Matemática
Sexto año Básico
SEGUNDA UNIDAD DIDÁCTICA

PROBLEMAS ADITIVOS CON NÚMEROS DECIMALES

Coordinadora
Lorena Espinoza S.

Autores

Joaquim Barbé F.
Francisco Cerda B.
Fanny Waisman C.
Lorena Espinoza S

ÍNDICE

Sexto Básico

MATEMÁTICA
UNIDAD DIDÁCTICA

Problemas Aditivos con Números Decimales

APRENDIZAJES ESPERADOS DEL PROGRAMA

- Clasifican, organizan y analizan informaciones cuantitativas referidas a uno o varios fenómenos o situaciones; formulan y responden preguntas a textos que contengan información expresada con números decimales (Aprendizaje Nº 3).
- Estiman resultados de **adiciones y sustracciones** utilizando el cálculo mental; deciden redondeos convenientes; justifican la adecuación de los resultados aproximados (Aprendizaje Nº 4).
- Seleccionan **procedimientos de cálculo** (orales, escritos, con calculadora) para obtener resultados exactos o aproximados, evaluando la conveniencia y explicitando los criterios de selección (Aprendizaje Nº 5).

APRENDIZAJES ESPERADOS PARA LA UNIDAD

- Organizan y analizan informaciones referidas a situaciones cotidianas y fenómenos del mundo real, que estén expresadas con números decimales.
- Resuelven problemas aditivos de diversos tipos con números decimales (simples y compuestos; directos e inversos; de composición, cambio y comparación).
- Justifican los procedimientos de cálculo que emplean para obtener los resultados.

APRENDIZAJES PREVIOS

- Dan sentido a cantidades expresadas con decimales representándolas y/o expresándolas de diferentes maneras.
- Interpretan las cifras decimales en relación a la unidad correspondiente, en contextos de medición.
- Manejan los algoritmos para la adición y sustracción con números naturales.
- Resuelven problemas aditivos simples y combinados, directos e inversos que involucren números naturales y fraccionarios. Los problemas pueden ser de composición, cambio y comparación.

I PRESENTACIÓN

En la presente unidad se aborda el problema matemático que consiste en resolver problemas del campo aditivo con números decimales. Estos problemas son de frecuente aparición en la vida cotidiana y los hay desde muy simples hasta complejos. Se abordarán problemas directos e inversos, ya sea de composición, cambio o comparación. Se privilegiarán aquellos contextos que estén en conexión con el estudio del medio natural y social, teniendo como fuente la información que aparece en los medios de información, textos de estudio, revista de divulgación científica y sitios web dedicados a estos temas.

A continuación se detallan los aspectos didácticos matemáticos que estructuran esta unidad:

1. Tareas matemáticas

Las *tareas matemáticas* que niñas y niños realizan para lograr los aprendizajes esperados de esta unidad son:

- Resuelven problemas aditivos simples combinados, de composición, cambio y comparación.
- Analizan una estrategia general para resolver problemas: distinguen datos, incógnita, identifican las operaciones que permiten modelarlo, interpretan el significado de los cálculos en el contexto de una situación.
- Elaboran problemas aditivos a partir de una situación dada.
- Calculan adiciones y sustracciones, explicando los procedimientos empleados.
- Calculan productos del tipo 10^n x decimal.

2. Variables didácticas

Las *variables didácticas* que se consideran para graduar la complejidad de las tareas matemáticas que niñas y niños realizan son:

- El tipo de problema según la cantidad de operaciones que lo resuelven: simples o combinados.
- El tipo de problema según la forma en que el enunciado relaciona datos e incógnita: directo e inverso.
- Relación entre los números que participan en un cálculo aditivo: con la misma cantidad de cifras decimales o distinta
- Relación entre los dígitos en cada posición SND: la suma es sin reserva o con reserva; la resta es con o sin reserva, en el minuendo hay o no ceros.
- La familiaridad con el contexto del problema: cercanos a la realidad de los niños y otros de contextos algo más lejanos (científicos, económicos).
- La redacción del enunciado del problema varía desde una complejidad de lectura simple hasta una complejidad media.

3. Procedimientos

Los *procedimientos* que niños y niñas construyen y se apropian para realizar las tareas matemáticas son:

- Para la *resolución de problemas* siguen una estrategia que considera 5 fases que corresponde a un ciclo de matematización:
  - o Comprenden el enunciado del problema.
  - o Distinguen los datos y la incógnita del problema.
  - o Disciernen las operaciones que permiten responder a la pregunta del problema, apoyándose, si es necesario, en un esquema gráfico que dé cuenta de la relación aritmética entre datos e incógnita.
  - o Realizan los cálculos de sumas y restas.
  - o Comprueban el resultado y lo interpretan en el contexto del problema.
- Para calcular las *sumas*: emplean los procedimientos ya estudiados para la adición de naturales, dado que las técnicas empleadas en los naturales se heredan una vez que se produce la ampliación a las posiciones menores que uno:
  - o Descomponen aditivamente los números de diversas formas: en fracciones decimales o en forma canónica- decimal. Ej. 0,357 = 0,3 +0,05 + 0,007
  - o Calculan la sumas parciales correspondientes y luego la suma total.
  - o Convierten una suma en otra equivalente, que es más fácil de calcular; para ello restan cierta cantidad a uno de los sumandos y se la suman al otro sumando (Técnica del *trasvasije*).
  - o Usan un procedimiento que resume la escritura de la composición y descomposición canónica de los números.
  - o Algoritmo convencional.

- Para calcular las *restas*: emplean los procedimientos ya estudiados para la resta de naturales.
  - o Descomponen aditivamente los números de diversas formas, en fracciones decimales o en forma canónica - decimal.
  - o Calculan las restas parciales correspondientes y componen para obtener el resultado total.
  - o Convierten una resta en otra equivalente que conserva la distancia entre minuendo y sustraendo y que sea más fácil de calcular. Para ello se resta o se suma el mismo número al minuendo y al sustraendo (Técnica del traslado de la diferencia).
  - o Usan un procedimiento que resume la utilización de la composición y descomposición aditiva canónica y no canónica de los números.
  - o Algoritmo convencional.

- Para el caso **10^n x N°** decimal:
  - adición iterada
  - convertir a fracción decimal
  - técnica de correr la coma

4. Fundamentos centrales de la Unidad

- En una estrategia general de resolución de problemas se pueden distinguir varias fases: comprender el enunciado del problema, identificar datos e incógnita, establecer las relaciones entre ellos que permiten modelar matemáticamente el problema, efectuar las operaciones indicadas y, finalmente, interpretar el resultado obtenido, respondiendo a la pregunta: ¿cuál es el significado de esta solución matemática en el contexto del problema?
- Hay problemas sencillos en los que las relaciones matemáticas entre datos e incógnitas se deducen de forma inmediata del enunciado. Son los problemas **directos**.
- Hay problemas cuyo enunciado sugiere una determinada operación, pero para encontrar la respuesta a la pregunta planteada hay que hacer la operación inversa. Son los problemas **inversos.**
- En los problemas en los que la identificación de las operaciones que los resuelven **no es inmediata** hay que hacer un trabajo específico para establecer un modelo matemático. Tal es el caso de los problemas combinados y de muchos problemas inversos**.**
- En el caso de problemas en que la identificación de las operaciones que lo modelan no es inmediata, el uso de *esquemas* resulta muy provechoso.
- Los esquemas son figuras que pretenden hacer visibles las relaciones entre datos e incógnitas y de esta forma deducir las operaciones buscadas.
- Para un mismo problema puede haber una diversidad de esquemas, por lo que es necesario determinar cuál es el más útil.
- Como ya se estudió en años anteriores (ver 3ª UD de Tercero básico), "frente a un determinado cálculo de suma o resta pueden existir distintas técnicas que lo resuelven, pero en muchos casos unas técnicas pueden ser más adecuadas que otras, dependiendo de la relación que exista entre los números". Asimismo, unas técnicas que resultaron eficientes para realizar un determinado cálculo, pueden no serlo frente a otro cálculo, incluso, pueden fracasar.
- La efectividad de una técnica puede disminuir al pasar del ámbito de los números naturales a los números decimales, por ejemplo, el sobreconteo.
- Para comprender los algoritmos de sumas y restas con números decimales, resulta conveniente descomponer aditivamente los números, ya sea en fracciones decimales o en forma canónica, lo cual puede implicar un proceso muy laborioso.

• Para calcular las sumas, en ocasiones es útil convertirlas en otras equivalentes que sean más fáciles de calcular. Por ejemplo, para calcular 0,98 + 0,37 podemos transformarla en 1,00 + 0,35 que da 1,35. Lo que se hizo fue *restar 0,0*2 a 0,37 y *sumarle 0,0*2 al 0,98 para completar 1,00. Esta técnica se estudió en 3° básico como técnica del *trasvasije*, que se apoya en la propiedad fundamental de la conservación de la cantidad en una adición: *una suma no se altera si lo que le restamos a un sumando, se lo sumamos al otro.*

• Para calcular restas, puede ser conveniente convertirlas en otras restas equivalentes que sean más fáciles de calcular. Por ejemplo, para calcular 1,72 – 1,28 podemos transformarla en 1,74 – 1,30 que da 0, 44. Es la técnica del *traslado de la diferencia* que se apoya en la propiedad fundamental de la conservación de la cantidad en una resta: *si lo que le restamos a un número también se lo restamos al otro* o bien, *si lo que le sumamos a un número también se lo sumamos al otro, la resta no se altera*.

Gráficamente equivale a trasladar la resta hacia la izquierda en la recta numérica, si es que hemos restado la misma cantidad a ambos números o hacia la derecha, si hemos sumado la misma cantidad.

- En los sistemas de numeración posicionales existen algoritmos para sumar y restar basados en el encolumnamiento o alineación, según las posiciones.
- En la escritura de un número decimal, la coma no ocupa una posición aparte o especial, sino que va colocada en la posición de las unidades, precisamente para indicar cuál es la posición de la Unidades. En este sentido, podría haberse empleado otro signo con la misma función: pintar de rojo el dígito que va en las unidades, o colocar sobre el dígito de las unidades una marca cualquiera.
- El campo de problemas aditivo está definido por todos aquellos problemas que se pueden modelizar mediante un conjunto de adiciones y/o sustracciones.
- Existen los siguientes tipos de problemas aditivos simples: Composición, Cambio y Comparación.
- Llamaremos problemas simples a aquellos que se pueden modelizar por una operación (+ o -).
- Llamaremos problemas aditivos combinados a aquellos que para ser modelizados requieren de más de una operación de suma o resta. En estos problemas aparecen al menos tres datos y una incógnita, por lo que es necesario realizar dos o más operaciones para ser resueltos.
- Dado que 10 es la base del SND, multiplicar un decimal por 10 equivale a correr la coma un espacio hacia la derecha. Esto equivale a que cada dígito del decimal se traslada una posición hacia la izquierda en la cuadrícula del SND. Esto se puede generalizar para 10^n x N° decimal.

5. Descripción global del proceso

Los aprendizajes esperados de la UD se desarrollan en tres etapas progresivas y estrechamente ligadas. La **primera etapa** queda caracterizada por el trabajo con problemas directos de composición, cambio y comparación. Primeramente, se abordan problemas simples de **adición** y se analiza la adecuación de las técnicas conocidas para sumar números naturales, ahora aplicadas a números decimales. Luego se avanza con problemas que se resuelven por una **sustracción**, en los cuales se pretende que el alumnado explore y aprenda técnicas para restar números decimales, basándose en las que ya conocen para la sustracción de números naturales. Los casos se abordarán en forma progresiva, partiendo de aquellos en que ambos términos tienen la misma cantidad de cifras decimales y no hay reserva, finalizando en aquellos casos en que no tienen la misma cantidad de cifras decimales y hay reserva en las sumas y restas. Asimismo, se inicia un trabajo de discusión con los alumnos, y entre ellos, acerca del uso pertinente de esquemas en la resolución de problemas. La etapa culmina con la resolución de problemas variados simples y directos que se resuelven ya sea por una adición o una sustracción.

En la **segunda etapa** se abordan problemas aditivos **inversos** de composición, cambio y comparación. Inicialmente se estudian problemas simples, en los cuales interesa que los estudiantes distingan claramente los datos de la incógnita y la relación que existe entre ellos. El uso de dibujos esquemáticos, como apoyo para la resolución de los problemas, cobra mayor importancia en esta etapa, dado que en el caso de los problemas inversos es más complejo determinar la operación que relaciona datos e incógnita.

La **tercera etapa** se centra en el estudio de problemas combinados, tanto directos como inversos de composición, cambio y comparación. En esta etapa también se estudia la situación de multiplicar un decimal por 10 y por 10^n acudiendo primero a la suma iterada para lograr el algoritmo convencional de correr la coma hacia la derecha tantos espacios como sea el exponente de la potencia de 10. La etapa culmina un estudio retrospectivo de la UD en el cual se resuelven problemas aditivos con decimales de todo tipo, esperándose que el alumnado recurra a esquemas en los casos más complejos, y que ya manejen con soltura técnicas convencionales para sumar y restar números decimales.

6. Sugerencias para trabajar los aprendizajes previos.

Antes de dar inicio al estudio de la Unidad, es necesario realizar un trabajo sobre los aprendizajes previos. Interesa que los estudiantes activen los conocimientos necesarios para que puedan enfrentar adecuadamente la unidad y lograr los aprendizajes esperados en ella. El docente debe asegurarse que todos los niños y niñas:

- **Dan sentido a cantidades expresadas con decimales representándolas y/o expresándolas de diferentes maneras.**

Explican el significado de cantidades expresadas como decimales, de acuerdo a los principios del Sistema de Numeración Decimal.

Ejemplo: Explique por qué son distintos los siguientes números si los tres emplean los mismos dígitos:

0,30	*3,00*	*0,03*

Leen y escriben números racionales ya sea como *fracción decimal* o como *número decimal.*

Ejemplo: Completar la tabla anotando cada número ya sea como fracción decimal o como número decimal.

Nº decimal	Fracción decimal
3,8	
	$\frac{431}{10}$
0,0054	
	$\frac{29}{1000}$

- **Interpretan las cifras decimales en relación a la unidad correspondiente, en contextos de medición.**

Cuando se expresa el resultado de una determinada medida es imprescindible especificar cuál es la unidad de medida que se está utilizando para expresar dicha cantidad. No sirve que expresemos que el resultado de medir una longitud es 13,256 si no agregamos, a su vez, la información de qué unidad de medida se utilizó para expresar el resultado. Está claro que el resultado expresa que se obtuvo una decena, tres unidades, dos décimas de unidad, cinco centésimas de unidad y seis milésimas, pero la pregunta acá es ¿y a qué unidad se refiere?, ¿metros?, ¿centímetros?, ¿kilómetros?

La forma de expresar la cantidad de medida es indicando a la derecha del número la unidad utilizada, en nuestro caso, 13,256 m. Aquí, la coma indica que el dígito 3 ocupa la posición unidades y la letra m detrás del número indica que esas unidades están expresadas en metros. Por tanto, el 3 son metros, el 1 son decenas de metro, el 2 décimas de metro, el 5 centésimas de metro y el 6 milésimas de metro.

Ahora bien, si tenemos la siguiente cantidad 1325,6 cm resulta que la posición de las unidades está ocupada por el dígito 5 y las unidades utilizadas son los centímetros. Así, en esa medida el dígito 1 representa mil centímetros, el 3 centenas de cm, el 2 decenas de cm, el 5 unidades de cm y el 6 décimas de cm.

Resulta que ambas cifras representan una misma cantidad, pese a que como números son distintos. Eso se debe a que, justamente, la unidad centímetro es la centésima parte de la unidad metro, de modo que el dígito 3 que en la segunda cantidad ocupa la posición de las centenas de centímetros, en la primera cantidad ocupa la posición de las unidades de metro. La equivalencia entre cantidades puede apreciarse multiplicando la segunda cantidad por 100 (dado que en 1 m hay 100 cm) y comparándola con la primera cantidad.

Una forma relativamente simple de abordar los problemas que involucran conversiones (siempre y cuando la escala de unidades sea de base decimal) es utilizando la cuadrícula decimal sin coma, reemplazando el valor de cada posición por las distintas unidades de medida correspondientes. Para ello, se requiere que entre una unidad y otra queden las columnas vacías necesarias, de tal forma que los valores posicionales entre las unidades de medida respeten los factores de conversión que hay entre unidades, tal y como se muestra en el ejemplo.

Ejemplo: Un mástil tiene una base de 34,5 cm, el palo principal mide 4,28 m y está coronado por una pequeña estatua dorada de 345,6 mm. ¿Cuál es la longitud total del mástil?

