la estrategia del ganador?

Una vez que los estudiantes hayan resuelto la ficha, se realiza una revisión colectiva de esta. A continuación se destaca el hecho de que la mayor o menor inclinación de una curva (pendiente de la curva) entrega información importantísima para el análisis de un gráfico. En efecto:

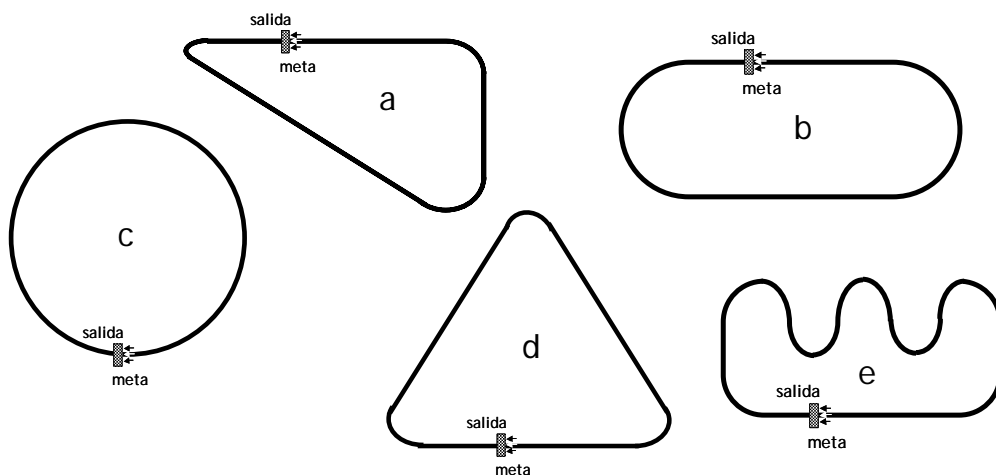
La mayor o menor inclinación de la curva responde a una mayor o menor variación de la variable dependiente por una unidad de variación de la variable independiente. En el caso particular del gráfico de una línea recta, la interpretación es que la variación de la variable dependiente es **siempre la misma** para variaciones iguales de la variable independiente.

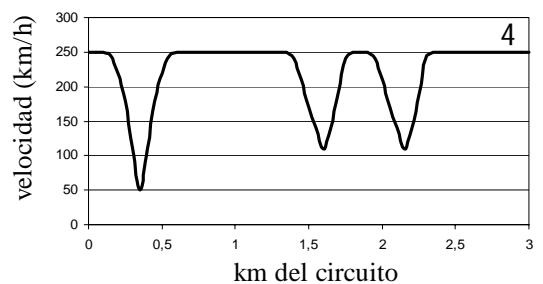
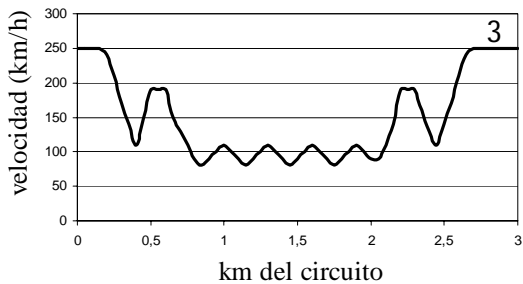
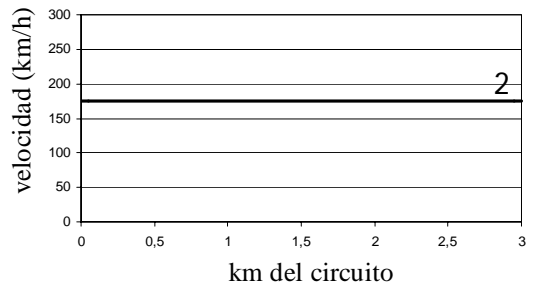
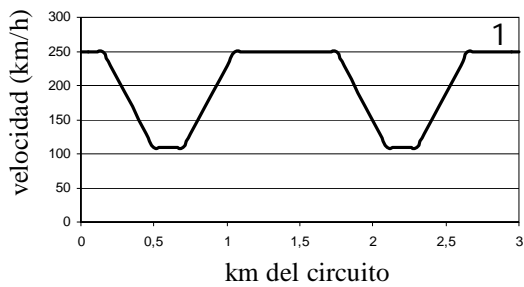
Para avanzar en el estudio *cualitativo de la inclinación de un gráfico*, los estudiantes desarrollan la siguiente actividad. Esta actividad no persigue que dibujen e interpreten los gráficos de una forma exacta y exhaustiva, sino que más bien los dibujen e interpreten de forma global y aproximada, basándose para ello en criterios cualitativos que ayudan a describir el comportamiento de un fenómeno.

Actividad 17:

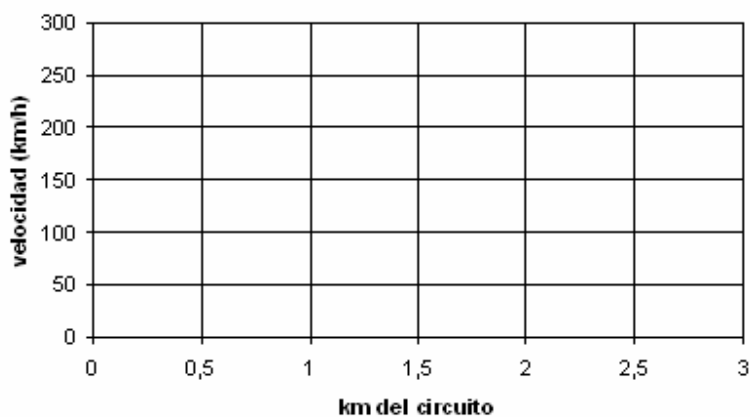
Los alumnos realizan en parejas la **Ficha 11**.

A continuación aparecen dibujados cinco circuitos de carreras de 3 km, en los que se señala el punto de partida y llegada del automóvil. Además, encontrarás cuatro gráficos en los que se representa la velocidad de un automóvil al ir recorriendo uno de los circuitos.





Indica qué circuito corresponde a cada uno de los distintos gráficos. Luego, trata de construir el gráfico correspondiente al circuito que no está representado, considerando que la velocidad máxima que alcanza un auto de carreras en ese circuito es de 250 km/h y la mínima es de 120 km/h.



Esta actividad consta de dos partes. En primer lugar se pide a los estudiantes que, mediante una interpretación cualitativa de la pendiente de un gráfico, identifiquen el circuito por el que se desplazó el automóvil al describir dicho gráfico. Por otro lado, en la segunda parte se pide que los estudiantes construyan cualitativamente el gráfico asociado a la velocidad de un auto al correr por un determinado circuito.