Unidades				Km			m		cm	mm			
Base								3	4	5			
Mástil							4	2	8				
Estatua								3	4	5	6		
Total							4	9	6	0	6		

Para ubicar cada uno de los dígitos se ha considerado la posición de las unidades en cada una de las medidas. Así, para situar el 34,5 cm en la cuadrícula se ha ubicado el 4 en la columna de los cm, y luego se ubica el resto de dígitos en las columnas respectivas, respetando la posición que tienen en el número. De la misma forma se ha procedido a posicionar el resto de sumandos. Finalmente, una vez ubicados todos los sumandos, se procede a realizar la suma por columnas, dado que las unidades hay que sumarlas con las unidades, las decenas con las decenas, las décimas con las décimas, ... y se ha tenido en consideración que si la suma de una determinada columna es mayor que 9, entonces hay que pasar la reserva a la columna siguiente.

Como se puede apreciar, la coma desaparece en el proceso de suma. El total obtenido es 49606, pero ese total hay que expresarlo en alguna unidad de medida. Imaginemos que lo queremos expresar en metros, entonces, se sitúa la coma en la posición de los metros, es decir, 4,9606 m. Supongamos que lo queremos expresar en kilómetros, entonces, situamos la coma en la posición de los kilómetros y rellenamos las posiciones vacías con ceros, es decir 0,0049606 km.

- **Manejan los algoritmos para la adición y sustracción con números naturales.**

  En primer ciclo básico, alumnas y alumnos estudiaron una diversidad de procedimientos para sumar y restar que son más o menos útiles, según la relación entre los números. Entre ellos tenemos, para la suma: descomposiciones aditivas, canónicas, técnica del trasvasije, sumas parciales abreviadas y encolumnamiento de los sumandos. Para la resta: descomposiciones canónicas, traslado de la diferencia, técnica "aprovechando el nueve", que se deriva de la anterior, algoritmo convencional. En las UD de 2° y 3° se encuentran variados ejemplos para trabajar este aprendizaje previo.

- **Resuelven problemas aditivos simples y combinados, directos e inversos que involucren números naturales y fraccionarios.**

Algunos ejemplos de problemas combinados obtenidos de la 3ª UD de Tercero pueden servir para revisar este aprendizaje previo.

Problema	**Relación aritmética entre datos e incógnita**
Una niña tiene $40 en un bolsillo, $70 en otro y $100 en la mochila. ¿Cuánto dinero tiene?	a + b + c = x
Un niño tiene $500 en un bolsillo y $400 en otro. Pagó $700 que debía. ¿Cuánto dinero tiene?	a + b – c = x
Una niña tenía $4.000. Pagó $500 que le debía a una compañera y gastó $1.200 en un libro que compró. ¿Cuánto dinero tiene?	a – b – c = x
Una niña tenía $1.000. La mamá le regaló $500 y el papá también le regaló algo de dinero. Ahora tiene $ 2.100. ¿Cuánto le regaló el papá?	a + b + x = c

II. ESQUEMA

APRENDIZAJES ESPERADOS

⇧

ETAPA 3

TAREAS MATEMÁTICAS	**CONDICIONES**	*TÉCNICAS*	**FUNDAMENTOS CENTRALES**
• Resuelven problemas aditivos combinados con Nº decimales directos e inversos, de composición, cambio y comparación. • Analizan problemas aditivos y establecen semejanzas y diferencias. • Explican los procedimientos usados para realizar los cálculos y resolver el problema. • Elaboran problemas aditivos a partir de una situación dada. • Calculan productos del tipo 10^n x decimal.	• Problemas de enunciado verbal. • Los números tienen: - la misma o distinta cantidad de cifras decimales. • Sumas y restas con y sin reserva .	• Resuelven problemas con la estrategia de las 5 fases, apoyándose en esquemas • *Para sumar:* - *algoritmo convencional* - *trasvasije* • *Para restar* - *traslado de la diferencia* - *algoritmo convencional* • *Para el caso 10^n* x *decimal:* - *adición iterada* - *convertir a fracción decimal* - *técnica de correr la coma*	Llamaremos problemas aditivos combinados a aquellos que para ser modelizados requieren de más de una operación de suma o resta. En estos problemas aparecen al menos tres datos y una incógnita, por lo que es necesario realizar dos o más operaciones para resolverlos. En el caso de problemas en que la identificación de las operaciones que lo modelan no es inmediata, el uso de *esquemas* resulta muy provechoso. Los esquemas son figuras que pretenden hacer visibles las relaciones entre datos e incógnitas y de esta forma deducir las operaciones buscadas. Para un mismo problema puede haber una diversidad de esquemas, por lo cual es necesario determinar cuál es el más útil. Dado que 10 es la base del SND, multiplicar un decimal por 10, equivale a correr la coma un espacio hacia la derecha. Esto equivale a que cada dígito del decimal se traslada una posición hacia la izquierda en la cuadrícula del SND.

⇧

ETAPA 2

TAREAS MATEMÁTICAS	**CONDICIONES**	**TÉCNICAS**	**FUNDAMENTOS CENTRALES**
• *Resuelven problemas aditivos simples inversos con Nº decimales:* - composición, cambio y comparación • *Calculan sumas y restas de Nº decimales.* • *Explican los métodos usados para realizar los cálculos y resolver los problemas.*	• Problemas de enunciado verbal. • Los números tienen: - la misma cantidad de cifras decimales - distinta cantidad de cifras decimales. • Sumas y restas: - sin reserva - con reserva	• Resuelven problemas con la estrategia de las 5 fases, apoyándose en esquemas • *Para sumar:* - *trasvasije* - *algoritmo convencional* • *Para restar* - *traslado de la diferencia* - *algoritmo convencional*	Hay problemas cuyo enunciado sugiere una determinada operación, pero para encontrar la respuesta a la pregunta planteada hay que hacer la operación inversa. Son los problemas **inversos.** En el caso de estos problemas, el uso de *esquemas* resulta muy provechoso para deducir la operación requerida.

ETAPA 1

TAREAS MATEMÁTICAS	**CONDICIONES**	*TÉCNICAS*	**FUNDAMENTOS CENTRALES**
• Resuelven problemas aditivos simples y directos con Nº decimales de composición, cambio *y comparación.* • Calculan sumas y restas de Nº decimales. • Explican los métodos utilizados para realizar los cálculos y resolver los problemas.	• Problemas de enunciado verbal. • Los números tienen: - la misma cantidad de cifras decimales - distinta cantidad de cifras decimales. • Sumas y restas: - sin reserva - con reserva	• *Resuelven problemas con la estrategia de 5 fases, haciendo dibujos esquemáticos.* • *Para sumar:* - *descomposiciones aditivas convenientes* - *técnica del "trasvasije"* - *encolumnado y sumas parciales abreviadas* - *algoritmo convencional* • *Para restar* - *descomposiciones aditivas convenientes* - *traslado de la diferencia* - *algoritmo convencional*	Hay problemas sencillos en los que las relaciones matemáticas entre datos e incógnitas se deducen de forma inmediata del enunciado, es el caso de los problemas directos. • Para calcular las sumas, en ocasiones es útil convertirlas en otras equivalentes que sean más fáciles de calcular. Esta es la técnica del *trasvasije* que se apoya en la propiedad: *una suma no se altera si lo que le restamos a un sumando, se lo sumamos al otro.* Para calcular restas, puede ser conveniente convertirlas en otras restas equivalentes que sean más fáciles de calcular. Esta es la técnica del *traslado de la diferencia* que se apoya en la propiedad: *si lo que le restamos a un número también se lo restamos al otro* o bien, *si lo que le sumamos a un número también se lo sumamos al otro*, la resta no se altera.

APRENDIZAJES PREVIOS

III ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE:

A. DESARROLLO DE LOS FUNDAMENTOS CENTRALES

La resolución de problemas

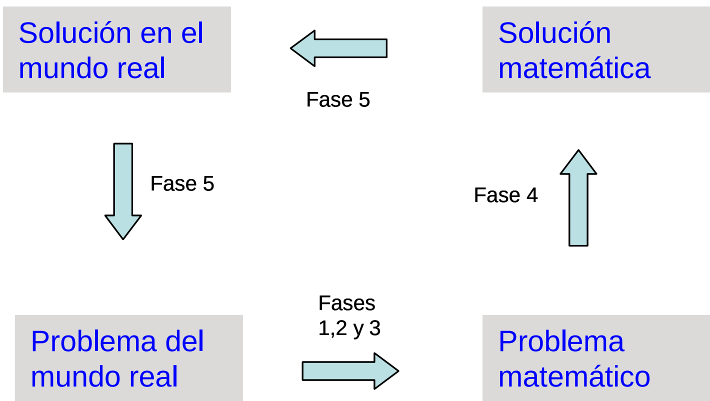
La propuesta didáctica de esta unidad está centrada en que niñas y niños recuperen y apliquen estrategias para resolver problemas aditivos, ya estudiadas en años anteriores, pero ahora el ámbito numérico está referido a números decimales. En forma paralela, desarrollarán procedimientos para efectuar sumas y restas con estos números.

Una estrategia general de resolución de problemas, incluye las siguientes fases:

- fase 1: comprender el enunciado del problema
- fase 2: identificar datos e incógnita,
- fase 3: decidir qué operaciones permiten modelar el problema.
- fase 4: resolver el problema matemático correspondiente
- fase 5: interpretar el resultado de las operaciones, respondiendo a la pregunta: ¿cuál es el significado de esta solución matemática en el contexto del problema?

En estas cinco fases se puede reconocer el **ciclo de matematización** propio del quehacer matemático que, partiendo de un problema del mundo real, busca un modelo matemático que dé cuenta de él, luego se opera en el modelo matemático para, finalmente, volver a la situación original y resignificar la solución matemática en el contexto original del problema.

El esquema que representa este ciclo es el siguiente:



Es necesario señalar que este ciclo de matematización no es exclusivo para problemas del mundo real, sino que también se puede aplicar a problemas del mundo matemático.

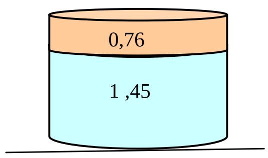
Hay problemas en los que las operaciones que lo modelan se deducen de forma inmediata del enunciado, es el caso de los problemas **directos**, pero hay otros problemas en los que la identificación de las operaciones que los resuelven **no es inmediata** y hay que hacer un trabajo específico para traducirlo a un modelo matemático. Tal es el caso de muchos problemas combinados y, sobre todo, de los problemas **inversos**.

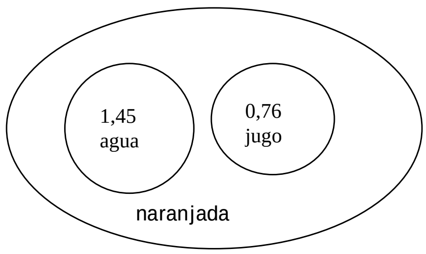
El uso de esquemas en la resolución de problemas aditivos.

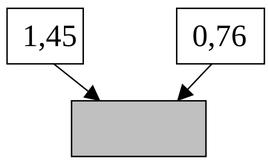
En el caso de problemas en que la identificación de las operaciones que lo modelan no es inmediata, el uso de *dibujos esquemáticos* resulta muy provechoso, ya que su construcción permite evidenciar las relaciones entre datos e incógnita y, de esta forma, deducir las operaciones. Dicho de otra manera, los esquemas son figuras que pretenden hacer visibles las relaciones entre datos e incógnitas y de esta forma deducir las operaciones buscadas.
Dibujos esquemáticos hay de varios tipos y de distinto nivel de desarrollo. Su importancia en el desarrollo del pensamiento matemático debe ser destacada. Es muy probable que, inicialmente, los estudiantes produzcan esquemas muy básicos, muy cercanos a lo figurativo, para luego avanzar a otros que sean más potentes, en términos que permiten obtener información crucial para formular el modelo matemático buscado. Para un mismo problema puede haber una diversidad de esquemas, por lo cual es necesario determinar cuál es el más útil.

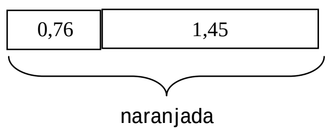
Es importante desafiar a los estudiantes a que produzcan sus propios esquemas, los cuales podrán ser descartados o confirmados en una discusión a nivel de curso, según sean más o menos útiles. Por ejemplo, para el siguiente problema de composición podrían surgir algunos de estos esquemas u otros:

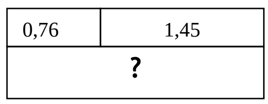
Se mezclan 1,45 litros de agua con 0,76 litros de jugo de naranja. ¿Qué cantidad de naranjada se obtiene?











La discusión pertinente con el curso será en torno a la pregunta: ¿cuál o cuáles de estos esquemas es(son) más efectivo(s) o permite encontrar con mayor facilidad la relación entre los datos e incógnita?

Adición y sustracción de números decimales en el Sistema de Numeración Decimal Posicional.

Una de las grandes ventajas de los sistemas de numeración posicionales es que permiten desarrollar algoritmos de adición y sustracción de cantidades basados en el encolumnado de las cantidades según posiciones, de forma tal que la suma total se obtiene a partir de las sumas parciales de cada una de las posiciones. En caso de que alguna de las sumas parciales dé un total mayor que la base del sistema, hay que formar tantas agrupaciones de la posición siguiente como sea posible y añadirlas al subtotal de dicha posición, quedando solo aquellas unidades que no pudieron agrupar.

En el SND, la técnica utilizada para encolumnar adecuadamente los diversos dígitos de los sumandos en una adición es la de alinear las posiciones de los dígitos por columnas empezando por la derecha. De ese modo, todos los dígitos de los sumandos que ocupan la primera columna corresponden a la posición de las unidades, los de la segunda a la posición decenas, y así sucesivamente.

En el SND extendido, la técnica de alinear a la derecha fracasa, dado que, al contrario de lo que sucedía con el SND sin extender, dicho proceder no garantiza que los dígitos de los diversos sumandos queden encolumnados por valores posicionales. Esto es debido a que no necesariamente todos los sumandos poseen la misma cantidad de cifras decimales. Así, en el algoritmo de adición de decimales para posicionar los diversos sumandos se utiliza la coma como el símbolo que permite alinear la posición de las unidades de los diversos sumandos. De ese modo, al alinear los dígitos de cada sumando de forma que la coma de todos los sumandos coincida, nos aseguramos de que los diversos dígitos de cada uno de los sumandos queden encolumnados correctamente, correspondiendo cada una de las columnas a un mismo valor posicional. La coma decimal no ocupa una posición aparte o especial, como suele aparecer algunos libros de texto, sino que va ubicada en la posición de las unidades, precisamente para distinguir o destacar esa posición de todas las otras.

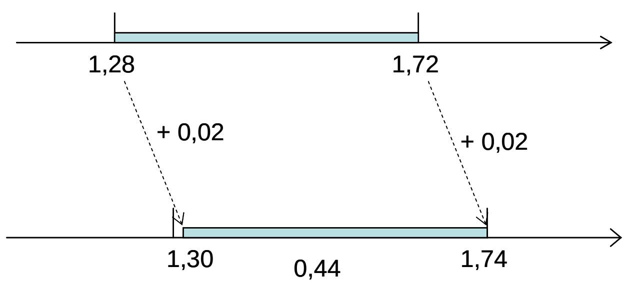
La técnica descrita se conoce bajo el nombre de la *alineación de la coma*. Si bien dicho nombre es muy práctico y se identifica claramente con el gesto necesario que hay que efectuar con los sumandos a la hora de alinearlos, en realidad lo que se alinea no son las comas, sino los dígitos de cada sumando según sea su valor posicional.

Ambas técnicas de alineación (la del SND y la del SND extendido) logran un mismo objetivo, que es el de encolumnar las posiciones de los dígitos de los sumandos según sea su valor posicional. Al alinear las comas, en realidad lo que se está alineando son las posiciones de las unidades (dado que la coma es el símbolo utilizado para demarcar dicha posición) y, al quedar alineadas las unidades, quedan alineadas todas las demás posiciones. Una vez realizadas las sumas parciales de cada columna, y añadidas las reservas (agrupaciones de un orden superior) a las posiciones que corresponda, la regla dice *"se baja la coma"* a la cantidad total. En realidad, lo que sucede es que la columna de la posición unidades del total, coincide con la columna de la posición unidades de los sumandos y por tanto es necesario señalar dicha posición con una coma.

Como ya se estudió en años anteriores (ver 3ª UD LEM de Tercero), frente a un determinado cálculo de suma o resta pueden existir distintas técnicas que lo resuelven, pero en muchos casos unas técnicas pueden ser más adecuadas que otras, dependiendo de la relación que exista entre los números. Es decir, aunque puedan existir distintas técnicas para realizar un mismo cálculo, no siempre son todas igualmente eficientes. Asimismo, unas técnicas que resultaron eficientes para realizar un determinado cálculo, pueden no serlo frente a otro cálculo, incluso, pueden fracasar. La efectividad de la técnica puede disminuir al pasar del ámbito de los números naturales a los números decimales, por ejemplo, el sobreconteo.
Para calcular comprensivamente sumas y restas con números decimales, resulta conveniente descomponer aditivamente los números en función de la relación que exista entre ellos, lo cual implica, por lo general, un proceso muy laborioso.

- Para calcular las sumas, en ocasiones puede ser útil convertirlas en otras equivalentes que sean más fáciles de calcular. Por ejemplo, para calcular 0,98 + 0,37 podemos transformarla en 1,00 + 0,35 que da 1,35. Lo que hicimos fue *restar 0,0*2 a 0,37 y *sumarle 0,0*2 al 0,98 para completar 1,00. Es la técnica del *trasvasije* que se apoya en la propiedad fundamental de la conservación de la cantidad en una adición: *una suma no se altera si lo que le restamos a un sumando, se lo sumamos al otro.*

- Para calcular restas, puede ser conveniente convertirlas en otras restas equivalentes que sean más fáciles de calcular. Por ejemplo, para calcular 1,72 – 1,28 podemos transformarla en 1,74 – 1,30 que da 0, 44. Es la técnica del *traslado de la diferencia* que se apoya en la propiedad fundamental de la conservación de la cantidad en una resta: *si lo que le restamos a un número también se lo restamos al otro* o bien, *si lo que le sumamos a un número también se lo sumamos al otro, la resta no se altera*. Gráficamente equivale a trasladar la resta en la recta numérica hacia la izquierda, si es que hemos restado la misma cantidad a ambos números, o hacia la derecha, si hemos sumado la misma cantidad.



En los sistemas de numeración posicionales existen algoritmos para sumar y restar basados en el encolumnamiento o alineación, según las posiciones.

La coma decimal no ocupa una posición aparte o especial, sino que va colocada en la posición de las unidades, precisamente para indicar cuál es la posición de la Unidades. En este sentido, podría haberse empleado otro signo con la misma función: pintar de rojo el dígito que va en las unidades, o colocar sobre el dígito de las unidades una marca cualquiera.

El Campo de problemas aditivos

La principal tarea matemática que pretende desarrollar esta UD consiste en elaborar estrategias de resolución de problemas aditivos que involucran cantidades decimales.

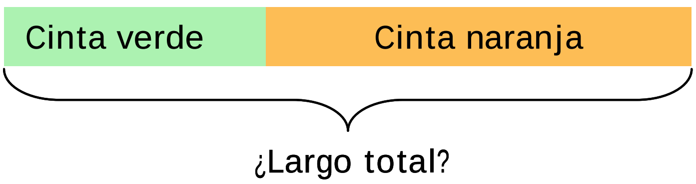
El campo de problemas aditivos viene definido por todos aquellos problemas que se pueden modelizar mediante un conjunto de adiciones y/o sustracciones. En este sentido, se trata de potenciar la idea que las operaciones adición y sustracción están íntimamente relacionadas y resulta muy provechoso para el estudio integrar ambas operaciones a un solo campo de problemas, que llamaremos el *campo de problemas aditivo.* En este aspecto distinguimos cuatro tipologías distintas de problemas que son:

- Problemas de Composición
- Problemas de Cambio
- Problemas de Comparación

Problemas de Composición

Son aquellos problemas donde se consideran un conjunto de **partes** y el **total** de ellas. En este tipo de problemas suelen aparecer las acciones de unir/separar o agrupar/desagrupar y las variables implicadas suelen ser las partes y el total.

Ej. 1: María tiene una cinta de color verde de 2,3 m y Juan tiene otra cinta de color naranja de 3,6 m. Si deciden coser las dos cintas para armar una nueva cinta bicolor, ¿cuál es el largo total de la nueva cinta?
El uso de esquemas para modelizar los problemas facilita considerablemente la tarea de resolución de los problemas.



Largo total =largo cinta verde +largo cinta naranja

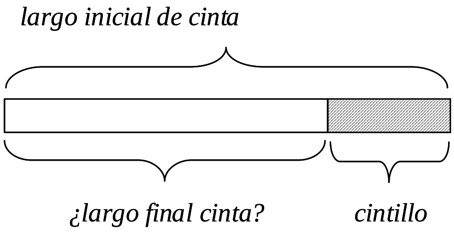
Largo total = 2,3 m + 3,6 m =5,9 m

Problemas de Cambio

Son aquellos problemas donde hay una determinada cantidad inicial, luego se varía la situación inicial agregando/quitando a dicha cantidad, dando lugar a una situación final nueva. Por ello distinguimos en estos problemas un estado o situación inicial, una acción de transformación, y un estado o situación final.

Ej.: Matías tenía una cinta de 3 m de longitud, y cortó un pedazo de 75 cm para hacerse un cintillo. ¿Cuánta cinta le queda?

Un esquema para modelizar esta situación podría ser el siguiente:



Largo final = *largo inicial cinta* - *largo cintillo*

Largo final = 3 m - 0,75 m = 2,25 m

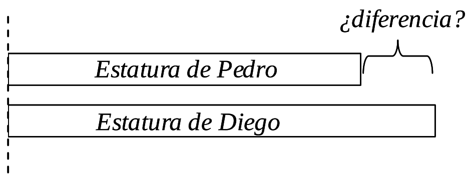
Diversas investigaciones en el área de la Didáctica de las Matemáticas, muestran cómo los problemas de cambio, pese a tener un esquema bastante similar a los de composición, presentan un mayor grado de dificultad a los alumnos. Eso se debe a que en este caso hay que saber interpretar correctamente cuál es la situación inicial, la modificación realizada y la situación final, interpretación que es más compleja que la requerida para resolver los problemas de composición (identificar las partes de un total).

Problemas de Comparación por diferencia

Este tipo de problemas son aquellos en los que aparecen involucradas un determinado conjunto de cantidades y las respectivas diferencias entre ellas. Las preguntas típicas asociadas a este tipo de problemas son cuánto más/ cuánto menos o bien, la diferencia.

Ej.: Pedro mide 1,42 m y Diego mide 1,58. ¿Qué diferencia de estatura hay entre ellos?

Un esquema típico para los problemas de comparación sería:



Diferencia = *Estatura de Diego* - *Estatura de Pedro*

Diferencia = 1,58 m - 1,42 m = 0,16 m

Nótese que en el esquema de comparación aparecen dos barras en lugar de una y que para poderlas comparar es conveniente hacer coincidir el inicio de ambas.

Problemas Combinados

Estos problemas son aquellos en los que, para su modelización se requiere utilizar una combinación de adiciones y/o sustracciones.

Ejemplo.

Un niño es enviado a la panadería a comprar marraquetas y hallullas. La cajera, al colocar las bolsas en la balanza, comprobó que las marraquetas pesaban 0.890 kg y las hallullas 1,150 kg. En el trayecto a su casa el niño se comió dos panes (100 g cada uno). ¿Cuánto pesaba el pan con el que llegó a su casa?

O,890 kg	1,150 kg
x	0,200 kg

Tipologías de problemas aditivos según la posición de la incógnita: directos e inversos

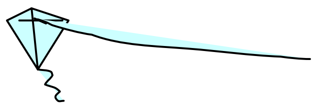
Varias investigaciones realizadas muestran cómo alumnas y alumnos en el momento de resolver los problemas de composición, suelen presentar mejores desempeños cuando se pregunta por el total, que cuando se pregunta por una de las partes. Este no es un hecho aislado, ya que sucede lo mismo al resolver problemas de comparación (presentan mejor desempeño en aquellos problemas en que se pregunta por la diferencia, que en aquellos en que se pregunta por una de las cantidades) y al resolver problemas de cambio (presentan un mejor desempeño cuando se pregunta por la cantidad final que cuando se pregunta por la cantidad inicial o bien, la diferencia entre ambas cantidades).

Este fenómeno no es casual y creemos que se debe a que la resolución de problemas aditivos en la enseñanza está muy centrada en procesos algorítmicos, basados en la identificación de palabras clave, dejando muy poco espacio a las tareas de interpretación y modelización de los problemas.

Según lo anterior, los problemas se clasifican en **directos e inversos**. Los problemas directos son aquellos en que la operación a efectuar para poder calcular la cantidad incógnita del problema coincide con la acción sugerida en el enunciado, mientras que en los problemas inversos sucede lo contrario.

Pongamos un ejemplo de ello:

Ej. 1: *Pablo compró un volantín que venía con un hilo de 25 m. Luego de comprarlo, decidió agregarle el resto de hilo que le quedó del volantín anterior de 25,4 m. ¿Cuál es el largo total del hilo después de que los unió?*



Este problema es un problema de cambio, dado que presenta una situación inicial, una transformación y una situación final. La propia acción involucrada en el problema (unir) sugiere que el problema se resuelve con una adición, hecho que efectivamente es así. Por ello este problema es un problema de cambio directo.

Si en lugar de preguntar por la cantidad final, la incógnita del problema hubiese sido la cantidad inicial o bien la diferencia, entonces sería inverso; veamos un ejemplo de ello

Ej. 2: *Pablo compró un volantín que venía con una determinada cantidad de hilo. Luego de comprarlo, decidió agregarle el resto de hilo que le quedó del volantín anterior de 25,4 m, con lo que obtuvo un largo total de 45,4 m. ¿Cuál era el largo del hilo del volantín al comprarlo?*

Este problema es inverso, por el hecho de que pese a que le agregó hilo al volantín, para calcular la cantidad inicial de hilo es necesario restar la cantidad de hilo que se añadió a la longitud de hilo final.
Habitualmente, los **problemas de composición** son directos cuando se dan las partes y se pregunta por el total, y son inversos cuando se da una parte y el total, y se pregunta por la

otra parte. Por otro lado, los **problemas de cambio** son directos cuando se conoce la situación inicial y el cambio y se pregunta por la situación final, y son inversos cuando se conoce la situación final y la situación inicial y se pregunta por el cambio o bien, cuando se conoce la situación final y el cambio y se pregunta la situación inicial. Por último, en el caso de los **problemas de comparación**, estos son directos cuando se dan las cantidades y se pregunta por la diferencia, y son inversos cuando se da una de las cantidades y la diferencia, y se pregunta por la otra cantidad.

Un caso particular de adición: sumar 10 veces un número decimal
Un caso interesante de analizar con los estudiantes es aquel en que se suma diez veces una misma cantidad decimal.
Por ejemplo:

> *Un envase de gelatina señala, en una de sus caras, que cada porción es de 2,5 g. ¿Cuánto pesan 10 de esas porciones?*

Al sumar encolumnando se observa que al sumar los diez veces 5 de la columna de décimos de gramos, se obtiene 50 décimos de g. Colocan un cero en esa posición y reservan 5 que trasladan a la posición de los gramos. Al sumar los dígitos de esa columna se obtiene 25 g que se anota con un 5 en esa posición y un 2 en la posición siguiente, de las decenas de gramos. La respuesta es 25 gramos. Se observa que en la respuesta final se ocupan los mismos dígitos originales, pero desplazados en una posición hacia la izquierda. Es decir, al multiplicar un decimal por la base del SND, ocurre un fenómeno muy especial: el patrón numérico completo se desplaza una posición a la izquierda, lo que equivale a decir que creció en un orden de magnitud:

$$\begin{array}{rrr}
 & 5 & \\
 & 2, & 5 \\
 & 2, & 5 \\
 & 2, & 5 \\
 & 2, & 5 \\
 & 2, & 5 \\
 & 2, & 5 \\
 & 2, & 5 \\
 & 2, & 5 \\
 & 2, & 5 \\
+ & 2, & 5 \\
\hline
2 & 5, & 0
\end{array}$$

Dado que 10 es la base del SND, para multiplicar un decimal por 10, equivale a correr la coma un espacio hacia la derecha. Esto equivale al hecho que cada dígito del decimal se traslada una posición hacia la izquierda en la cuadrícula del SND.

Esto se puede generalizar para $10n^n$ x Nº decimal. Por lo cual no será necesario efectuar la suma de los 10^n sumandos, sino que basta con correr la coma tantos espacios como sea el exponente de la potencia. Si tenemos 100 x 2,5g = 250,0 g = 250 g

B. ESTRATEGIA DIDÁCTICA

……..PRIMERA ETAPA

En esta etapa niña y niños resuelven problemas aditivos simples directos, de composición, cambio y comparación en los que es necesario calcular una suma o una resta. Se pondrá especial dedicación al estudio de los procedimientos para sumar y restar decimales, con y sin reserva, incluyendo el caso en que alguno de los términos tiene ceros o bien, no tienen la misma cantidad de decimales. El caso de las restas con reserva requiere de un trabajo especial, dado que presenta mayores dificultades que el caso en que no hay reservas. Los estudiantes revisarán las técnicas de descomposición canónica, ya sea en fracciones decimales o en números decimales, para culminar con el algoritmo convencional que ya era conocido en los naturales (encolumnamiento). Al final de la etapa se aplican los conocimientos aprendidos a problemas diversos con el apoyo de dibujos esquemáticos, si fuera necesario. Se propone desarrollar esta etapa en tres clases, más una de evaluación.

Se parte planteando a los estudiantes una actividad de resolución de problemas que impliquen la adición de dos medidas y se les pide que la resuelvan en parejas por dos métodos diferentes. Por ejemplo:

> *Jorge fue a la feria y compró papas y naranjas. Las naranjas pesaron 2,34 kg y las papas 5,12 kg. ¿Cuánto pesó la compra de Jorge?*

Cuando el profesor o profesora observe que la mayoría ya encontró la solución por dos caminos distintos, se puede realizar una puesta en común registrando en la pizarra los diferentes métodos.

Como una manera de detectar el uso de esquemas, les puede formular preguntas como: ¿alguno de ustedes hizo algún dibujo para solucionar el problema? o bien, ¿cómo podrían representar esta situación mediante un dibujo o esquema? Según las respuestas dadas, el docente podrá tener un panorama inicial del uso, o desuso, de los esquemas, y del tipo de esquema predominante en el curso.

Con respecto a los procedimientos empleados para calcular la suma, se pueden presentar algunas de las siguientes técnicas:

1ª solución: descomposición aditiva en fracciones decimales:

$$2{,}34 + 5{,}12 = 2 + \frac{3}{10} + \frac{4}{100} + 5 + \frac{1}{10} + \frac{2}{100} = (2+5) + \left(\frac{3}{10}+\frac{1}{10}\right) + \left(\frac{4}{100}+\frac{2}{100}\right) = 7 + \frac{4}{10} + \frac{6}{100}$$

$$\begin{array}{l} 2 + \frac{3}{10} + \frac{4}{100} \\ 5 + \frac{1}{10} + \frac{2}{100} \\ \hline 7 + \frac{4}{10} + \frac{6}{100} \end{array}$$

Convirtiendo a número decimal y luego componiendo, se obtiene el resultado:
7 +0,4 + 0,06 = **7,46**

2ª posibilidad: descomposición aditiva canónica en decimales:

	2+	0,3 +	0,04
+	5 +	0,1 +	0,02
	7 +	0,4 +	0,06

$\longrightarrow$ Componiendo se obtiene: 7,46

3ª posibilidad: encolumnar según posiciones del SND y sumar los dígitos en cada posición:

	U	d	c
	2 ,	3	4
+	5 ,	1	2
	7 ,	**4**	**6**

En este caso, en el que no hay reserva, se observa que el método de descomposición canónica, ya sea en fracciones decimales o números decimales, es bastante laborioso; en cambio, el método de encolumnar, tal como se realizaba con naturales, es directo.

A continuación el profesor(a) efectúa un leve cambio en el problema, señalando que Jorge, se devuelve y compra un poco más de papas, las que ahora pesan 5,97 kg; las naranjas, que pesaron 2,34 kg, siguen en la bolsa. Nuevamente los invita a resolver en parejas y a poner en común los resultados.

Con esta modificación, el cálculo se transforma a una *suma con reserva*, y las posibles formas de calcular que pueden surgir en la clase se presentan a continuación.