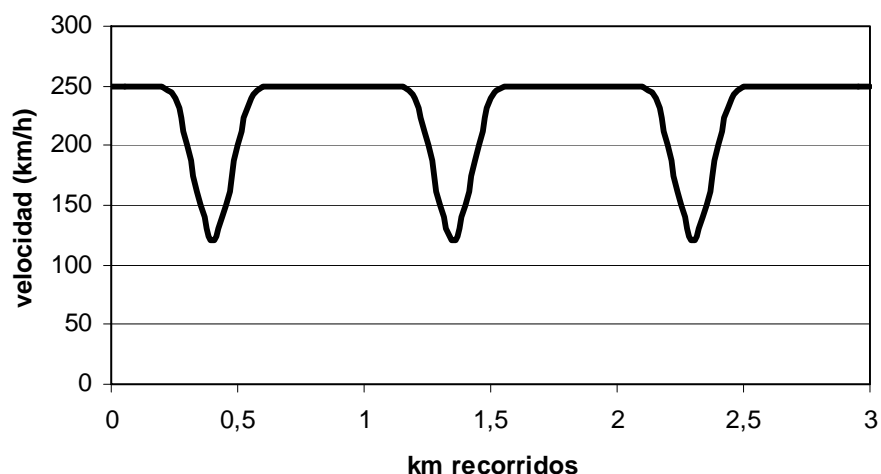
Para resolver esta actividad, los estudiantes deben usar criterios como el siguiente: en las rectas del circuito el automóvil alcanza una velocidad mayor que en las curvas. Esto significa que el automóvil debe frenar al inicio de una curva para reducir la velocidad que llevaba en la recta para poder tomar la curva. Luego, a la salida de la curva, el auto acelera aumentando su velocidad al ingresar en la recta. Durante la recta (siempre que esta sea lo suficientemente larga), el vehículo alcanza la velocidad máxima y la mantiene constante hasta antes de ingresar a una nueva curva. Cuanto más cerrada sea la curva, más debe

frenar el auto para poder tomarla, es decir, disminuir su velocidad.

En la lectura de los gráficos, los tramos planos de velocidad elevada señalan que en ellos no hay variación de la velocidad y, además, al ser elevada significa que el auto está corriendo un tramo recto del circuito y que ya ha alcanzado su velocidad máxima. Los tramos planos de velocidades bajas indican que el auto está circulando en medio de una curva, que ya alcanzó la velocidad mínima necesaria para tomar la curva, y que como la curva es larga, mantiene dicha velocidad hasta salir de ella.

Los tramos inclinados de los gráficos señalan que el automóvil está cambiando su velocidad en esa parte del circuito. Si la inclinación es descendente, significa que a medida que avanza el vehículo, este disminuye su velocidad, o sea, que está frenando, con lo que podemos deducir que está entrando en un tramo curvo del circuito. Si la inclinación es ascendente significa que a medida que avanza el vehículo, este aumenta su velocidad, o sea, está acelerando, lo que significa que está saliendo de una curva del circuito para entrar en un tramo recto.

En el caso particular de los circuitos de la actividad, el gráfico 1 corresponde al circuito **b**, el gráfico 2 corresponde al circuito **c**, el gráfico 3 corresponde al circuito **e**, el gráfico 4 corresponde al circuito **a** y el circuito **d** tendrá que ser construido por los propios estudiantes, y se espera que dibujen un gráfico parecido al que se muestra a continuación:



Una vez que los estudiantes hayan resuelto la ficha, se realiza una revisión colectiva. A continuación se destaca el hecho de que la inclinación del gráfico, ascendente o descendente, nos aporta información muy relevante, dado que en el caso ascendente podemos deducir que el vehículo está acelerando, mientras que si la inclinación del gráfico es descendente, podemos deducir que el vehículo está frenando.

Una inclinación ascendente (pendiente positiva) significa que al aumentar la variable independiente, la variable dependiente también sufre un aumento.

Una inclinación descendente (pendiente negativa) significa que al aumentar la variable independiente, la variable dependiente disminuye.

Si al incrementar o disminuir la variable independiente, la variable dependiente no sufre cambios, entonces decimos que el gráfico en esa parte es plano o bien, constante.

Como se ha visto, la inclinación de un gráfico (ascendente, descendente o plana) es una característica local, es decir, puede variar a lo largo del gráfico.

En el caso del problema de la **Ficha 10** no fue pertinente hacer este tipo de análisis, ya que la inclinación de las curvas que describen el desplazamiento de los tres corredores eran siempre ascendentes.

Al final de esta etapa, alumnas y alumnos trabajan en la **Ficha 12**, con el propósito de asegurar y afianzar los conocimientos estudiados en la unidad.

A través de preguntas, el profesor(a) va destacando los fundamentos matemáticos centrales de esta Unidad, que ya han sido sistematizados en cada una de las etapas.

Al finalizar el estudio de la Unidad, los estudiantes realizan una prueba de 60 minutos que recoge los aspectos fundamentales de lo trabajado y aprendido en las tres etapas. Una vez aplicada la prueba se abre una discusión sobre las dificultades que los alumnos encontraron en su desarrollo. El profesor(a) realiza comentarios sobre las respuestas correctas y pregunta a los estudiantes sobre los procedimientos que utilizaron.

Planes de clases de la PRIMERA ETAPA

Materiales: Cuaderno de matemáticas y una hoja suelta del mismo. Fichas 1, 2, 3. Material 1.

Tareas Matemáticas:

- Describen la posición de puntos en el plano.
- Ubican puntos en un sistema de coordenadas cartesiano.

Clase 1

En esta primera clase se plantean situaciones que hagan surgir la necesidad de disponer de un sistema de referencia para describir la ubicación de un lugar específico en un plano.

El profesor o profesora plantea la siguiente situación: “En una calle se encuentran la escuela, la municipalidad y la iglesia, una a continuación de la otra”. Luego pide que describan la localización de la municipalidad para un observador que se encuentra frente a la iglesia y para otro que se encuentra frente a la escuela.

Con el objetivo de que niños y niñas vivan la necesidad de utilizar un sistema de referencia el profesor(a) les propone las siguientes actividades.

Actividad 1: Resuelven la actividad propuesta en la **Ficha 1**, en que se presenta un edificio, y se debe transmitir la ubicación de la ventana ennegrecida.

Posteriormente, el profesor conduce una discusión sobre los distintos procedimientos usados por los alumnos para responder a la actividad. Se pregunta sobre cuáles procedimientos funcionaron, cuáles no y por qué, y sobre la equivalencia entre ellos.

Actividad 2: Trabajan en la **Ficha 2**, en la que se presenta un mapa de una isla llamada Maru Maru, en donde hay un tesoro. La actividad consiste en que un explorador va en busca de un tesoro a la isla. Para ello tiene el mapa en donde aparece la ubicación exacta del tesoro. En el trayecto a la isla pierde el mapa. Le manda un telegrama a su socio, quien posee una copia del mapa, y le pide que le dé las instrucciones para poder ubicar el tesoro. Los estudiantes deberán enviar el telegrama con las instrucciones para encontrar el tesoro.

El profesor(a) orienta una discusión con los estudiantes en relación a que si las instrucciones que dieron al explorador fueron útiles para encontrar el tesoro y cuáles no. Si bien es necesario establecer un punto de referencia para dar las indicaciones para encontrar el tesoro, dicho punto de referencia no es único. Todos los estudiantes pueden establecer puntos de referencia distintos.

Actividad 3: Se propone a los estudiantes el juego de la **Ficha 3**. El juego consiste en que cada participante ubique dos tesoros en el sector cuadrulado de juego (sin que los vea su compañero). Los tesoros se pueden representar con cuadrados, círculos, etc. y no pueden estar ubicados en dos cuadrados contiguos. Luego, por turnos, se debe tratar de adivinar la ubicación en que el otro jugador ubicó los tesoros. Para cada intento, el jugador a quien le están adivinando debe indicar si es que ha sido descubierto o no alguno de sus tesoros. Es solamente un intento por turno. Gana aquel jugador que encuentra todos los tesoros del otro jugador.

Luego, el profesor guía la discusión sobre la manera en que se comunicaron la posible ubicación de los tesoros. Puede plantear preguntas como, por ejemplo: ¿Utilizaron maneras distintas o iguales para preguntar por la ubicación del mapa? ¿Fue mas útil comunicar la ubicación del mapa de la misma manera? ¿Por qué?.

Cierre: Se espera que concluyan que, para ubicar un punto en el plano, como en el caso de la ventana del edificio o transmitir la ubicación del tesoro, es necesario convenir un *punto de referencia*. Asimismo, que en ocasiones es necesario establecer un punto de referencia común, y convenir una misma forma de comunicación de un objeto en un plano.

Clase 2

Actividad 4: Se propone a alumnas y alumnos que marquen un punto rojo y uno azul en una hoja (sin usar) de su cuaderno de matemáticas, ubicándolos en cruces del cuadrículado. Se les pide que traten de memorizar la posición de los puntos. Cierran el cuaderno y cuentan hasta diez. Cortan de su cuaderno una hoja en blanco cualquiera y marcan los dos puntos tratando de que queden en la misma posición. Verifican si los puntos coinciden superponiendo las hojas y comentan los procedimientos utilizados.

El profesor o profesora conduce una discusión en relación a los distintos procedimientos utilizados, cuáles funcionaron y cuáles no.

Actividad 5: A dos alumnos se les entrega un cuadrículado idéntico (**Material 1**). Se pide que cada uno ubique dos puntos en su cuadrículado, sin que los vea su compañero. Luego, se les indica que escriban un mensaje a su compañero para que dibuje en su cuadrículado dos puntos en la misma posición. El estudiante que recibe el mensaje no podrá pedir más información anexa al mensaje escrito. Luego que ambos hayan dibujado los puntos, superponen las hojas para verificar si los puntos han quedado en la misma posición.

Se sigue el estudio proponiendo la siguiente actividad.

Actividad 6: Los estudiantes ubican una cantidad razonable de puntos en la hoja del cuaderno de matemáticas que usaron en la **Actividad 4**, que permita asegurar el dominio de esta tarea matemática. Es conveniente que, en un comienzo, los puntos tengan coordenadas enteras, para así evitar dificultades relacionadas con la graduación de los ejes coordenados. Así, *el punto (12, 7) queda ubicado a la distancia de 12 unidades del eje vertical y de 7 unidades del eje horizontal*. Se avanza pidiendo a los estudiantes que ubiquen puntos que tengan coordenadas decimales. Por ejemplo, el punto (8,5;10) se ubica a 8,5 unidades del eje vertical y de 10 unidades del eje horizontal, así como el punto (5,8; 3,2) se ubica a 5,8 unidades del eje vertical y a 3,2 unidades del eje horizontal

Cierre: Se espera que concluyan que, para ubicar un punto en el plano, es necesario convenir un sistema de referencia común para todos. Para el estudio que realizaremos en esta Unidad escogeremos un sistema de coordenadas rectangulares, también llamado sistema de coordenadas cartesianas, que permite determinar la posición de cualquier punto en el plano mediante dos números que indican la distancia de ese punto a cada uno de los ejes. La primera coordenada representa la distancia al eje vertical y, la segunda, la distancia al eje horizontal. Las rectas que constituyen el sistema de coordenadas cartesianas son rectas numéricas en que se ha definido una escala. Esto significa que sobre cada eje se determina un punto como origen, que coincide con el del otro eje, y una unidad de longitud (no necesariamente la misma para cada eje).

Planes de clases de la SEGUNDA ETAPA

Materiales: Fichas 4, 5, 6, 7. Resorte (espiral grueso y ancho, de aquellos que se utilizan para anillar hojas). Bolsita plástica. Regla graduada en centímetros.

Tareas Matemáticas:

- Distinguen una magnitud variable de una magnitud constante.
- Distinguen distintos tipos de variables: cualitativas y cuantitativas.
- Identifican si existe o no relación de dependencia entre dos variables.

Clase 3

El profesor o profesora plantea una situación inicial que pondrá de manifiesto el tipo de datos posible de encontrar, sean estos valores constantes o variables.

Actividad 7: El profesor(a) propone a los alumnos que se **autodescriban mediante la mayor cantidad de datos posibles**. Por ejemplo, el nombre, edad, número de calzado, cantidad de hermanos, cantidad de dedos que tienen en una mano, cantidad de ojos, etc. Los anota en la pizarra y luego les pregunta cuáles de los datos son constantes en el tiempo y, posteriormente, cuáles son variables. Luego, pregunta sobre otros datos, primero constantes y luego variables, que no hayan sido propuestos.

Luego, pregunta por los distintos valores que las variables mencionadas pueden tomar como, por ejemplo: ¿Qué valores puede tomar la edad? ¿Entre qué valores puede ser la edad de una persona? ¿Qué valores puede tomar la altura? ¿Entre qué valores se encuentra la estatura de una persona? Se puntualiza entonces la distinción entre una *variable* y los *valores* que ella puede tomar.

El profesor continúa proponiendo la siguiente actividad considerando los atributos descritos en la actividad anterior.

Actividad 8: “Para los mismos atributos considerados en la actividad anterior, si en vez de considerar dichos atributos para cada alumno individualmente, consideramos los mismos atributos pero dentro del **grupo curso**: ¿La cantidad de brazos de cada alumno del curso, es variable o constante en el grupo curso? ¿Qué ocurre, al respecto, con el nombre de los alumnos del curso? ¿Y con la estatura? Etc. ¿Qué otros datos son constantes dentro del grupo curso y cuáles son variables?”

Luego, el profesor(a) pregunta al igual que en la actividad anterior, por los valores que las variables mencionadas toman para el grupo curso, por ejemplo, la variable *edad*, *género*, etc. Formula preguntas como, por ejemplo: ¿Cuál(es) es(son) la(s) diferencia(s) entre los valores que toman la edad y el género? Se espera que los alumnos reconozcan que algunas variables pueden tomar valores que corresponden a **palabras** (etiquetas simples o categorías), así como otras variables pueden tomar valores **numéricos**.

Se sugiere explicar a los alumnos que las variables que consisten en palabras y que no tienen un orden inherente, se denominan **variables cualitativas nominales**, mientras que las variables que consisten en datos numéricos se denominan **variables cuantitativas**.

Para continuar con el estudio, el profesor(a) propone la siguiente actividad.