Se trata de sumar: 2,34 + 5,97

1ª posibilidad: descomposición aditiva en fracciones decimales

$$2 + \frac{3}{10} + \frac{4}{100}$$

$$5 + \frac{9}{10} + \frac{7}{100}$$

$$7 + \frac{12}{10} + \frac{11}{100}$$

$$7 + (1 + \frac{2}{10}) + (\frac{1}{10} + \frac{1}{100}) = 8 + \frac{3}{10} + \frac{1}{100}$$

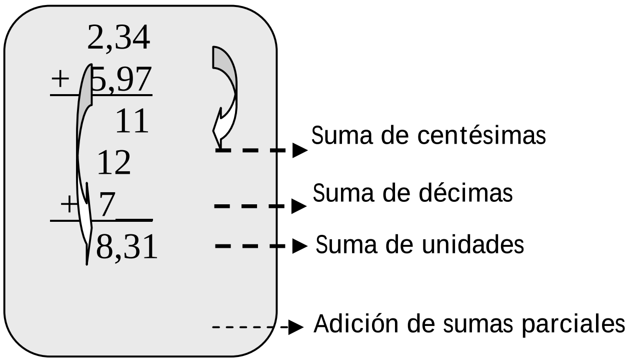
Convirtiendo a número decimal y luego componiendo el resultado: 8 + 0,3 + 0,01 = 8,31

2ª opción: descomposición aditiva canónica de la misma adición

	2+	0,3 +	0,04
+	5 +	0,9 +	0,07
	7 +	1,2 +	0,11 = (7+1) + (0,2 +0,1) + 0,01 = 8 +0,3 + 0,01 = 8,31

En el recuadro siguiente se muestra un procedimiento que *abrevia la escritura* anterior. Consiste en realizar las sumas parciales correspondientes, en este caso:

Centésimas:	(4+7) = 11/100
Décimas:	(3+9) = 12/10
Unidades:	(5 + 2 = 7



Creemos que la pregunta que debe formularse a los alumnos a la hora de sumar/restar dos cantidades decimales, antes de darles la regla de *"alineación y bajada de la coma"* es: ¿Cómo adaptar la técnica utilizada para encolumnar posiciones en los naturales para los decimales?

Dicha pregunta, debe ser formulada una vez que alumnas y alumnos tengan claridad que para realizar una suma hay que ubicar los dígitos de los sumandos por columnas, de tal forma que cada columna corresponda a un único valor posicional.

Este procedimiento evita la escritura "desarrollada" de las descomposiciones canónicas de 2,34 y 5,97, respectivamente. Además, puede ser utilizado para sumar más de dos números. Este procedimiento, tal como se estudió en 3° básico para los naturales, es el que permite justificar el algoritmo convencional:

$$
\begin{array}{rcccl}
 & \mathbf{1} & & \mathbf{1} & \leftarrow\text{---------- reservas} \\
 & 2 & , & 3 & 4 \\
+ & & & & \\
 & 5 & , & 9 & 7 \\
\hline
 & 7 & , & 3 & 1
\end{array}
$$

Existe la opción de emplear la propiedad del "trasvasije": la suma no se altera si a uno de los sumandos se le resta una cierta cantidad que se le suma al otro; sin embargo, esta técnica es más compleja con decimales que con naturales.

2,34 + 5,97 =(2,34 + 0,06) + 5,97 – 0,06) = 2,4 + 5,91 =(2,4 + 0,6) + 5,31 – 0,6) = 3+5,31 = 8,31

En otras sumas, puede presentarse que ambos sumandos tienen distinta cantidad de cifras decimales

Ej.: 3,25 + 2,7689

$$
\begin{array}{rccccccc}
 & 3 & , & 2 & 5 & & \\
+ & 2 & , & 7 & 6 & 8 & 9 \\
\hline
\end{array}
$$

Para poder efectuar la suma se completa con ceros y luego se efectúa la operación. El fundamento para efectuar la colocación de los ceros es que dada una cantidad, para obtener una expresión equivalente, basta con añadir algunos ceros a la derecha de la última cifra decimal.

Ej.: 2,34 = 2,340 = 2,3400 = 2,34000

Es necesario abordar esta noción de equivalencia, puesto que suele ser necesaria para realizar la adición y sustracción entre dos cantidades decimales.

$$
\begin{array}{rcccccc}
 & \mathbf{1} & & \mathbf{1} & & & \\
 & 3 & , & 2 & 5 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
+ & 2 & , & 7 & 6 & 8 & 9 \\
\hline
 & 6 & , & 0 & 1 & 8 & 9
\end{array}
$$

Tanto la técnica del sobreconteo como del trasvasije, empleadas en ciertos casos de suma de números naturales, no resultan cómodas de usar con números decimales, ya que en algunos casos habría que sobre-contar centésimas y en otro caso, décimas.

En el caso de naturales, el sobreconteo era con unidades o decenas, etc. No es que exista la imposibilidad de hacerlo, sino que resulta bastante más complejo.

La clase continúa su desarrollo con la proposición del profesor o profesora de una actividad que consiste en trabajar en parejas con la **Ficha1**. En dicha ficha se proponen variados problemas aditivos directos que se resuelven por una adición, tanto de composición como de cambio.

Por ejemplo:

En la oficina de correos, un cartero tiene que entregar las siguientes cajas de igual tamaño, pero de distintos pesos:

Caja A	*Caja B*	*Caja C*	*Caja D*	*Caja E*
1,23 kg	*2,71 kg*	*3,54*	*2,009 kg*	*0,846*

En su bolso solo le caben dos de estas cajas. Encuentre el peso que este cartero llevaría si echa en su bolso las cajas: A y B; o A y C; etc.

Se recomienda revisar las respuestas de los estudiantes en la pizarra, poniendo especial atención a la efectividad de los procedimientos empleados y haciendo un cierre con las ideas más importantes que se trabajaron (ver cierre de la clase1 en el plan de la Etapa I).

Continuando con la etapa 1, corresponde ahora abordar problemas aditivos que requieran de una **resta** para ser resueltos.

La profesora o profesor plantea a los niños y niñas la situación siguiente, o una similar, para que ellos la resuelvan en parejas por dos caminos distintos. Cuando el docente observe que la mayoría de sus alumnos ya encontraron la solución por dos caminos distintos, se puede realizar una puesta en común, registrando en la pizarra los diferentes métodos.

Roberta es una tejedora. En cierta ocasión sacó 2,31 m de hilo de un ovillo que tenía 5,72 metros de hilo. ¿Cuánto hilo quedó en el ovillo?

Para resolverlo, será necesario calcular la resta **5,72 - 2,31**

Las formas de calcular la resta pueden ser algunas de las siguientes:

1ª solución: descomposición aditiva en fracciones decimales

$$5 + \frac{7}{10} + \frac{2}{100} - \left(2 + \frac{3}{10} + \frac{1}{100}\right) = (5-2) + \left(\frac{7}{10} - \frac{3}{10}\right) + \left(\frac{2}{100} - \frac{1}{100}\right)$$

$$= 3 + \frac{4}{10} + \frac{1}{100}$$

Convirtiendo a número decimal y luego componiendo, se obtiene el resultado: 3 +0,4 + 0,01 **= 3,41**

2ª posibilidad: descomposición aditiva canónica en decimales

$$\begin{array}{rrrl} & 5+ & 0{,}7 + & 0{,}02 \\ - & 2 + & 0{,}3 + & 0{,}01 \\ \hline & 3 + & 0{,}4 + & 0{,}01 \ = 3{,}41 \end{array}$$

3ª posibilidad: trabajar directamente en la cuadrícula del SND

$$\begin{array}{rccc} & U & d & c \\ & 5, & 7 & 2 \\ - & 2, & 3 & 1 \\ \hline & 3, & 4 & 1 \end{array}$$

La clase avanza con una modificación al problema anterior, de tal manera que ahora la resta sea con **reserva**:

De un tablón que mide 2,48 m de largo, se corta un trozo que mide 1,59 m. ¿Cuánto mide el trozo que queda?

2,48 - 1,59

1ª opción

$$\begin{array}{rl} & 2 + \frac{4}{10} + \frac{8}{100} \\ - & 1 + \frac{5}{10} + \frac{9}{100} \\ \hline \end{array}$$

La simple descomposición canónica de ambos términos no es suficiente, ya que las restas no se pueden efectuar directamente, $\frac{8}{100} - \frac{9}{100}$ (será necesario volver a descomponer (el 2 en 1 + 10/10) y 1/10 en 10/100)

$$1 + \frac{10}{10} + \frac{4}{10} + \frac{8}{100} - (1 + \frac{5}{10} + \frac{9}{100}) = 1 + \frac{10}{10} + \frac{3}{10} + \frac{10}{100} + \frac{8}{100} - (1 + \frac{5}{10} + \frac{9}{100})$$

$$= 1 + \frac{13}{10} + \frac{18}{100}) - (1 + \frac{5}{10} + \frac{9}{100}) = \frac{8}{10} + \frac{9}{100} = 0{,}89$$

2ª opción: descomposición aditiva canónica en números decimales

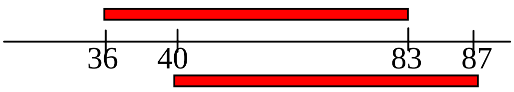
$$\begin{array}{lrrr} & 2+ & 0{,}4+ & 0{,}08 \\ - & 1+ & 0{,}5+ & 0{,}09 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{lrrr} & 1+ & 1{,}4+ & 0{,}08 \\ - & 1+ & 0{,}5+ & 0{,}09 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{lrrrl} & 1+ & 1{,}3+ & 0{,}18 & \\ - & 1+ & 0{,}5+ & 0{,}09 & \\ \hline & & 0{,}8+ & 0{,}09 & = 0{,}89 \end{array}$$

Existe una técnica estudiada en años anteriores que puede ser útil en algunos casos con decimales. Por ejemplo, en 3° básico se estudiaron ejemplos como el siguiente:

"Al calcular 83 – 36 podemos usar la misma técnica de traslado de la diferencia, pero esta vez sumando. En este caso la idea es convertir el sustraendo en un múltiplo de 10:

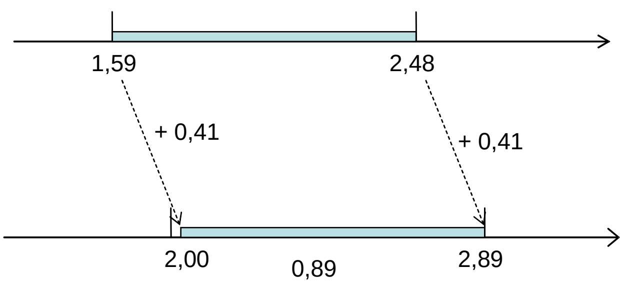
$$\begin{array}{r} 83 \\ -\ 36 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 83+\mathbf{4} \\ -\ 36+\mathbf{4} \\ \hline \end{array} \quad = \quad \begin{array}{r} 87 \\ -\ 40 \\ \hline 47 \end{array}$$

En este caso, la resta se ha corrido hacia la derecha:



Frente a este cálculo, trasladar la diferencia hacia la derecha, es decir, restar el mismo número a minuendo y sustraendo, no resulta muy conveniente. En efecto, si restáramos 6 al sustraendo para convertirlo en un múltiplo de 10 y de esta forma evitar el problema de la "reserva", tendríamos que restar igualmente 6 al minuendo, es decir calcular 83 – 6. Pero, hacer esta resta resulta de un nivel de dificultad similar al que se está calculando".

En el caso de números decimales, por ejemplo, para calcular la diferencia: 2,48 – 1,59 podemos transformarla en 2,00 – 2,89 (agregando 0,41 a cada término) lo que da 0,89. Es la técnica del *traslado de la diferencia* que se apoya en la propiedad fundamental de la conservación de la cantidad en una resta. Gráficamente equivale a trasladar la resta en la recta numérica hacia la derecha, si es que hemos sumado la misma cantidad a ambos números, o hacia la izquierda, si hemos restado la misma cantidad.



3ª posibilidad: trabajar directamente en la cuadrícula del SND, realizando los canjes necesarios

	U		d	c
	2	,	4	8
+	1	,	5	9
		,		

⇨

	U		d	c
	1		14	
	2	,	4	8
+	1	,	5	9
		,		

⇨

	U		d	c
	1		13	18
	2	,	14	8
+	1	,	5	9
	0	,	8	9

Una unidad se convierte en 10d que sumados con los 4d originales, da un total parcial de 14d. Luego, 1décimo de los 14 existentes se convierte en 10 centésimos, que sumados con los existentes en la posición c, da un total de 18 c. Ahora, con las transformaciones realizadas, se puede efectuar la resta: 18c – 9c =9c; 13d – 5d = 8d; 1U – 1 U = 0.

Por consiguiente, el resultado de la resta es 0,89.

Técnica para restar: A*provechando el 9*

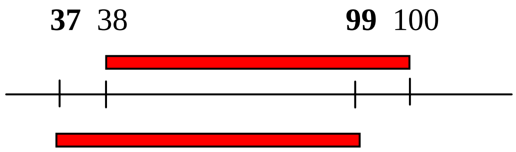
En las restas, con ceros entre medio, puede resultar difícil de resolver. En la 3° UD de tercer año básico ya se abordó este caso, por lo que es conveniente activar dicho conocimiento que se apoya en la *propiedad fundamental de conservación de las cantidades*.

Es así como en la 3ª UD de tercero básico se encuentra:

> "*Esta técnica ha sido llamada técnica del traslado de la diferencia, porque pese a que minuendo y sustraendo cambian, la diferencia entre ellos se mantiene. Esto sucede porque "lo que se resta al minuendo también se resta al sustraendo" o bien, "lo que se le suma al minuendo, también se suma al sustraendo". Por ejemplo, para calcular 100 – 38, se puede hacer el siguiente traslado, que convierte esta resta en otra equivalente mucho más fácil de calcular:*

$$\begin{array}{r} 100 \\ -\ \ 38 \\ \hline \end{array} \quad \curvearrowright \quad \begin{array}{r} 100 - \mathbf{1} \\ -\ \ 38 - \mathbf{1} \\ \hline \end{array} \quad = \quad \begin{array}{r} 99 \\ -\ 37 \\ \hline 62 \end{array}$$

> *En este caso, un dibujo puede mostrar más claramente la propiedad; cambian los números de la resta, pero la distancia o diferencia entre ellos es la misma. En este caso, ya que hemos restado el mismo número a ambos términos, la resta se corre hacia la izquierda:*



Aplicándola a números decimales se tiene, por ejemplo, que a la resta 2,000 – 1,284 convendría restarle 0,001 a 2,000 y también a 1,284:

$$\begin{array}{r} 2,\ 0\ 0\ 0 \\ -\ \ 1,\ 2\ 8\ 4 \\ \hline \end{array} \quad \xrightarrow{-\ 0,001} \quad \begin{array}{r} 1,\ 9\ 9\ 9 \\ -\ \ 1,\ 2\ 8\ 3 \\ \hline 0,\ 7\ 1\ 6 \end{array}$$

Para aplicar este procedimiento con números decimales se requiere manejar con soltura la resta de 1/1000 al entero 2 u otros casos similares.

Para seguir desarrollando la clase 2, el profesor o profesora propone una actividad que consiste en trabajar en parejas con la **Ficha 2**, en la que se proponen variados problemas aditivos directos, tanto de composición, cambio y comparación que se resuelven por medio de una **resta**.

Por ejemplo:

La siguiente tabla muestra las distancias entre el sol y los planetas del sistema solar expresada en Unidades Astronómicas (U.A.)

	Mercurio	Venus	Tierra	Marte	Júpiter	Saturno	Urano	Neptuno	Plutón
Distancia al Sol (en U.A.)	0,39	0,72	1,0	1,52	5,2	9,54	19,18	30,1	39,5

- Calcule la distancia (en U.A.) entre planetas vecinos y anótela en la tabla siguiente:

Distancia en U. A.)	Mercurio / Venus	Venus /Tierra	Tierra/ Marte	Marte/ Júpiter	Júpiter/ Saturno	Saturno/ Urano	Urano/ Neptuno	Neptuno/ Plutón

Se recomienda revisar las respuestas de los estudiantes en la pizarra, poniendo especial atención a la efectividad de los procedimientos empleados y haciendo un cierre con las ideas más importantes que se trabajaron (ver cierre de la clase 2 en el plan de la Etapa I).

La etapa culmina con la resolución de problemas variados, en que los alumnos ponen en práctica los conocimientos adquiridos a lo largo de esta 1ª etapa. Se recomienda trabajar la **Ficha 3** en pequeños grupos y luego realizar una puesta en común.

Finalmente, es necesario efectuar un **cierre** de la etapa 1.

En este momento de cierre se sistematizan los conocimientos que aparecieron en la etapa, preguntando a niñas y niños cómo identificaron las operaciones que había que hacer para resolver los problemas y qué operaciones utilizaron para resolverlos. Se les pregunta cómo son los problemas que han estudiado en la clase y se les pide que den un ejemplo.