Actividad 9: Propone a los estudiantes que, organizados en parejas, consideren distintos tipos de polígonos regulares, y que respondan a las siguientes preguntas: ¿La cantidad de lados que puede tener un polígono regular cualquiera es una cantidad que varía; es decir, es una magnitud variable? ¿Por qué? ¿Es posible que esta variable tome valores entre 9 lados y 11 lados? ¿Y entre 9 lados y 10 lados? ¿Por qué? ¿Qué valores puede tomar esta variable?

La *variable* considerada “*cantidad de lados de un polígono regular*” es una variable **cuantitativa** que no puede tomar cualquier valor numérico. No existen polígonos con *un* lado ni con *dos*, por lo que esta variable no puede tomar estos valores. Por otro lado, tampoco existen polígonos que tengan 3,5 lados o cualquier cantidad **no** entera de lados, por lo que esta variable solo puede tomar valores naturales mayores o iguales a 3. Por esta razón se dice que esta es una **variable discreta**, ya que entre dos valores consecutivos de la variable no existe ningún otro valor que ella pueda tomar.

Luego, el profesor(a) pregunta: “Consideremos la variable altura de un alumno, ¿es posible que esta variable tome valores entre 1,80 m y 1,81 m? ¿Es posible que esta variable tome valores entre 1,80 m y el valor que acaban de decir?”. Este tipo de variable cuantitativa se denomina **variable continua**.

Cierre: Se espera que los alumnos(as), apoyados por el profesor(a) puedan realizar un análisis que les permita llegar a conclusiones similares a las siguientes:

- Se denomina **variable** a aquella magnitud o atributo que puede tomar distintos valores, mientras que a aquella magnitud o atributo que puede tomar un único valor se le denomina **constante**.
- Un mismo atributo, dependiendo de la situación que se esté analizando, puede ser *variable* o *constante*.
- Es importante distinguir entre una *variable* y los *valores* que ella puede tomar. Por un lado, una variable corresponde al atributo de un objeto o fenómeno que se está considerando, mientras que los valores que ella puede tomar son datos específicos relativos a esa variable. Por ejemplo, la variable *peso de una persona* puede tomar valores como 30 kg, 50 kg, o cualquier valor entre 2 kg y 250 kg.
- Las variables pueden tomar valores que corresponden a *palabras* (etiquetas simples o categorías) o a *números*. Las variables que consisten en palabras y que no tienen un orden inherente se denominan **variables cualitativas nominales**, mientras que las variables que consisten en datos numéricos se denominan **variables cuantitativas**.

Clase 4

La clase comienza presentando una actividad experimental a los estudiantes con la finalidad de establecer si existe una relación de dependencia entre dos variables.

Actividad 10: El profesor propone a los alumnos que trabajen en la **Ficha 4**, donde se plantea una situación experimental en la que a un **resorte** (un espiral grueso y ancho, de aquellos que se utilizan para anillar hojas) que se fijará en forma vertical y en cuyo extremo inferior se colgará un soporte (una bolsita plástica, por ejemplo) para colocar distintos pesos. Pide que midan las distintas longitudes alcanzadas por el resorte al colocar los distintos pesos. Para ello, una vez fijado el resorte, deben marcar la longitud que alcanza el extremo inferior cuando este no tiene ningún peso

agregado (nivel cero). Medirán experimentalmente el estiramiento del resorte con diferentes cantidades de objetos de un mismo tipo (por ejemplo, monedas de \$10: 1 moneda, 3 monedas, 7 monedas, etc.).

Mientras los alumnos realizan la actividad, el profesor formula preguntas como, por ejemplo: ¿Qué sucede al agregar peso en el extremo del resorte? ¿Qué sucede con el resorte si hay 5 monedas de \$10 en su extremo? ¿Qué sucede con el resorte si hay 10 monedas de \$10 en su extremo? ¿Qué esperarías que sucediera con el largo del resorte si se agregan 5 monedas más? ¿Y si se quitan 10 monedas? ¿Cuáles son las variables en este experimento? ¿Existe dependencia de una de estas variables con respecto a la otra? Justifica tu respuesta. Para este problema: ¿Cuál de las variables es la que está siendo determinada por el comportamiento de la otra? ¿Por qué

Al finalizar la actividad, el profesor(a) orienta una discusión en la cual se destaquen los siguientes aspectos.

- Existe una **relación de dependencia** cuando los cambios efectuados en una de las variables provoca cambios en la otra.
- Por otro lado, cada vez que nos encontremos frente a una relación de dependencia entre dos variables, una de esas variables asume un rol de **variable independiente**, es decir, aquella que el enunciado del problema requiere que sea manipulada para estudiar los cambios que ocurren en la otra variable, mientras que la otra asume el rol de **variable dependiente**, es decir, aquella que es afectada por los cambios experimentados en la primera.

El profesor realiza preguntas como, por ejemplo: En la actividad, ¿cuál es la variable dependiente?, ¿cuál es la variable independiente? Se espera que los alumnos respondan, con sus palabras, que la variable dependiente es el alargamiento del resorte y que la variable independiente corresponde a la cantidad de monedas que se ponen en el extremo del resorte.

Se les propone a los alumnos que trabajen en la siguiente actividad.

Actividad 11: Se pregunta a los alumnos(as) cuál es la temperatura anunciada para este día. Luego se les pregunta: ¿La temperatura es una variable o una constante? ¿Qué valores puede tomar la variable temperatura? ¿De qué factores depende la temperatura del ambiente? Para responder a la última pregunta, puede apoyar a los alumnos formulándoles preguntas del tipo: ¿La temperatura es constante a través del año? ¿La temperatura permanece constante a lo largo del día? ¿La temperatura permanece constante a lo largo del país? Etc. Luego de que respondan y planteen distintos factores que influyan en la temperatura ambiental, se les pregunta: ¿Los factores mencionados son variables o constantes? Se espera que reconozcan que los factores de los que depende la variable temperatura también son variables. Finalmente, se les pregunta: ¿La temperatura depende del día de la semana en el que me encuentro? ¿La temperatura depende de mi edad? La actividad termina preguntando a los estudiantes si es posible encontrar una relación de dependencia entre dos variables cualesquiera.

El profesor(a) orienta una discusión con los estudiantes en donde se destaca que dos variables pueden estar relacionadas mediante una relación de dependencia, siempre y cuando los cambios en una de las variables afecten directamente a la otra variable. Esto no siempre ocurre, y en este caso decimos que las variables en cuestión **no están relacionadas** mediante una relación de dependencia.

Luego, propone situaciones en que aparezcan dos variables para que los alumnos analicen si existe una relación de dependencia o no como, por ejemplo: El peso de los miembros de una familia, ¿depende del número de integrantes que tenga la familia?, ¿depende de los hábitos alimenticios de la misma?, etc.

Se propone a los alumnos(as) que trabajen en la **Ficha 5** en la cual se realiza un trabajo que asegure la apropiación de los conocimientos estudiados hasta el momento en este apartado.

Cierre: Se espera que, con el estudio realizado en esta clase, los alumnos, apoyados por el profesor, puedan concluir que:

- Dos variables están relacionadas mediante una **relación de dependencia** cuando los cambios en una de las variables provoca cambios en la otra variable.
- En una situación problemática podemos identificar variables que pueden estar relacionadas mediante una relación de dependencia o no. Por ejemplo, la temperatura ambiente no necesariamente está relacionada con la velocidad del viento en un determinado lugar. Así, podemos encontrar vientos huracanados tanto a altas como a bajas temperaturas puesto que la velocidad del tiempo no depende de la temperatura y viceversa.

Clase 5

Actividad 12: El profesor comienza la clase proponiendo a los alumnos que trabajen en la **Ficha 6** en donde aparecen diversas situaciones en donde deben identificar si existe o no una relación de dependencia.

Una vez terminada la Ficha, los alumnos destacan, con la ayuda del profesor, que siempre es posible asociar dos variables cualesquiera, con el fin de realizar algún estudio o registro, sin que necesariamente exista una relación de dependencia entre dichas variables.

Con el objeto de reforzar esta idea, alumnas y alumnos desarrollan la siguiente actividad.

Actividad 13: Los alumnos trabajan en la **Ficha 7**, donde deben estudiar gráficos en los que una variable es nominal, <ciudades costeras de Chile>, y la otra es cuantitativa, <temperatura promedio en un día, en grados Celsius>. Niñas y niños deben establecer semejanzas y diferencias entre ambos gráficos, y buscar razones por las cuales estos son diferentes. El profesor se detendrá particularmente en la última pregunta de la Ficha, en que se pide establecer si es posible estimar la temperatura para una nueva ciudad costera, por ejemplo Tocopilla, utilizando uno de estos gráficos. Pregunta: *¿dónde quedaría ubicada en el primer gráfico?* (aquí se aplica el criterio alfabético). Luego pregunta: *¿dónde quedaría ubicada esa ciudad en el segundo gráfico?* (aquí se aplica el criterio geográfico). Finalmente, pregunta: *¿pueden estimar la temperatura promedio de esta ciudad?*

Al intercalar una ciudad, en el primer gráfico no es posible estimar su temperatura, puesto que esta no depende del orden alfabético de las ciudades. En cambio, en el segundo gráfico es posible, ya que en este caso la temperatura depende del criterio usado para ordenar las ciudades. En efecto, el orden geográfico de norte a sur está íntimamente relacionado con la latitud, y la temperatura depende de la latitud.

Cierre: Se espera que, al finalizar el estudio en esta etapa, los alumnos, apoyados por el profesor, puedan concluir que:

- Dos variables están relacionadas mediante una **relación de dependencia**, siempre y cuando los cambios en una de las variables afecten directamente a la otra variable.
- Si bien es posible asociar dos variables cualesquiera, dos variables no siempre estarán relacionadas mediante una relación de dependencia.

Planes de clases de la TERCERA ETAPA

Materiales: Fichas 8, 9, 10, 11 y 12.

Tareas Matemáticas:

- Grafican la relación entre dos variables.
- Utilizan el gráfico para describir cómo varía una variable cuando la otra también varía.

Clase 6

Actividad 14: Los alumnos realizan las actividades de la **Ficha 8**, donde se estudia un problema relativo a las temperaturas de los tres primeros días de hospitalización registradas en la Ficha médica de un paciente. Los datos se encuentran organizados en una tabla. Las preguntas *a)*, *b)* y *c)* se refieren a hechos puntuales, posibles de determinar a partir de la tabla, por ejemplo, *¿cada cuántas horas se ha tomado la temperatura?*, *¿cuándo tuvo la temperatura más alta?*, *¿y la más baja?*, *¿en torno a qué valor estuvo la temperatura más frecuente?* El profesor se detiene de manera particular en la pregunta *d)*, *¿cómo ha sido la evolución del paciente respecto a la temperatura en estos tres días de hospitalización?*, pregunta respecto a un hecho global, que no es fácil de inferir a partir de la tabla. Orienta esta discusión para que los alumnos concluyan que pueden unir los puntos graficados mediante líneas rectas y así poder obtener una visión más clara de la evolución del paciente en los tres días.

Para visualizar la evolución del paciente, el profesor(a) les propone representar en el sistema de coordenadas dado en la **Ficha 8** los datos recogidos en la tabla. Orienta el trabajo de los alumnos en la realización de esta tarea. Señala que la mayor contribución que realiza el gráfico en este caso, es permitir el estudio de la evolución del paciente a lo largo de tres días, es decir, *permite tener una visión global del fenómeno y predecir el estado de salud futuro* del paciente. Una vez realizado el gráfico, responden las preguntas **f)** y **g)** de la **Ficha 8**.

El profesor repite las preguntas que respondieron consultando la tabla para que ahora las respondan basándose en la información del gráfico, a fin de que comparen la mayor o menor dificultad en la obtención de las respuestas en ambos casos. Se pide que se haga valorar el aporte que realiza el gráfico al estudio de determinadas situaciones.

Actividad 15: Los alumnos trabajan en la **Ficha 9** en donde aparece una tabla que contiene las precipitaciones (en milímetros) de tres ciudades de Chile, durante los 12 meses del año. Además, contiene un gráfico en que aparecen graficados los puntos de la tabla por ciudad. Los alumnos deben identificar los puntos que corresponden a cada ciudad y comparar el comportamiento general de las precipitaciones en las tres ciudades. Para ello los alumnos contestan las preguntas de la Ficha. El propósito de esta actividad es que los alumnos valoren qué tipo de información es más fácil obtener a partir de la tabla y cuál, a partir del gráfico. La pregunta *a)* se puede responder fácilmente a partir de la tabla. En tanto, la pregunta *b)* obligará a los estudiantes a identificar los gráficos correspondientes a cada ciudad. Finalmente, la respuesta de la letra *c)* es clave, en el sentido de que, comparar el comportamiento de las precipitaciones caídas durante el año, es claramente más fácil de realizar a partir del gráfico. Claro está que para que los alumnos puedan constatar esta ventaja, es necesario que decidan unir los puntos del gráfico antes de contestar. En caso de que los estudiantes no lo unan y respondan solo comparando los meses en que hubo más o menos precipitaciones en cada una de las ciudades, apóyelos realizando preguntas del tipo: *¿qué ocurrió el resto de los meses comparativamente?*, *¿cómo es el comportamiento general de las precipitaciones caídas en Santiago con respecto a las de Chile Chico?* Finalice esta discusión preguntando qué sentido tiene unir los puntos del gráfico.

Se espera que los estudiantes, apoyados por el profesor(a), puedan realizar un análisis que les permita llegar a una conclusión como la siguiente: El gráfico de una relación entre dos variables permite describir y comprender el comportamiento global de la relación, así como identificar valores en los que la relación tiene un comportamiento particular. Generalmente, esto resulta más difícil de lograr a partir de la tabla de valores.