Se espera que niños y niñas digan, en sus palabras, que los problemas aditivos simples:

- Son problemas en que hay que realizar una operación para resolverlos, ya sea sumas o restas.
- Los esquemas son una herramienta útil para identificar las operaciones que los resuelven. Hay diversos tipos de esquemas y, en algunos, es más evidente la relación que existe entre datos e incógnita.

Se estimula que digan cómo calcularon las sumas y las restas con números decimales, qué dificultades tuvieron para hacerlo y que discutan sobre la rapidez y eficacia de los procedimientos que usaron. Es importante identificar a quienes se equivocaron al sumar o restar, ya sea porque no encontraron una descomposición aditiva adecuada, porque no supieron trasladar la diferencia o porque no usaron bien el algoritmo convencional.

Se espera que niños y niñas formulen afirmaciones del tipo:

- Las sumas de números decimales se pueden calcular de distintas formas, pero el procedimiento de encolumnar resulta bastante efectivo, aunque la técnica del trasvasije en algunos casos puede ser muy directa.
- Para las restas, en ocasiones resulta conveniente utilizar técnicas basadas en el traslado de la diferencia, ya que la descomposición canónica de los números decimales en fracciones decimales o números decimales resulta muy laboriosa.
- En el caso de una resta con minuendo con muchos ceros, puede resultar efectiva la técnica de "*aprovechar el nueve*", restando una cierta cantidad conveniente a ambos términos de la sustracción.

Al cabo de las tres clases anteriores de esta 1ª etapa, se puede aplicar una evaluación parcial referida a los tópicos trabajados en ella, en la 1ª hora, y efectuar una revisión de ella en la 2ª hora (Ver propuesta de prueba parcial más adelante).

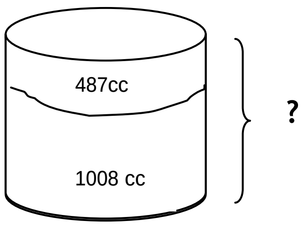
…..…SEGUNDA ETAPA

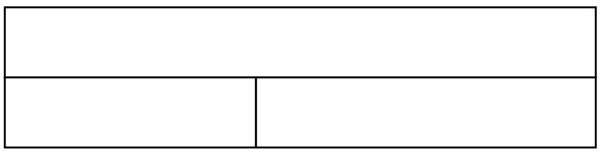
En esta etapa se pretende que niñas y niños activen los conocimientos que aprendieron años anteriores para resolver problemas aditivos **inversos** de composición, cambio y comparación en los que es necesario calcular sumas y restas.

Los problemas **inversos** son aquellos en cuyo enunciado se sugiere una determinada operación, pero para encontrar la respuesta a la pregunta planteada hay que hacer la operación inversa. En estos problemas en los que la identificación de las operaciones que los resuelven no es inmediata, hay que hacer un trabajo específico para establecer un modelo matemático. En estos casos el uso de *esquemas* resulta muy provechoso. Un ejemplo con números naturales es el siguiente:

En un experimento para determinar la rapidez con que el agua se pierde por evaporación bajo ciertas condiciones, se expuso a una cierta temperatura un envase de vidrio con una cierta cantidad de agua en su interior. Al cabo de 24 horas se midió, tanto el volumen de agua evaporada como la que quedó en el balde, resultando 487cc y 1008cc, respectivamente. ¿Qué cantidad de agua se colocó inicialmente en el envase?

Esquemas posibles son:





Pese a que la acción que señala el problema en su enunciado es de evaporación (pérdida), la operación requerida para solucionarlo es una suma, ya que no se conoce el estado inicial, pero sí son datos el estado final y el efecto de la transformación.

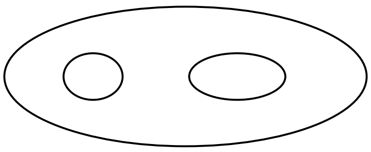
Por lo tanto, la cantidad de agua inicial es de 1008cc + 487cc =1495 cm^3

El profesor o profesora plantea a sus alumnos un problema que implica la búsqueda de uno de los sumandos cuando se conocen el total y el otro sumando.

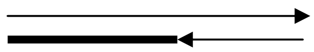
Carlos compró una oferta que incluía dos productos. Afuera del envase decía: Peso total 2,005 kg. Al examinarlos comprobó que uno de ellos traía una etiqueta que señalaba: 1,077 kg. El otro producto venía sin la etiqueta. Si desea conocer el peso del otro producto, ¿cómo puede saberlo?

Les pide que expliquen cómo reconocieron la operación que resuelve el problema. Aquí los niños podrían proponer explicaciones basadas en los esquemas que producen:

Nuevamente es propicio conversar acerca de la pertinencia y utilidad de los esquemas. Algunos de los esquemas que pueden surgir:



2,005 kg	
1,077 kg	?

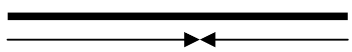


Detectar si hay alumnos que sumaron las dos cantidades, ya que en ese caso sería necesario abrir unespacio para que discutan o alguno de ellos explique por qué efectuó una resta, apoyándose en un esquema.

Para continuar, el profesor (a) puede plantear el siguiente problema, que corresponde a uno inverso de cambio:

> *Rodrigo tenía un cordel para jugar a saltar. Le convidó 1,48 m a su amigo Eduardo, con lo cual le quedaron 1,86 m para él. ¿Qué longitud tenía el cordel de Rodrigo antes de cortarlo?*

En este problema no se conoce el estado inicial, pero sí se sabe la transformación (convidó 1,48 m) y el estado final (le quedaron 1,86 m). Un esquema posible de usar es:



?	
1,48 m	1,86 m

Otro problema que es una modificación del anterior:

> *Tenía un cordel de 2,75 m de largo. Regalé un trozo a una amiga y me quedé con 1,74 m. ¿De qué longitud fue el trozo que regalé?*

En este problema se conoce el estado inicial (2,75 m) y el estado final (le quedaron 1,74 m). Se pregunta por el cambio o transformación.

Un esquema posible de usar es:

2,35	
?	1,74 m

En estos problemas, niñas y niños se verán en la necesidad de efectuar sumas o restas con reserva, y para ello recurren a aquella técnica que sea más eficiente en cada caso, según lo estudiado en la etapa anterior

2,005 - 1,077 en el primer problema
1,46 + 1,84 en el segundo,
2,35 – 1,74 en el último

Cuando el profesor(a) observe que la mayoría ya encontró la solución de los dos problemas, se puede realizar una puesta en común, registrando en la pizarra los diferentes métodos. Detectar el uso de esquemas a través de preguntas tales como: ¿alguno de ustedes hizo algún dibujo para solucionar el problema? o bien, ¿cómo podrían representar esta situación mediante un dibujo o esquema? Pedirles que compartan los procedimientos empleados para calcular las sumas o restas. La clase continúa su desarrollo con la proposición del profesor o profesora de una actividad que consiste en trabajar en parejas con la **Ficha 4**. Se recomienda revisar las respuestas de los estudiantes en la pizarra, poniendo especial atención al uso de esquemas y a la efectividad de los procedimientos empleados.

La etapa continúa con la resolución de problemas aditivos simples **inversos** con números decimales de comparación. El profesor o profesora les propone una actividad que consiste en contrastar tres problemas (de comparación), en términos de los datos, incógnitas y esquemas:

Problema 1: María mide 1,76 m de estatura y José 1,68 m. ¿Cuánto más mide María que José?

Problema 2: Carla mide 0,35 m más que Mauricio, el cual mide 1,59 m. ¿Cuál es la estatura de Carla?

Problema 3: Eliana mide 0,26 m más que Patricio. Ella mide 1,74 m. ¿Cuál es la estatura de Patricio?

Una vez resueltos, resumen en la pizarra las semejanzas y diferencias de estos tres problemas. Luego, les pide desarrollar la **Ficha 5.** Cuando el profesor observe que la mayoría ya encontró la solución de los problemas planteados en la ficha, puede realizar una puesta en común, registrando en la pizarra los diferentes métodos, con el fin de realizar una comparación entre los métodos y técnicas empleados.

Cierre de la etapa 2

En este momento de cierre se sistematizan los conocimientos que aparecieron en la etapa, preguntando a niñas y niños cómo identificaron las operaciones que había que hacer para resolver los problemas y qué operaciones utilizaron para resolverlos. Se les pregunta cómo son los problemas que han estudiado en la clase y se les pide que den un ejemplo.

Se espera que niños y niñas digan, en sus palabras, que:

- Hay ciertos problemas en los cuales la operación sugerida por la acción presentada en el enunciado no corresponde con la operación que es necesario efectuar para resolverlo.
- En los problemas en que se mencionan dos medidas y su diferencia, la operación sugerida por la acción presentada en el enunciado puede no corresponder con la operación que es necesario efectuar para resolverlo.
- En estos casos es conveniente hacer un esquema que exprese gráficamente la relación entre datos e incógnita.
- El uso de un esquema permite, en muchas ocasiones, encontrar la operación correcta que permite resolver el problema.

……..TERCERA ETAPA

Problemas Combinados

Estos problemas son aquellos en los que, para su modelización, se requiere utilizar una combinación ya sea de adiciones, de sustracciones o de una mezcla de adiciones y sustracciones. Generalmente, el enunciado es más extenso, hay una mayor cantidad de datos.

Así como en los problemas simples se pueden encontrar directos e inversos, en los problemas combinados también podemos encontrar inversos. Estos problemas reúnen dos factores de complejidad: ser combinados e inversos, por lo cual requerirán de un trabajo especial para comprender el problema y establecer correctamente la relación entre datos e incógnitas.

Dado que en el campo aditivo distinguimos tres categorías de problemas: de composición, cambio y comparación, los problemas pueden combinar, además, estos tipos.

La siguiente tabla muestra las diferentes posibilidades de problemas combinados, en el caso que sean dos los tipos de problemas que se combinan:

	composición	cambio	comparación
composición	A	B	C
cambio		D	E
comparación			F

Es así como podemos encontrar estos problemas combinados: composición/composición (A), composición/cambio (B), composición/comparación (C), Cambio/cambio (D), Cambio/comparación (E) y comparación/comparación (F).

La etapa comienza con el planteamiento de un problema aditivo combinado con números naturales para recordar este tipo de problemas y su respectivo esquema:

Víctor tiene 12 láminas en el bolsillo derecho del pantalón, 9 en el izquierdo y 11 en el bolsillo de su camisa. ¿Cuántas láminas tiene en total?

Luego, continúan con otro problema combinado directo con números decimales:

Rosa está desarrollando un experimento en el cual debe controlar periódicamente el peso de una planta que es sometida a diferentes condiciones de riego y luz solar. Inicialmente, la planta y su macetero pesan 1,352 kg; una semana después había aumentado en 0,103 kg, a las dos semanas aumentó en 0,211 kg, y en la tercera semana perdió 0,018 kg. ¿Cuál es el peso de la planta / macetero al cabo del experimento?

Este es un problema combinado de cambio y uno de los esquemas posibles es:

<table>
<tr><td>1,352 kg</td><td>0,103 kg</td><td>0,211 kg</td></tr>
<tr><td colspan="2">x</td><td>0,018kg</td></tr>
</table>

Luego, discuten acerca de la pertinencia del esquema y de su utilidad para plantear la relación matemática: x = 1,352 + 0,103 + 0,211 – 0,018.

La etapa avanza con la inclusión de un juego que consiste en encontrar los números que faltan en una disposición triangular.

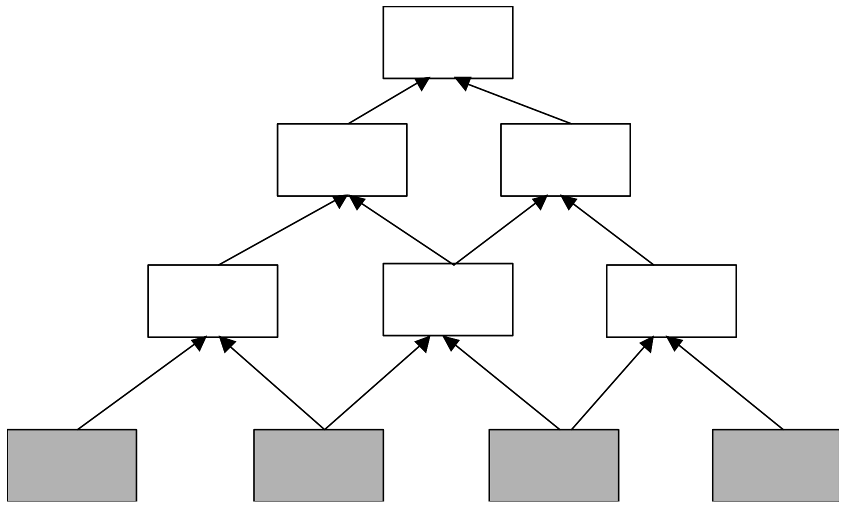
Las reglas del juego señalan que los números de cada nivel inmediatamente superior se obtienen por la suma de los dos que están conectados con el de un nivel más abajo. Para favorecer la comprensión de estas reglas se recomienda partir con un ejemplo con naturales. En los casilleros sombreados están los números que se dan inicialmente. Los números de los demás casilleros se deben buscar.

Según donde se coloquen los datos (casilleros sombreados) será el tipo de problema: directo o inverso. En esta clase se parte con los 4 datos en la base, lo que determina que sea directo.

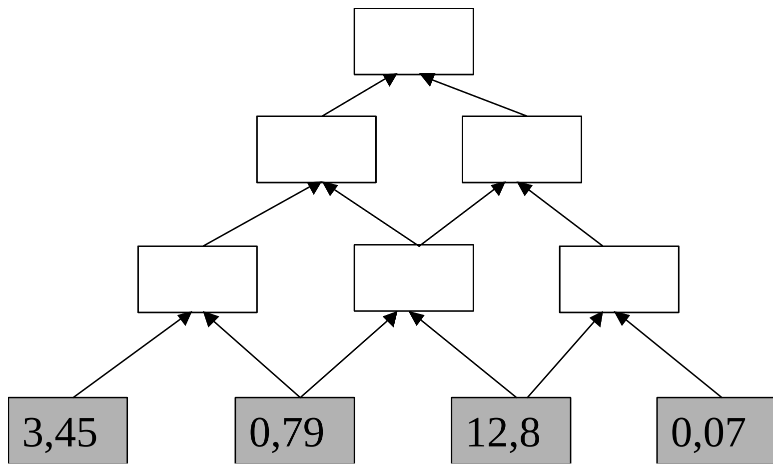
Este juego permite desarrollar con los estudiantes varios análisis, a través de preguntas:

1. ¿ En qué casilleros deberían ir los datos si solo se resuelve con sumas?
2. ¿Cuál es el mínimo número de datos para que se pueda resolver?
3. ¿En qué casilleros deberían ir los datos para que se complete con sumas y restas?
4. ¿Cuántos números se deben dar para poder resolver el desafío?
5. ¿Es posible poner los datos en algunos casilleros de tal manera que solo sea necesario efectuar restas?

Posteriormente, pueden decidir los números que ponen en los casilleros y pasarle el desafío a otro compañero o compañera para que lo resuelva.



Una vez que hayan comprendido la dinámica del juego, se les puede plantear otro como el siguiente, con números decimales:



También se les puede dar una plantilla en blanco y que, en parejas, coloquen los datos (números decimales). Luego, intercambian con otra pareja y lo resuelven.

La profesora o profesor pide que trabajen en parejas la **Ficha 6**, donde encontrarán problemas en los que probablemente requerirán el dibujo de un esquema que les permita encontrar las operaciones necesarias para resolverlos.

Uno de los problemas planteados es:

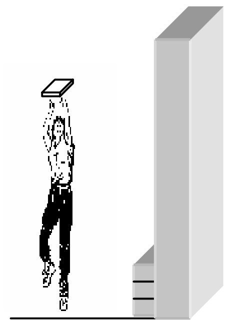
1. María está interesada en controlar su peso. Para ello se pesó en una pesa digital. En su cuaderno se encuentran las siguientes anotaciones:

Semana1	Semana2	Semana 3	Semana 4	Semana 5	Semana 6	Semana 7
Mi peso es 57,65 kg	Subí 1,07kg	Subí 0,32 kg	Bajé 0,98 kg	Bajé 1,87 kg	Subí 0,14 kg	

Una amiga le preguntó, al cabo de la semana 7, cuánto estaba pesando. Ayude a María a calcular la respuesta pedida.

Examinaremos otros ejemplos que pueden ser planteados al curso:

Cristóbal quiere colocar un libro sobre un ropero que está a 2,35 m de altura. Al estirarse y levantar el libro, solo alcanza hasta una altura de 1,71 m. Se consigue tres cajones iguales y los apila para subirse en ellos. Si cada cajón tiene una altura de 0,119 m, ¿alcanza a colocar el libro en la repisa?, ¿cuánto le falta o le sobra?