Cierre: Al finalizar esta clase el profesor(a) destaca los siguientes elementos:

- Hay gráficos en los que se representan pares de puntos que corresponden a valores de dos variables que no tienen relación de dependencia entre ellas y, por eso, no es posible determinar valores de una de las variables a partir de valores de la otra. Un ejemplo de esta situación es el caso de las temperaturas promedio en ciudades costeras de Chile ordenadas alfabéticamente. El único sentido que podría tener unir puntos sucesivos del gráfico en este caso, es el de visualizar la diferencia entre valores contiguos de la variable ubicada en el eje de las ordenadas, dado que esos trazos no nos permiten inferir ninguna otra información.
- Cuando existe una relación de dependencia entre dos variables interesa averiguar cómo y cuánto varía una variable cuando también varía la otra. Esta relación puede estudiarse determinando pares de valores que pueden ser organizados en una tabla o en un gráfico cartesiano en que cada uno de los ejes corresponde a una de las variables y también puede estudiarse determinando la ley de correspondencia entre las dos variables.
- El gráfico de una relación entre dos variables permite describir y comprender el comportamiento global de la relación, identificar valores en los que la relación tiene un comportamiento particular, así como predecir comportamientos. Esto generalmente resulta más difícil de lograr a partir de la tabla de valores.

Clase 7

La clase comienza proponiendo la siguiente actividad a alumnas y alumnos.

Actividad 16: Los alumnos realizan la **Ficha 10** en parejas, en donde, a partir de un gráfico en donde se muestra en forma aproximada el comportamiento de tres corredores, durante una carrera llamada “Carrera de 1 hora”. El profesor explica que esta carrera consiste en que los corredores corren durante una hora, y gana aquel corredor que una vez concluido el tiempo de competencia haya recorrido una mayor distancia.

El profesor(a), una vez revisada la Ficha, destaca el hecho de que la mayor o menor inclinación de una curva (**pendiente de la curva**) entrega información que responde a una mayor o menor variación de la variable dependiente por una unidad de variación de la variable independiente. En el caso particular del gráfico de una línea recta, la interpretación es que la variación de la variable dependiente es **siempre la misma** para variaciones iguales de la variable independiente.

Para avanzar en el estudio cualitativo de la pendiente, presenta la siguiente actividad al curso.

Actividad 17: Los alumnos realizan en parejas la **Ficha 11**, en la que aparecen esquematizados cinco circuitos de carreras de 3 km, en los que se señala el punto de partida y llegada del automóvil. Además, se encuentran cuatro gráficos en los que se representa la velocidad de un automóvil al ir recorriendo uno de los circuitos. Esta actividad consta de dos partes. En la primera parte los alumnos deben indicar qué circuito corresponde a cada uno de los distintos gráficos. En la segunda parte, tratan de construir el gráfico correspondiente al circuito que no está representado, considerando que la velocidad máxima que alcanza un auto de carreras en ese circuito es de 250 km/h y la mínima es de 120 km/h.

El profesor(a) propone que trabajen en la **Ficha 12**, en donde se realiza un trabajo que asegure la apropiación de los conocimientos estudiados en esta etapa.

Cierre: Los alumnos concluyen, con apoyo del profesor, lo estudiado en esta clase:

- Una inclinación ascendente (pendiente positiva) significa crecimiento de la variable dependiente, mientras que una inclinación descendente (pendiente negativa) significa decrecimiento de dicha variable.

Clase 8

En esta última clase los estudiantes realizan la **Prueba Final de la Unidad** que tiene una duración de 60 minutos. Esta prueba recoge los aspectos fundamentales de lo trabajado y aprendido en la **Unidad**.

Una vez aplicada la prueba, se abre una discusión sobre las dificultades que los alumnos encontraron en su desarrollo. El profesor realiza comentarios sobre las respuestas correctas y pregunta a los estudiantes sobre los procedimientos que utilizaron.

PRUEBA FINAL DE LA PRIMERA UNIDAD 8° BÁSICO

Nota

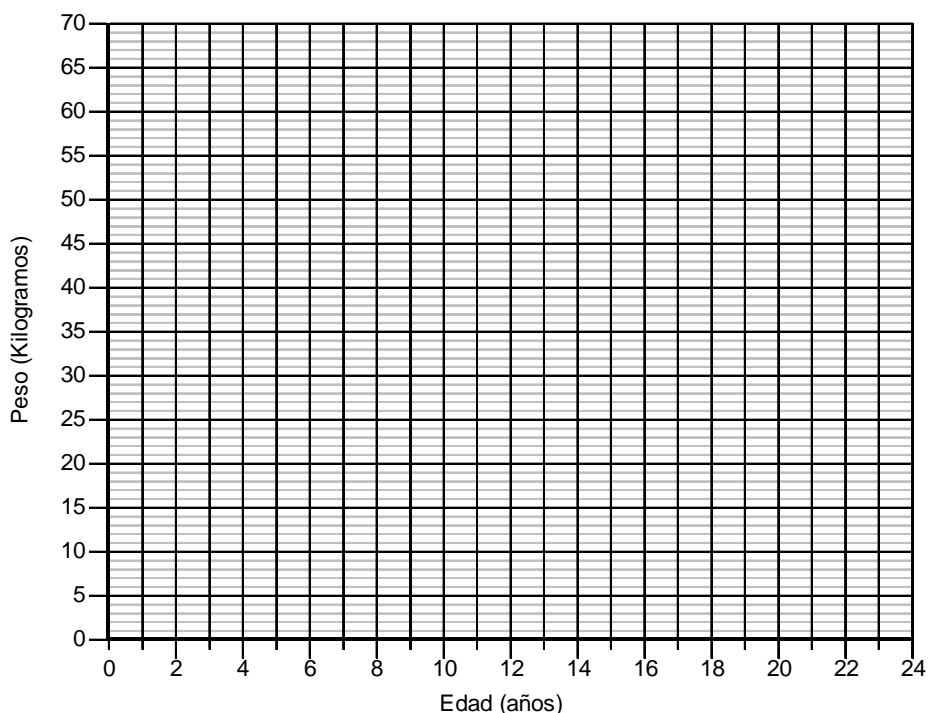
Nombre: _____ Escuela: _____

Curso: _____ Fecha: _____ Puntaje: _____

1.- La siguiente tabla muestra el peso de Claudia el día en que cumplía años. Construye el gráfico de esta relación.