El estado inicial corresponde a la altura de Cristóbal (1,71 m), luego él realiza la acción de colocar tres cajones, los cuales aportan un aumento de (0,119 + 0,119 + 0,119)m . Con esto, Cristóbal llega a la altura de 2,067 m, es decir, no alcanza a dejar el libro arriba del ropero.
Le faltan: 2,350m – 2,067m = 0,283m.

Según el análisis anterior, fue necesario buscar una diferencia. El problema es combinado, porque implica efectuar varias adiciones y una resta. Desde otra perspectiva, es un problema de composición y de comparación (región **C** de la tabla anterior).

En este otro ejemplo tenemos un problema combinado de adición/sustracción y corresponde a los tipos de composición/cambio (región **B** de la tabla anterior).

Un niño es enviado a la panadería a comprar marraquetas y hallullas. La cajera, al colocar las bolsas en la balanza, comprobó que las marraquetas pesaban 0.890 kg y las hallullas 1,150 kg. En el trayecto a su casa, el niño se comió dos panes (100 g cada uno). ¿Cuánto pesaba el pan con el que llegó a su casa?

<table>
<tr><td>O,890 kg</td><td colspan="2">1,150 kg</td></tr>
<tr><td colspan="2">x</td><td>0,200 kg</td></tr>
</table>

La etapa entra en otra fase con el estudio de problemas combinados inversos. El profesor o profesora puede proponerle al alumnado que resuelvan la siguiente situación:

Considerando los datos de esta 1ª tabla, completar la 2ª :

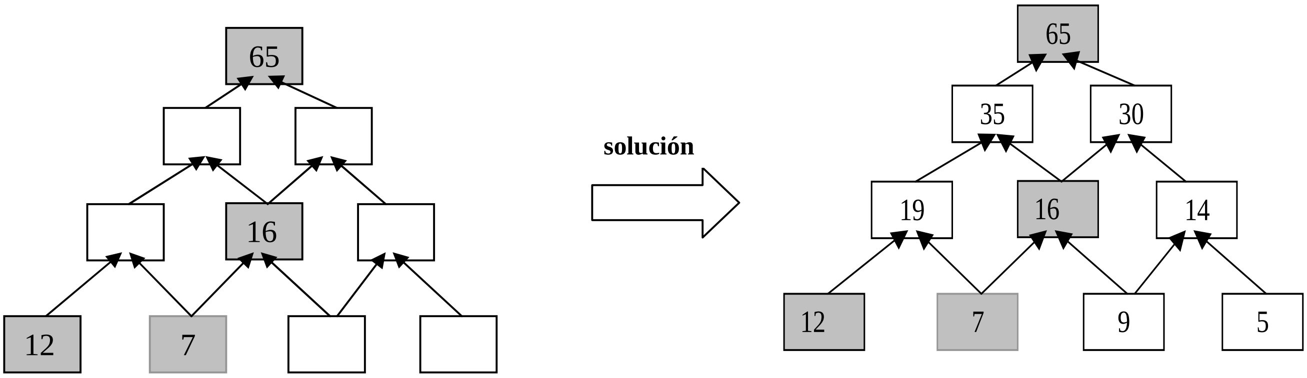
Valor de una moneda ($)	Diámetro (cm)
500	2,6
100 antigua	2,7
100 nueva	2,35
10	2,1
1	1,55

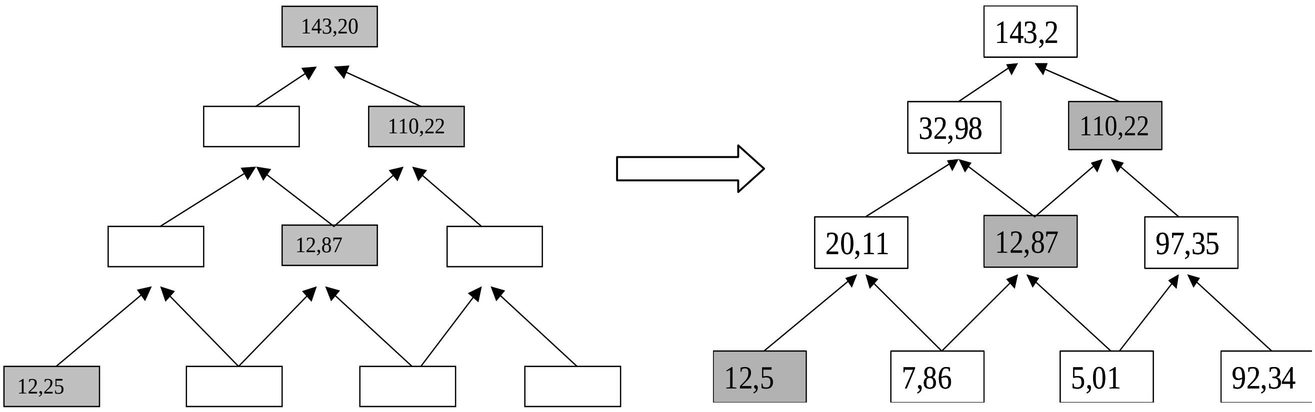
Ahora, al poner tres monedas alineadas se obtuvo una longitud de 7,4 cm. Encuentre la o las monedas que faltan, según los datos dados en la tabla siguiente:

Longitud total	Valor de la 1ª moneda	Valor de la 2ª moneda	Valor de la 3ª moneda
7,4	$10	¿?	$100 antigua
6,25	$1	$10	¿?
6	¿?	$10	¿?

Se les puede recordar que en la etapa II resolvieron un problema “Al colocar, alineadas y yuxtapuestas, estas 5 monedas, ¿qué longitud abarcan en total?”

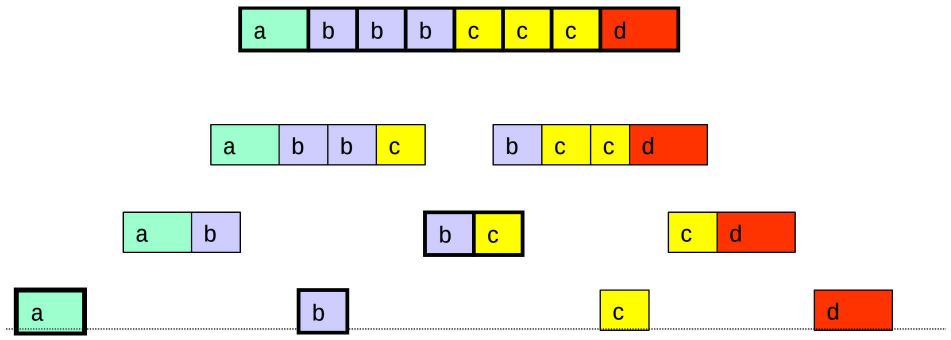
Con el juego numérico también se puede introducir el tema de los problemas combinados **inversos**, colocando convenientemente los datos, como en el caso siguiente, en que se parte analizando con números naturales, para continuar con números decimales:



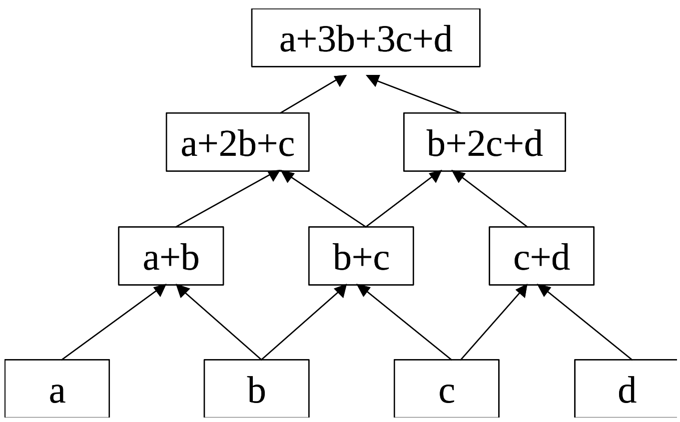


Preguntarse por el aporte de los esquemas en este tipo de problemas puede resultar muy provechoso:

¿Los esquemas vistos servirían para resolver este problema desde otra perspectiva? ¿Qué de nuevo aporta un esquema?
Veamos:



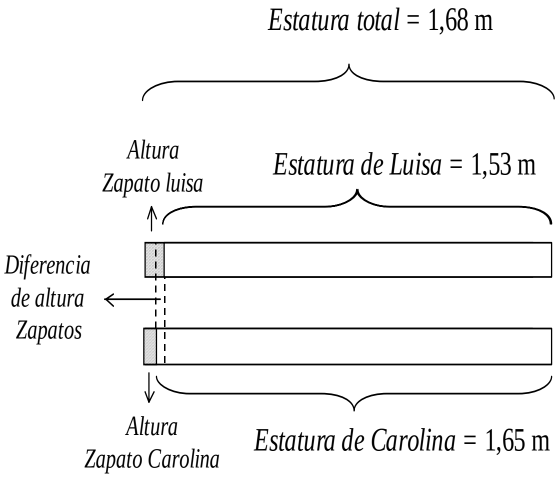
Se deduce del esquema que, conociendo a, b, (b + c) y el total superior, se puede deducir el valor de d, sin necesidad de calcular los otros valores de las cajas vacías. Es decir, el esquema entrega más información que la simple estructura triangular de los números. Este problema se podría trabajar con álgebra en otros niveles, o con los alumnos más aventajados, ya que las expresiones que señalan el valor de cada casillero son:



Otro ejemplo que ilustra la potencia de los esquemas:

Ej.: Carolina y Luisa van a comprarse zapatos. A Luisa le gusta usar zapatos con taco para verse más alta, mientras que Carolina prefiere usar zapatos sin taco para andar más cómoda. Al probarse los zapatos se dan cuenta que con ellos puestos ambas miden 1,68 m. Sabiendo que Carolina mide en realidad 1,65 m y Luisa 1,53 m, ¿qué diferencia de altura hay entre los zapatos que escogieron?

Un esquema para este problema sería



Alt. Zap. Luisa = *Est. Tot* – *Est. Luisa*
Alt. Zap. Luisa = 1,68 m - 1,53 m = 0,15 m

Alt. Zap. Carolina = *Est. Tot* – *Est. Carolina*
Alt. Zap. Carolina = 1,68 m - 1,65 m = 0,03 m

Dif. Alt. Zapatos = *Alt. Zap. Luisa* – *Alt. Zap. Carolina*
Dif. Alt. Zapatos = 0,15 m - 0,03 m = 0,12 m

Como se puede apreciar, este problema requiere de, por lo menos, dos acciones para su modelización. La primera acción relacionada con el cambio que involucra a tres variables (altura con zapatos, altura del zapato y altura sin zapatos) y la segunda con la comparación entre la altura de Luisa y la de Carolina.

Nótese que, apoyándose en el esquema, es posible deducir que la diferencia de altura entre zapatos es también la diferencia de altura entre Carolina y Luisa. De ese modo, la resolución del problema podría abreviarse de la forma siguiente:

Dif. Alt. Zapatos = Dif. Estatura = Est. Carolina - Est. Luisa

Para continuar, la profesora planteará un trabajo en pequeños grupos con la Ficha 7, la cual una vez trabajada por los estudiantes, se sugiere corregir en una puesta en común, promoviendo la discusión entre compañeras y compañeros.

Cierre de la etapa:

- Los problemas combinados son aquellos en los que, para ser resueltos, se requiere utilizar una combinación de operaciones, ya sea de adiciones, de sustracciones o de una mezcla de adiciones y sustracciones. Generalmente, el enunciado es más extenso, hay una mayor cantidad de datos.
- Así como en los problemas simples se pueden encontrar directos e inversos, en los problemas combinados también podemos encontrar inversos.
- Estos problemas reúnen dos factores de complejidad: ser combinados e inversos, por lo cual requerirán de un trabajo especial para comprender el problema y establecer correctamente la relación entre datos e incógnitas.
- Dado que en el campo aditivo distinguimos tres categorías de problemas: de composición, cambio y comparación, los problemas pueden combinar además estos tipos: por ejemplo, de composición / cambio o cambio / comparación, etc.
- Los esquemas son un soporte visual muy importante en el momento de resolver los problemas combinados, ya que permiten obtener información acerca de la relación entre datos e incógnitas.

IV

PLANES DE ETAPA

Clase 1. Tareas matemáticas: resuelven problemas aditivos simples y directos con números decimales de los tipos: composición y cambio. Calculan sumas de números decimales. Emplean la **Ficha 1**.

El profesor (a) plantea a los alumnos una actividad de resolución de problemas que impliquen la suma sin reserva de dos medidas y se les pide que la resuelvan en parejas por dos métodos diferentes. Por ejemplo: *Jorge fue a la feria y compró papas y naranjas. Las naranjas pesaron 2,34 kg y las papas, 5,12 kg. ¿Cuánto pesó la compra de Jorge?* Cuando el profesor observe que la mayoría ya encontró la solución por dos caminos distintos, se puede realizar una puesta en común, registrando en la pizarra los diferentes métodos. Detectar el uso de esquemas a través de preguntas tales como: ¿alguno de ustedes hizo algún dibujo para solucionar el problema? o bien, ¿cómo podrían representar esta situación mediante un dibujo o esquema? Pedirles que compartan los procedimientos empleados para calcular la suma y revisar la descomposición canónica en fracciones decimales y números decimales como una manera de justificar la técnica de encolumnar los números. Discutir el "costo" de tiempo que implica cada una de ellas. Avanzar con otro problema similar en que la suma sea con reserva y realizar los mismos análisis del problema anterior, es decir, uso de esquema y técnicas. En este caso será necesario justificar el sentido de la reserva. ¿Cómo adaptar la técnica utilizada para encolumnar posiciones en los naturales para los decimales? Dicha pregunta debe ser formulada una vez que los alumnos tengan claridad que para realizar una suma hay que ubicar los dígitos de los sumandos por columnas, de tal forma que cada columna corresponda a un único valor posicional. También se pueden realizar las sumas parciales por posiciones. Este procedimiento evita la escritura "desarrollada" de las descomposiciones canónicas.

Existe la opción de emplear la propiedad del "trasvasije": la suma no se altera si a uno de los sumandos se le resta una cierta cantidad que se le suma al otro, sin embargo, esta técnica es más compleja con decimales que con naturales. En otras sumas, puede presentarse que ambos sumandos tienen distinta cantidad de cifras decimales. *Ej.: 3,25 + 2,7689,* en este caso justificar la colocación de ceros en las posiciones adecuadas para igualar la cantidad de cifras decimales.

La clase continúa su desarrollo con la proposición del profesor o profesora de una actividad en parejas, que consiste en trabajar la **Ficha 1,** que propone diversos problemas aditivos que se resuelven por una suma.

Se recomienda revisar las respuestas de los estudiantes en la pizarra, poniendo especial atención a la efectividad de los procedimientos empleados y haciendo un cierre con las ideas más importantes que se trabajaron.

Cierre de la clase 1

- Las sumas de números decimales se pueden calcular de distintas formas, pero el procedimiento de encolumnar resulta bastante efectivo.
- La descomposición canónica decimal o en fracciones decimales de los sumandos, permite justificar algoritmos más breves.
- La técnica del trasvasije en algunos casos puede ser muy directa.
- Los esquemas permiten visualizar la relación cuantitativa que existe entre datos e incógnita. Los hay de diversos tipos, unos más efectivos que otros.

Clase 2. *Tareas matemáticas: resue*lven problemas aditivos simples y directos con números decimales de *los tipos:* composición, cambio *y comparación.* Calculan *restas* de números decimales. Explican los métodos usados para realizar los cálculos y resolver los problemas*. Emplean la* **Ficha 2.**
La profesora o profesor plantea a los estudiantes la situación siguiente o una similar, para que la resuelvan en parejas y luego efectúen una puesta en común: Roberta, es una tejedora. En cierta ocasión sacó 2,31 m de hilo de un ovillo que tenía 5,72 metros. ¿Cuánto hilo quedó en el ovillo? Cuando el profesor observe que la mayoría ya encontró la solución por dos caminos distintos, se puede realizar una puesta en común, registrando en la pizarra los diferentes métodos. Detectar el uso de esquemas a través de preguntas tales como: ¿alguno de ustedes hizo algún dibujo para solucionar el problema? o bien, ¿cómo podrían representar esta situación mediante un dibujo o esquema? Pedirles que compartan los procedimientos empleados para calcular la resta y revisar la descomposición canónica en fracciones decimales y números decimales como una manera de justificar la técnica de encolumnar los números. Avanzar con otro problema similar en que la resta sea **con reserva** y realizar los mismos análisis del problema anterior, es decir, uso de esquema y técnicas. En este caso será necesario justificar el sentido de la reserva. En el caso de números decimales, por ejemplo, para calcular la diferencia: 2,48 – 1,59 podemos transformarla en 2,00 – 2,89 (agregando 0,41 a cada término) lo que da 0,89. Es la técnica del *traslado de la diferencia* que se apoya en la propiedad fundamental de la conservación de la cantidad en una resta. Gráficamente equivale a trasladar la resta en la recta numérica hacia la derecha, si es que hemos sumado la misma cantidad a ambos números. Este procedimiento evita la escritura "desarrollada" de las descomposiciones canónicas. En el caso que el minuendo tenga ceros, existe la técnica "aprovechando el 9". Para seguir desarrollando la clase 2, el docente propone una actividad que consiste en trabajar en parejas la **Ficha 2**, en la que se proponen variados problemas aditivos directos, tanto de composición, cambio y comparación, que se resuelven por medio de una **resta**. **Cierre de la clase 2** •Para las restas, en ocasiones resulta conveniente utilizar técnicas basadas en traslado de la diferencia. • La descomposición canónica de los números decimales en fracciones decimales o números decimales resulta muy laboriosa, sin embargo, permite justificar otros procedimientos más breves. •En el caso de una resta con minuendo con muchos ceros, puede resultar efectiva la técnica de "aprovechar el nueve", restando una cierta cantidad conveniente a ambos términos de la sustracción.

Clase 3. Tareas matemáticas: resuelven problemas aditivos simples y directos con números decimales de todos los tipos: composición, cambio y comparación. Calculan sumas y restas de números decimales. *Explican los métodos usados para realizar los cálculos y resolver los problemas*. Emplean la **Ficha 3**.
La etapa culmina con la resolución de problemas variados, en que los estudiantes ponen en práctica los conocimientos adquiridos a lo largo de esta 1ª etapa. Se recomienda trabajar la **Ficha 3** en pequeños grupos y luego realizar una puesta en común. **Cierre de la clase 3** Se espera que niños y niñas digan, en sus palabras, que los problemas aditivos simples: •Son problemas en que hay que realizar una operación para resolverlos, ya sea sumas o restas. •Los esquemas son una herramienta útil para identificar las operaciones que los resuelven. ▪ Hay diversos tipos de esquemas y, en algunos, es más evidente la relación que existe entre datos e incógnita.
Clase 4: Aplicación de una prueba parcial de la Etapa I durante la 1ª hora de clases, y luego realizar su corrección en la pizarra, aprovechando de discutir acerca de los esquemas empleados, si fueron necesarios o no lo fueron; de los procedimientos posibles de emplear y su costo en tiempo. Según el resultado obtenido en esta prueba, el profesor o profesora decidirá si pasa a la etapa II o vuelve a retomar aquellos puntos de la etapa I en que sus alumnos no muestren un dominio aceptable.

Clase 5. Tareas matemáticas: resuelven problemas aditivos simples **inversos** con números decimales de los tipos: composición y cambio. Calculan sumas y restas de números decimales. Explican los métodos usados para realizar los cálculos y resolver los problemas. Emplean la **Ficha 4**.

El profesor(a) plantea una actividad de resolución de problemas que introduzca los problemas inversos, por ejemplo:

a) Carlos compró una oferta que incluía dos productos. Afuera del envase decía: Peso total 2,005 kg. Al examinarlos comprobó que uno de ellos traía una etiqueta que señalaba: 1,077 kg. El otro producto venía sin la etiqueta. Si desea conocer el peso del otro producto, ¿cómo puede saberlo?

b) Rodrigo tenía un cordel para jugar a saltar. Le convidó 1,48 m a su amigo Eduardo, con lo cual le quedaron 1,86 m para él. ¿Qué longitud tenía el cordel de Rodrigo antes de cortarlo? Cuando observe que la mayoría ya encontró la solución de los dos problemas, se puede realizar una puesta en común, registrando en la pizarra los diferentes métodos. Detectar el uso de esquemas a través de preguntas tales como: ¿alguno de ustedes hizo algún dibujo para solucionar el problema? o bien, ¿cómo podrían representar esta situación mediante un dibujo o esquema? Pedirles que compartan los procedimientos empleados para calcular las sumas o restas. La clase continúa con la proposición del docente de una actividad que consiste en trabajar en parejas con la **Ficha 4**. Se recomienda revisar las respuestas de los estudiantes en la pizarra, poniendo especial atención al uso de esquemas y a la efectividad de los procedimientos empleados.

Cierre de la clase 5

- Hay ciertos problemas en los cuales la operación sugerida por la acción presentada en el enunciado no corresponde con la operación que es necesario efectuar para resolverlo.
- En estos casos es conveniente hacer un esquema que exprese gráficamente la relación entre datos e incógnita.
- El uso de un esquema permite en muchas ocasiones encontrar la operación correcta que permite resolver el problema.

Clase 6. Tareas matemáticas: resuelven problemas aditivos simples **inversos** con números decimales de comparación. Calculan sumas y restas de números decimales. Explican los métodos usados para realizar los cálculos y resolver los problemas. Uso de esquemas en aquellos casos en que sea necesario para distinguir la relación entre datos e incógnita.

El profesor o profesora les propone una actividad que consiste en contrastar tres problemas (de comparación), en términos de los datos, incógnitas y esquemas. Problema **1**: María mide 1,76 m de estatura y José 1,68 m. ¿Cuánto más mide María que José? Problema 2: Carla mide 0,35 m más que Mauricio, el cual mide 1,59 m. ¿Cuál es la estatura de Carla? Problema 3: Eliana mide 0,26 m más que Patricio. Ella mide 1,74 m. ¿Cuál es la estatura de Patricio? Una vez resueltos, resumen en la pizarra las semejanzas y diferencias de estos tres problemas. Luego, les pide desarrollar la **Ficha 5.**

Cuando el profesor observe que la mayoría ya encontró la solución de los problemas planteados en la ficha, puede realizar una puesta en común, registrando en la pizarra los diferentes métodos, con el fin de realizar una comparación entre los métodos y técnicas empleados.

Cierre de la clase 6

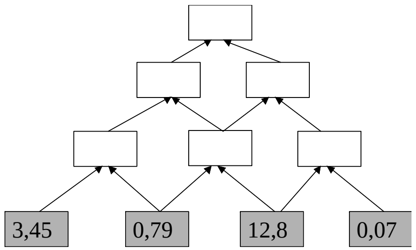
- En los problemas en que se mencionan dos medidas y su diferencia, la operación sugerida por la acción presentada en el enunciado puede no corresponder con la operación que es necesario efectuar para resolverlo.
- En estos casos es conveniente hacer un esquema que exprese gráficamente la relación entre datos e incógnita.
- El uso de un esquema permite en muchas ocasiones encontrar la operación correcta que permite resolver el problema.

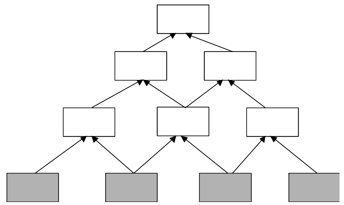
Clase 7: aplicación de una **prueba** parcial de la Etapa II durante la 1ª hora de clases, y luego realizar su corrección en la pizarra, aprovechando de discutir acerca de los esquemas empleados, si fueron necesarios o no lo fueron; de los procedimientos posibles de emplear y su costo en tiempo. Según el resultado obtenido en esta prueba, el profesor o profesora decidirá si pasa a la etapa III o bien, vuelve a retomar aquellos puntos de la etapa II en que sus alumnos no muestren dominio.

Clase 8. Tareas matemáticas: Resuelven problemas aditivos combinados-directos con números decimales, de composición, cambio y comparación. Analizan problemas aditivos y establecen semejanzas y diferencias. Explican los procedimientos usados para realizar los cálculos y resolver el problema. Elaboran problemas aditivos a partir de una situación dada. Emplean la **Ficha 6**.

La clase comienza con el planteamiento de un problema aditivo combinado directo con números naturales. Por ejemplo: Víctor tiene 12 láminas en el bolsillo derecho del pantalón, 9 en el izquierdo y 11 en el bolsillo de su camisa. ¿Cuántas láminas tiene en total? Analizan el esquema correspondiente y comparan este problema con uno simple. Luego resuelven uno con números decimales: *Rosa está desarrollando un experimento en el cual debe controlar periódicamente el peso de una planta que es sometida a diferentes condiciones de riego y luz solar. Inicialmente, la planta y su macetero pesan 1,352 k;, una semana después había aumentado en 0,103 kg, a las dos semanas aumentó en 0,211 kg, y en la tercera semana perdió 0,018 kg. ¿Cuál es el peso de la planta / macetero al cabo del experimento?* Se sugiere analizar este problema en términos del número de datos.

La etapa avanza con la inclusión de un **juego numérico** que consiste en una competencia de quién encuentra primero los números que faltan en una disposición triangular. Se puede partir con números naturales y seguir con decimales. Según dónde se coloquen los datos (casilleros sombreados), será el tipo de problema: directo o inverso. En esta clase se parte con los 4 datos en la base. A este juego se le puede sacar mucho partido a través de preguntas claves: ¿Cuántos números se deben dar para poder resolver el desafío? ¿En qué posiciones de los datos se deben efectuar solo sumas para resolverlo? ¿Es posible poner los datos en algunos casilleros de tal manera que solo sea necesario efectuar restas? Posteriormente, ellos pueden decidir los números que ponen en los casilleros y pasarle el desafío a otro compañero para que lo resuelva.





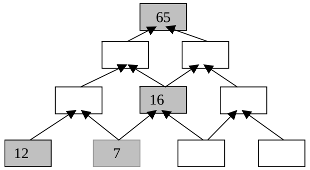
A continuación trabajan en parejas en la **Ficha 6**, donde encontrarán problemas en los que requerirán el dibujo de un esquema que les permita encontrar las operaciones necesarias para resolverlos.Se recomienda revisar las respuestas de los estudiantes en la pizarra, poniendo especial atención a la efectividad de los procedimientos empleados y haciendo un cierre con las ideas más importantes que se trabajaron.

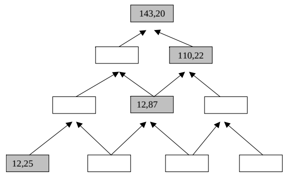
Cierre de la clase 8

- Los problemas combinados son aquellos en los que, para ser resueltos, se requiere utilizar más de una operación, ya sea adiciones, sustracciones o una mezcla de adiciones y sustracciones. Generalmente, el enunciado es más extenso, hay una mayor cantidad de datos.
- Dado que en el campo aditivo distinguimos tres categorías de problemas: de composición, cambio y comparación, los problemas pueden combinar además estos tipos: por ejemplo, de composición / cambio o cambio / comparación, etc.
- Los esquemas son un soporte visual muy importante en el momento de resolver los problemas combinados, ya que permiten obtener información acerca de la relación entre datos e incógnitas.

Clase 9. Resuelven problemas aditivos combinados con números decimales: inversos, de composición, cambio y comparación.
Analizan problemas aditivos y establecen semejanzas y diferencias. Explican los procedimientos usados para realizar los cálculos y resolver el problema. Calculan productos del tipo 10^n x decimal.

El profesor o profesora propone retomar el juego numérico, con la variación de colocar ahora los datos en otras posiciones, lo que obliga, según el dibujo triangular, a efectuar adiciones y sustracciones. Este juego puede emplearse para profundizar el análisis de los esquemas y por el aporte que hace a la obtención de la solución (ver estrategia didáctica). Cada docente debe decidir hasta donde lleva estos análisis y profundizaciones, ya que debe considerarse la situación del curso.





Para continuar, la profesora o profesor planteará un trabajo en pequeños grupos con la **Ficha 7;** una vez trabajada, se sugiere corregirla en una puesta en común, promoviendo la discusión entre compañeras y compañeros.

Cierre de la clase 9

Así como en los problemas simples se pueden encontrar directos e inversos, en los problemas combinados también podemos encontrar inversos.

Estos problemas reúnen dos factores de complejidad: ser combinados e inversos, por lo cual requerirán de un trabajo especial para comprender el problema y establecer correctamente la relación entre datos e incógnitas.

El uso de esquemas es una práctica que permite obtener información no conocida a partir de la relación visual y numérica entre datos e incógnita.

Clase 10: Aplicación de una **prueba global** de la UD durante una clase. En otra clase se sugiere realizar su corrección en la pizarra, aprovechando de discutir acerca de los esquemas empleados, si fueron necesarios o no lo fueron; de los procedimientos posibles de emplear y su costo en tiempo.

V

PRUEBAS

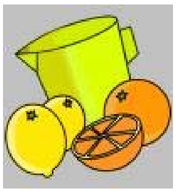
PRIMERA PRUEBA PARCIAL 6º AÑO BÁSICO
U. DIDÁCTICA PROBLEMAS ADITIVOS CON NÚMEROS DECIMALES

NOTA

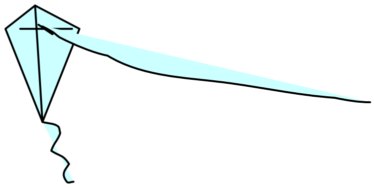
Nombre: ______________________________ Escuela: ___________________

Curso: ____________ Fecha: ____________ Puntaje: __________

1. Maribel trajo un jarro con naranjada. Contó que está compuesta por 0,45 litros de jugo que exprimió de varias naranjas y 1,05 litros de agua endulzada. ¿Qué cantidad de naranjada obtuvo?



2. Armando compró un volantín que venía con un hilo de 25 m. Luego de comprarlo, decidió agregarle el resto de hilo que tenía de un volantín anterior de 38,4 m. ¿Cuál es el largo total del hilo después de que los unió?



3. Macarena tenía una cinta de 3,89 m de longitud, y cortó un pedazo de 0,75 m para hacerse un cintillo. ¿Cuánta cinta le queda?

4. Pedro es chileno y mide 1,42 m. Tiene un amigo brasileño llamado Edson que mide 1,5 m. ¿Qué diferencia de estatura hay entre ellos?

5. La mamá de Constanza le va a enseñar a tejer. Para hacer una prueba de tejido sacó 2,5 m de hilo de un ovillo que tenía 20,6 metros de hilo. ¿Cuánto hilo quedó en el ovillo?

SEGUNDA PRUEBA PARCIAL 6º AÑO BÁSICO
U. DIDÁCTICA PROBLEMAS ADITIVOS CON NÚMEROS DECIMALES

NOTA

Nombre: ______________________________ Escuela: ____________________

Curso: ____________ Fecha: ____________ Puntaje: __________

1. Rodrigo tenía un cordel para saltar. Le convidó 1,48 m a su amiga Ximena, con lo cual se quedó con 1,86 m para él. ¿Qué longitud tenía el cordel de Rodrigo antes de cortarlo?

2. Carmen compró un paquete oferta que traía dos productos. Afuera del envase decía: peso total 1,065 kg. Al abrir el paquete comprobó que uno de ellos traía una etiqueta que señalaba: 0,507 kg. El otro producto venía sin la etiqueta. ¿Cuánto pesaba el otro producto?

3. Mika mide 0,26 m más que Bruno. Ella mide 1,53 m. ¿Cuál es la estatura de Bruno?

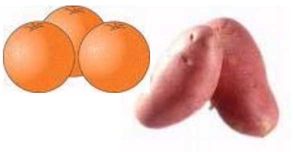
PRUEBA GLOBAL 6° AÑO BÁSICO
U. DIDÁCTICA PROBLEMAS ADITIVOS CON NÚMEROS DECIMALES

NOTA

Nombre: ________________________________Escuela:____________________

Curso: ____________ Fecha: ____________ Puntaje:__________

1. Daniel fue a la feria y compró papas y naranjas. Las naranjas pesaron 2,75 kg y las papas, 2,98 kg. ¿Cuánto pesó la compra de Daniel?