Peso de Claudia

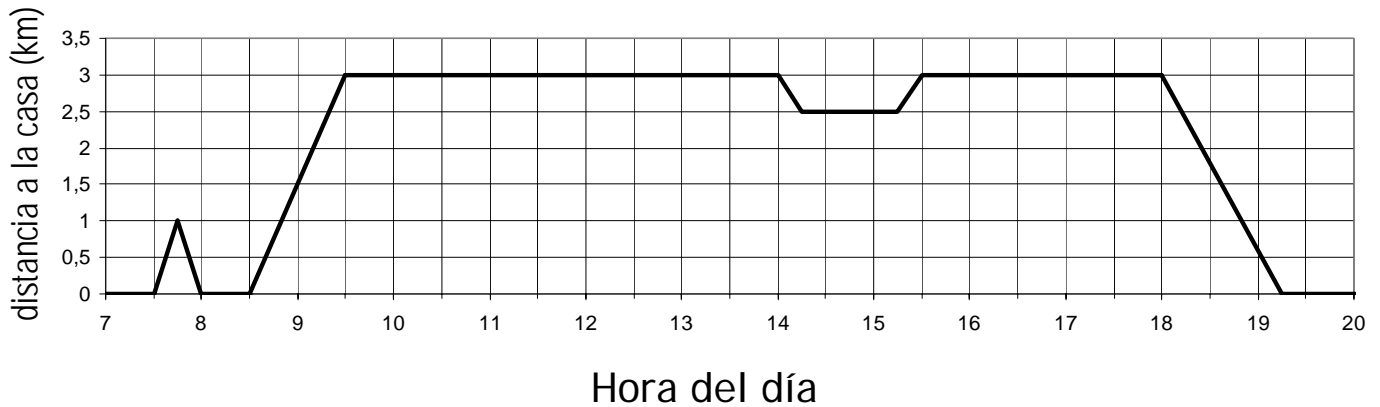
edad años	peso kilos
0	3
1	9
2	12
3	14
4	-
5	18
6	20
7	22
8	25
9	-
10	32
11	36
12	41
13	45,5
14	49
15	51,5
16	53
17	54
18	54,5
19	55
20	55



Contesta a las preguntas siguientes:

- a) ¿Tiene sentido unir los puntos del gráfico con una línea? ¿Por qué?
- b) Identifica la variable dependiente y la independiente, con sus respectivas unidades de medida.
- c) Claudia no se pesó los días en que cumplió 4 y 9 años. ¿Se puede estimar el valor de su peso en esos días? En caso afirmativo, ¿cuáles son los pesos estimados?
- d) ¿Se puede estimar el peso de Claudia a los seis años y medio? En caso afirmativo, ¿cuál era su peso?
- e) ¿Se puede estimar la edad que tenía Claudia cuando pesó 38 kg?
- f) ¿Se puede estimar el peso de Claudia cuando cumpla 21 años? En caso afirmativo, estima dicho peso.

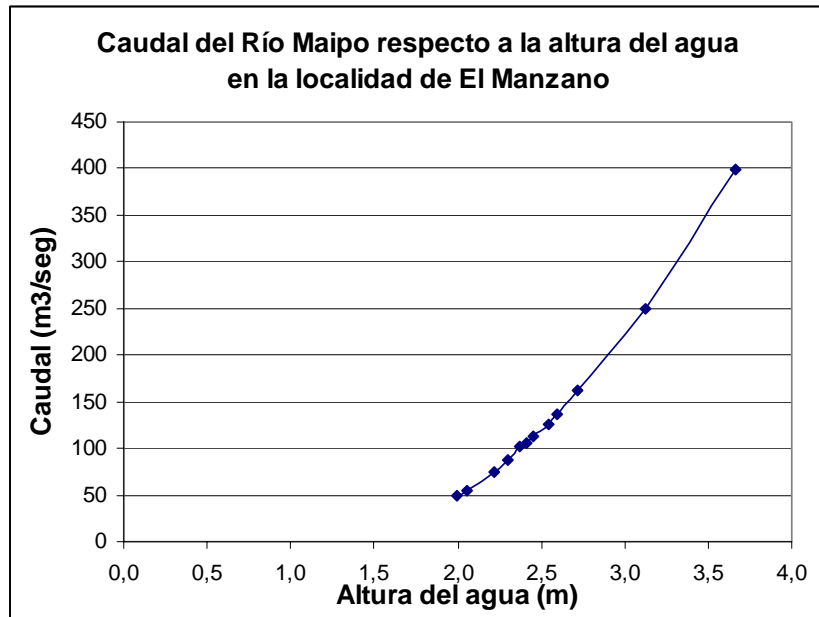
2.- Un día Pablo sale a su trabajo caminando. Al cabo de un rato, se da cuenta que se le olvidaron las llaves de su oficina y decide devolverse a buscarlas. Luego, regresa a su trabajo. Sale a almorzar a un sitio cercano al trabajo. Vuelve al trabajo, en donde permanece hasta que regresa a su casa.



- ¿A qué hora salió Pablo de su casa?
- ¿A qué hora se dio cuenta de que se le habían quedado las llaves? ¿A qué distancia de la casa se encontraba en ese momento?
- ¿Cuánto tardó en encontrar las llaves?
- Sabiendo que Pablo entra a trabajar a las 9:00 h, ¿llegó al trabajo a la hora?, ¿por qué?
- ¿Trabajó más horas antes de almuerzo o después de almuerzo?
- ¿Cuánto tiempo da la empresa para almorzar?
- ¿Al ir a almorzar se acerca o se aleja de su casa?
- ¿Cuánto tiempo tardó en llegar del trabajo a su casa?
- Sabiendo que Pablo trabaja 7 horas al día, ¿cumplió ese día con sus horas de trabajo?

3.- Observa la siguiente tabla de valores con su respectivo gráfico:

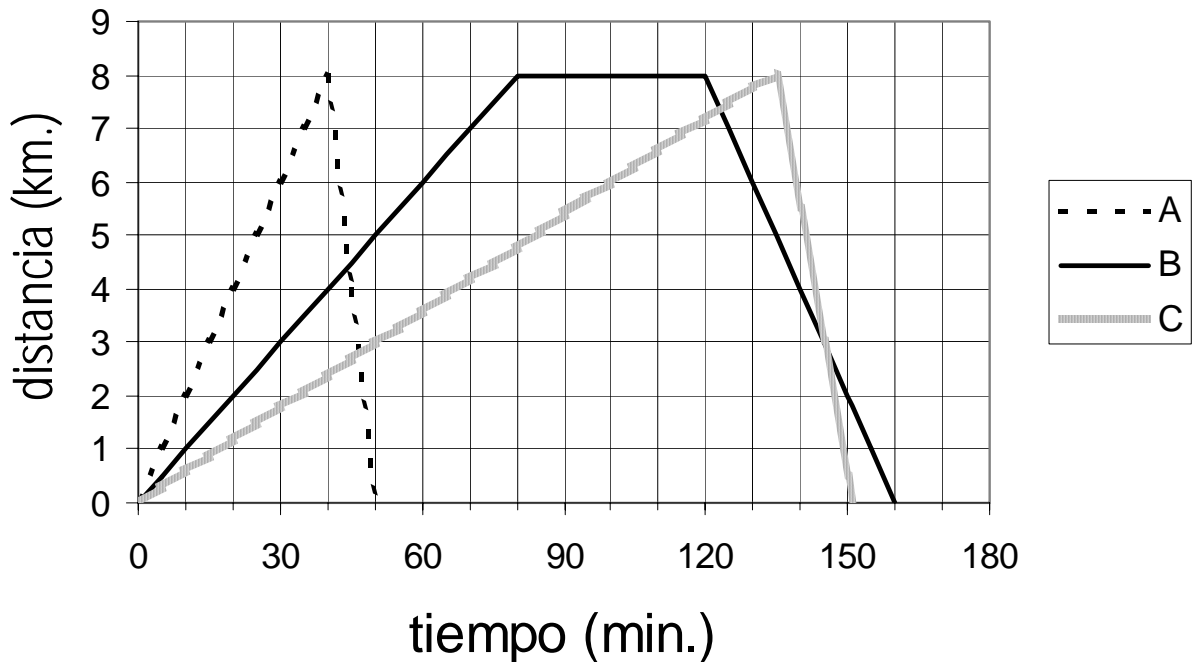
Altura del agua (m)	Caudal (m ³ /seg)
2,00	50
2,05	55
2,22	74
2,30	87
2,37	103
2,41	105
2,45	114
2,55	126
2,60	136
2,72	162
3,12	249
3,67	399



- ¿Cuáles son las variables asociadas en esta situación?
- ¿Cuál es el caudal cuando la altura del río es de 2,45 m?
- ¿Es posible estimar el caudal del río para una altura de 3,5 m? En caso afirmativo, estimar dicho caudal.
- ¿Es posible estimar el caudal del río para una altura del agua de 4 m? En caso afirmativo, estimar dicho caudal.
- ¿Qué ocurre con el caudal del río a medida que aumenta la altura del agua?
- ¿Existe una relación de dependencia entre las dos variables asociadas? ¿Por qué?

4.- Un corredor, un joven en monopatín y un ciclista suben a un cerro por una carretera de 8 km, y una vez que llegan arriba bajan. El corredor sube el cerro más rápido que el joven en monopatín, pero más lento que el ciclista.

Excursión al cerro



Los gráficos A, B y C, representan la distancia a la que se encuentra cada uno respecto al inicio del recorrido (a los pies del cerro). Teniendo en cuenta que salen los tres juntos, responde a las siguientes preguntas:

a) Identifica cuál de los tres gráficos corresponde al corredor, cuál corresponde al ciclista y cuál al joven del monopatín.

A : _____ B : _____ C : _____

b) ¿Cuántos minutos tardó en subir al cerro cada uno?

Corredor: _____ Ciclista: _____ Monopatín: _____

c) El ciclista: ¿Se encontró al bajar con el joven del monopatín? ¿Y con el corredor?

d) ¿Alguno de los tres tomó un descanso arriba del cerro antes de bajar? En caso afirmativo, responde quién y cuántos minutos descansó.

e) Cuando se encontró el corredor con el joven del monopatín por primera vez, ¿el corredor iba subiendo o bajando?, ¿y el joven del monopatín?

f) En algún punto del recorrido, ¿alguno de los tres consigue adelantar a otro? En caso afirmativo, responde ¿quién adelantó a quién? y ¿a que distancia se encontraban del inicio del recorrido?

g) VI. Espacio de reflexión personal

Busque en el momento de cierre de cada uno de los planes de clase, el o los fundamentos centrales de la unidad con el cual se corresponde:

Reflexione sobre los principales aportes que le ha hecho esta unidad y sobre la forma en que puede utilizarlos en la planificación de sus clases:

VII. Glosario

- ◆ **Eje de las abscisas y eje de las ordenadas:** El eje de las **abscisas** es el eje en que se representan los valores de la variable **independiente** de una situación dada. Frecuentemente, es designado como *eje horizontal* debido a su dirección. El eje de las **ordenadas** es el eje en que se representan los valores de la variable **dependiente** de una situación. Acostumbra a ser designado, de igual forma, como *eje vertical*.
- ◆ **Ley de correspondencia entre dos variables:** Es la expresión matemática que permite calcular valores desconocidos de una de las variables, a partir de valores conocidos de la otra variable.
- ◆ **Modelizar o modelización:** Proceso a través del cual se determina una expresión matemática que **describe las relaciones** entre las variables de un fenómeno, ya sea real (extramatemático) o de las propias matemáticas (intramatemático). Esta expresión es una representación o “metáfora” de un fenómeno, que permite estudiar su comportamiento puntual y global, así como predecir futuros comportamientos del mismo.
- ◆ **Par ordenado:** Es una pareja de números (a, b) que describe la ubicación de un punto cualquiera en el plano. El primer número representa la distancia de dicho punto al eje vertical, y el segundo, la distancia de dicho punto al eje horizontal. Así por ejemplo, el punto $(12,7)$ queda ubicado a la distancia de 12 unidades del eje vertical y de 7 unidades del eje horizontal.
- ◆ **Relación de dependencia entre dos variables:** Existe una relación de dependencia entre dos variables cuando hay una ley de correspondencia entre ellas.
- ◆ **Sistema de coordenadas cartesiano:** Sistema rectangular de representación de puntos en el plano. Está formado por dos líneas rectas perpendiculares entre sí, una horizontal y otra vertical llamadas *ejes del sistema*. Cada punto sobre los ejes se corresponde con un único número del conjunto de los números reales. En este sistema la ubicación de un punto en el plano se designa mediante dos números, de modo tal que el primer número representa la distancia de dicho punto al eje vertical, y el segundo, la distancia de dicho punto al eje horizontal.
- ◆ **Variable dependiente e independiente en una relación de dos variables:** Cuando hay una ley de correspondencia entre dos variables se dice que existe una relación de dependencia entre ambas. La variable cuyos valores se obtienen a partir de los valores de la otra variable mediante la aplicación de la ley de correspondencia, se llama **variable dependiente**. La otra variable, es decir, la que determina los valores de la variable dependiente, recibe el nombre de **variable independiente**. El carácter de dependiente o independiente de las variables viene determinado por la pregunta de la situación que estas variables modelizan.
- ◆ **Variable nominal:** Una variable se dice que es nominal si los datos usados para medir su valor consisten en etiquetas simples o categorías tales como: femenino/masculino, sí/no, sangre tipo A, tipo B, tipo 0, tipo AB, etc. En una variable nominal, las categorías o etiquetas no tienen un orden inherente, vale decir, no importa el orden en que las pongamos por lo que dicho orden podemos decidirlo arbitrariamente.
- ◆ **Variable ordinal:** Una variable se dice ordinal si los valores que puede tomar consisten en etiquetas o categorías que sí poseen un orden predeterminado, como por ejemplo: bueno/regular/malo, enero/febrero/.../diciembre.

- ◆ **Variable cuantitativa:** Una variable se dice cuantitativa si es que los valores que puede tomar son numéricos. En este caso nos podemos encontrar con variables cuantitativas discretas, cuando entre dos valores contiguos cualesquiera que ella puede tomar no existe ningún otro valor (por ejemplo, número de hijos de una familia, ya que entre 2 y 3 hijos no existe un valor intermedio) o variables continuas, cuando entre dos valores cualesquiera que ella puede tomar siempre existe otro valor que ella también puede tomar (por ejemplo, el perímetro de un cuadrado, ya que entre 3,5 cm de perímetro y 3,6 cm de perímetro se puede encontrar un cuadrado de perímetro 3,55 cm y así sucesivamente).

VIII FICHAS Y MATERIALES PARA ALUMNAS Y ALUMNOS