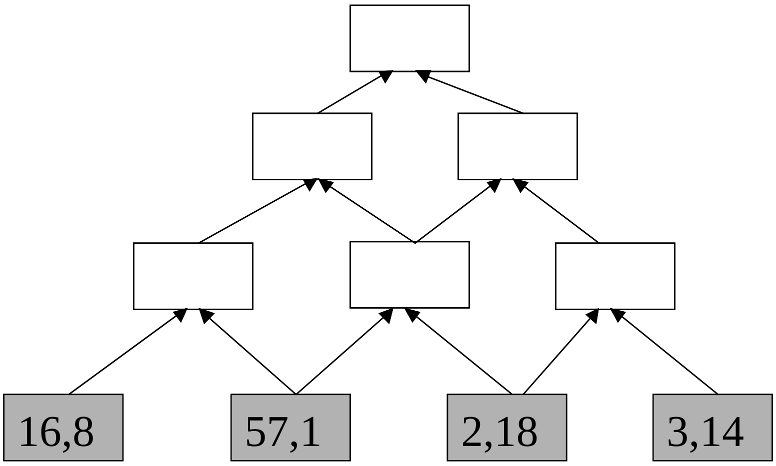
2. Pedro está interesado en controlar su peso. Para ello se pesó en una pesa digital. En su cuaderno se encuentran las siguientes anotaciones:

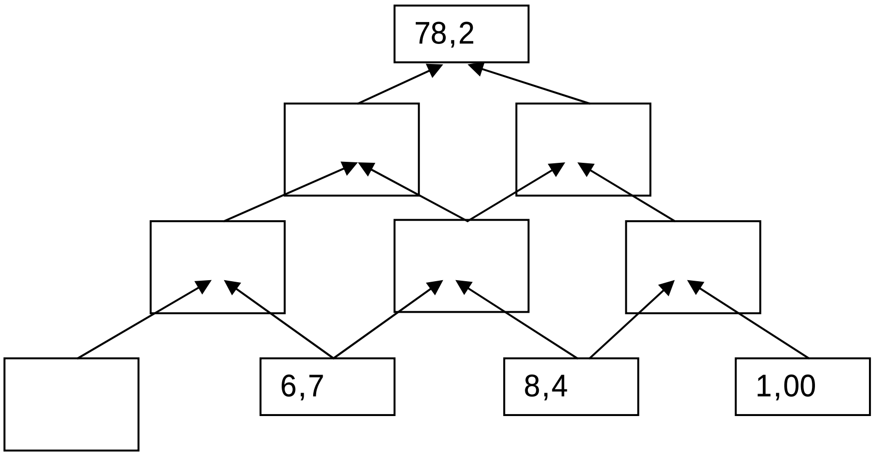
Semana 1	Semana 2	Semana 3	Semana 4	Semana 5	Semana 6	Semana 7
Mi peso es 47,58 kg	bajé 0,67kg	Subí 0,82 kg	Bajé 1,08 kg	Bajé 1,87kg	Subí 0,14 kg.	

Una amiga le preguntó, al cabo de la semana 7, cuánto estaba pesando. Ayude a Pedro a calcular lo que le preguntó su amiga.

3. Un niño es enviado a la panadería a comprar marraquetas y hallullas. La cajera, al colocar las bolsas en la balanza, comprobó que las marraquetas pesaban 1.09 kg y las hallullas 0,998 kg. En el trayecto a su casa el niño se comió un pan (100 g). ¿Cuánto pesaba el pan con el que llegó a su casa?

4. Complete los valores en los rectángulos en blanco.





5. Al comprar en un mini mercado, María echó en su canasto de compras una caja de leche (el envase indicaba: peso 0,75 kg). Luego echó dos latas de conservas (cada una pesaba 0,58 kg), más adelante echó a su canasto una bolsa con 11 panes que pesaron 1,12 kg. Al pagar en la caja decide devolver una de las latas de conserva. ¿Cuánto pesa el conjunto de productos que María se llevó a su casa?

6. Cada tarro de *lomitos de atún natural* pesa 0,184 kg. ¿Cuánto pesan 10 de esos tarros? ¿Cuánto pesan 100 de esos tarros?

7. Anota la respuesta directamente, sin aplicar el procedimiento tradicional para multiplicar números:

a	24,5 x 10 =
b	0,0075 x 1000 =
c	0,54008 x 100 =

VI ESPACIO PARA LA REFLEXIÓN PERSONAL

Busque en el momento de cierre de cada uno de los planes de clase, el o los fundamentos centrales de la unidad con el cual se corresponde:

Describa los principales aportes que le ha entregado esta unidad y la forma en que puede utilizarlos en la planificación de sus clases.

VII GLOSARIO

Ciclo de matematización	Se inicia con un problema del mundo real (o matemático), busca un modelo matemático que dé cuenta de él, luego se opera en el modelo matemático para, finalmente, volver a la situación original y resignificar la solución matemática en el contexto original del problema.
Problemas directos	Problemas sencillos en los que las relaciones matemáticas entre datos e incógnitas se deducen de forma inmediata del enunciado.(, ¿es el caso de los? eliminar lo de este paréntesis)
Problemas inversos	Problemas cuyo enunciado sugiere una determinada operación, pero para encontrar la respuesta a la pregunta planteada hay que hacer la operación inversa.
Técnica del *trasvasije*	Convertir una suma en otra equivalente, que es más fácil de calcular, para lo cual se resta cierta cantidad a uno de los sumandos y se la suma al otro sumando.
Técnica del traslado de la diferencia	Convertir una resta en otra equivalente que conserva la distancia entre minuendo y sustraendo y que es más fácil de calcular. Para ello se resta o se suma el mismo número al minuendo y al sustraendo.
Esquemas	Figuras que pretenden hacer visibles las relaciones entre datos e incógnitas y, de esta forma, deducir las operaciones buscadas.
Problemas de Composición	Problemas donde se considera un conjunto de partes y el total de ellas. En este tipo de problemas suelen aparecer las acciones de unir/separar o agrupar/desagrupar y las variables implicadas suelen ser las partes y el total.
Problemas de Cambio	Problemas donde hay una determinada cantidad inicial, luego se varía la situación inicial agregando/quitando a dicha cantidad, dando lugar a una situación final nueva. Por ello distinguimos en estos problemas un estado o situación inicial, una acción de transformación, y un estado o situación final
Problemas de Comparación por diferencia	Problemas en los que aparecen involucrados un determinado conjunto de cantidades y las respectivas diferencias entre ellas. Las preguntas típicas asociadas a este tipo de problemas son cuánto más/ cuánto menos o bien, la diferencia.

VIII

FICHAS Y MATERIALES PARA ALUMNAS Y ALUMNOS

Ficha 1	Segunda Unidad Clase 1	Sexto Básico	Nombre: ____________________ Curso: __________

1. En la oficina de correos, un cartero tiene que entregar las siguientes cajas de igual tamaño, pero de distintos pesos:

Caja A	Caja B	Caja C	Caja D	Caja E
1,23 kg	2,71 kg	3,54 kg	2,009 kg	0,846 kg

En su bolso solo le caben dos de estas cajas. Encuentre el peso que este cartero llevaría si echa en su bolso las cajas:

cajas	peso total
A y B	
A y C	
A y D	
A y E	
B y C	
B y D	
B y E	
C y D	
C y E	
D y E	

Ficha 2	Segunda Unidad Clase 2	Sexto Básico	Nombre: ____________________ Curso: __________

1. DISTANCIAS ENTRE PLANETAS DEL SISTEMA SOLAR

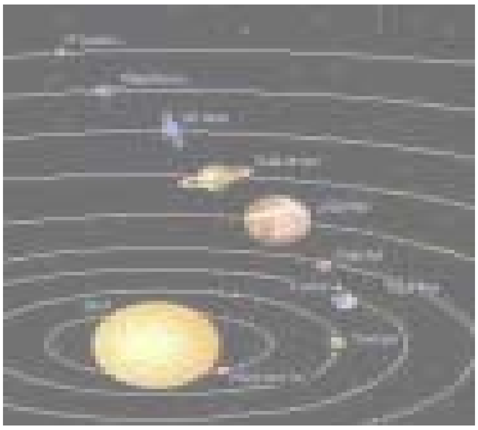
La siguiente tabla muestra las distancias entre el sol y los planetas del sistema solar expresada en Unidades Astronómicas (UA).

	Mercurio	Venus	Tierra	Marte	Júpiter	Saturno	Urano	Neptuno	Plutón
Distancia al Sol (en UA)	0,39	0,72	1,0	1,52	5,2	9,54	19,18	30,1	39,5

Se llama Unidad Astronómica (UA) a la distancia entre el Sol y la Tierra.

1 UA ≈ 150.000.000 km

(Ciento cincuenta millones de km)



- Calcule la distancia (en UA) entre planetas vecinos y anótela en la tabla.

Distancia en UA	Mercurio / Venus	Venus /Tierra	Tierra/ Marte	Marte/ Júpiter	Júpiter/ Saturno	Saturno/ Urano	Urano/ Neptuno	Neptuno/ Plutón

- ¿Cuáles planetas vecinos se encuentran más cercanos?

- ¿Cuáles planetas vecinos se encuentran más distantes?

2. **Encuesta Nacional de Salud** (2004): En ella se afirma que los chilenos y chilenas, en promedio, tienen las siguientes medidas.

	Promedio	Hombres	Mujeres
Estatura (m)	1.62	1.69	1.55
Peso (kg)	70.6	75.6	65.7
Cintura (cm)	88.3	90.7	86.2

Calcule las diferencias de peso, estatura y de cintura entre: a) mujeres y hombres, b) entre el promedio y mujeres y c) entre el promedio y hombres.

3. CONSUMO DE HELADOS EN EL MUNDO
(litros al año, por habitante) Fuente: Int. Dairy Food Ass. 2000

Nueva Zelandia	USA	Australia	Suiza	Suecia	Italia	Alemania	Chile	Francia	China
26,3	22,5	17,8	14,4	14,2	8,2	7,8	6,5	5,4	1,8

- Calcular las diferencias de consumo entre Chile y otros países.

- ¿Para qué sería importante considerar la población de cada país?

- ¿En qué afecta a una población el consumir una cantidad grande de helados?

Ficha 3	Segunda Unidad Clase 3	Sexto Básico	Nombre: ______________________ Curso: ____________

1. COMPARANDO ESTATURAS

En una escuela se realizó un control de peso y estatura a sus alumnos. Un grupo anotó en una tabla los valores obtenidos por cada uno de ellos:

NOMBRE	PESO (kilogramos)	Estatura con zapatos (metros)	Estatura sin zapatos (metros)
MARIO	68,2	1,61	1,59
CARLA	59,5	1,72	1,69
RICARDO	60,7	1,73	1,70
ESTEFANÍA	52,1	1,68	1,64

- ¿Qué compañeros tienen la mayor diferencia de estatura? ¿Cuál es esa diferencia?

- ¿Qué compañeros tienen la mayor diferencia de peso? ¿Cuál es esa diferencia?
- Si todos ellos se subieran juntos a una balanza, ¿cuánto marcaría?

- ¿Qué altura tienen los zapatos de estos cuatro amigos?

- ¿Qué altura alcanzaría Mario si se colocara los zapatos de Ricardo?

- ¿Qué altura alcanzaría Estefanía si se colocara los zapatos de Carla?

2. CONSUMO DE PAN EN CHILE

Según información de prensa, el consumo de pan a nivel nacional alcanza, en promedio, 18,3 kilos mensuales por hogar. En la Región Metropolitana esta cifra aumenta a 21,2 kilos mensuales. ¿Cuántos kilos más de pan mensual se consumen por hogar en la RM con respecto al promedio del país?

Datos curiosos: El consumo anual de pan en Chile es de 98 kilos per cápita; probablemente, se llegará a 100 kilos hacia 2010. Chile es el segundo consumidor mundial de pan, superado por Alemania donde la demanda es de 106 kilos por persona.

La palabra "compañero" se deriva del latín y alude a “la persona con que se comparte el pan".

3. EL MONTACARGAS

El montacargas de una fábrica posee una placa de advertencia que señala:

PESO MÁXIMO A TRANSPORTAR: 350 KG
En el caso que se supere este peso, el montacargas encenderá una luz roja y no se moverá.

Hay un conjunto de 10 cajas que se desea subir y cuyos pesos son:

caja	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Peso (kg)	50.3	78.2	95.8	62.4	69.3	87.4	55.9	72.2	83.8	90.1

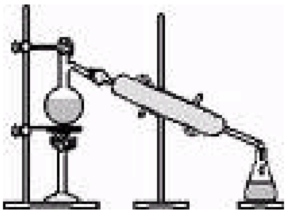
- ¿Se podría formar un grupo con **cinco** de estas cajas, que pudieran ser transportadas en **un solo viaje** por este montacargas? ¿Qué cajas formarían este grupo?
- Verifique si hay otra posibilidad de formar un grupo que cumpla con las condiciones planteadas. Justifique.

- ¿Podrían ser transportadas estas 10 cajas en dos viajes? ¿Cuáles irían en el primer viaje y cuáles en el segundo?

Ficha 4	**Segunda Unidad** **Clase 5**	**Sexto Básico**	Nombre: ____________________ Curso: ____________

1. Marta compró una caja que incluía dos champú. Afuera del envase decía: Peso total 1,205 kg. Al examinarlos comprobó que uno de los envases traía una etiqueta que señalaba: 750 g. El otro producto venía sin la etiqueta. Si desea conocer el peso del otro producto, ¿cómo podría saberlo?

2. En un experimento para determinar la rapidez con que el agua se pierde por evaporación bajo ciertas condiciones, se expuso a una cierta temperatura un envase de vidrio con una cierta cantidad de agua en su interior. Al cabo de 12 horas se midió tanto el volumen de agua evaporada como la que quedó en el balde, resultando 240cc y 1508cc respectivamente. ¿Qué cantidad de agua se colocó inicialmente en el envase?



3. Mireya tenía un cordel para jugar a saltar. Le convidó 1,09 m a su amigo Rigoberto, con lo cual le quedaron 2,16 m para ella. ¿qué longitud tenía el cordel de Mireya antes de cortarlo?

4. Loreto tenía un cordel de 2,15 m de largo. Regaló un trozo a un amigo y se quedó con 1,83 m. ¿De qué longitud fue el trozo que regaló?

Ficha 5	Segunda Unidad Clase 6	Sexto Básico	Nombre: ______________________ Curso: ___________

1. **RÉCORDS DE ATLETISMO**

ESPECIALIDAD	RÉCORD OLÍMPICO	RÉCORD MUNDIAL
Salto largo	8,90 m (B. Beamon USA)	8.95 m (M. Powel USA)
Salto alto	2,38 m (G. Avdeyenko URSS)	2.45 m (J. Sotomayor CUB)
Salto triple	17,63 m (M. Conley USA)	18.29 m (J. Edwards GBR)

¿Qué distancia separa a cada uno de estos atletas olímpicos del respectivo récord mundial?

Atleta Olímpico	Le falta (para el récord mundial)
B. Beamon	
G. Avdeyenko	
M. Conley	

- En la última Olimpiada, a un **atleta A** le faltaron 40 cm para alcanzar el récord olímpico en **salto alto**: ¿Cuánto saltó este atleta? ¿A qué distancia quedó del récord mundial?

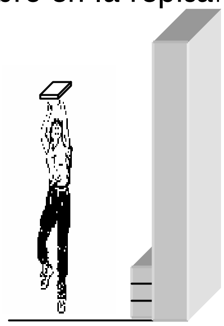
Atleta A	En salto **alto** logró	Distancia del récord **mundial**

Si un **atleta B** hubiera saltado 58 cm más, habría alcanzado el récord mundial en **salto largo**: ¿Cuánto saltó este atleta? ¿A qué distancia quedó del récord olímpico?

Atleta B	En salto **largo** logró	Distancia del récord **olímpico**

Ficha 6	Segunda Unidad Clase 8	Sexto Básico	Nombre: ______________________ Curso: ____________

1. Cristóbal quiere colocar un libro sobre un ropero que está a 2,35 m de altura. Al estirarse y levantar el libro, solo alcanza hasta una altura de 1,71 m. Se consigue tres cajones iguales y los apila para subirse en ellos. Si cada cajón tiene una altura de 0,119 m: ¿Alcanza a colocar el libro en la repisa? ¿Cuánto le falta o le sobra?



2. APORTES NUTRICIONALES DEL GERMEN DE TRIGO

La información nutricional que trae un envase de GERMEN DE TRIGO señala que una porción (30 gramos) contiene:

VITAMINAS	*Por porción*	*% DDR*
Vitamina B6	0,99 mg	50 %
Vitamina E	3,51 mg	35 %
Vitamina B3	2,94 mg	16 %
MINERALES		
Calcio	18,8 mg	9,4 %
Zinc	4,35 mg	29 %
Magnesio	78 mg	26 %
Hierro	2,55 mg	18 %

El germen de trigo es el embrión del grano de trigo. Contiene la reserva de proteínas y vitaminas para que la nueva planta inicie la germinación y tenga alimento hasta que pueda procurárselo del suelo donde implante sus raíces.

DDR es la Dosis Diaria recomendada
% DDR es el porcentaje de la dosis diaria que cubre una porción.

Si un niño come una porción de germen de trigo al desayuno

- ¿Qué cantidad de vitaminas ingiere?

- ¿Qué cantidad de minerales ingiere?

- ¿Qué cantidad de vitaminas y minerales trae una porción?

- Si un día una persona comiera tres porciones de germen de trigo, ¿qué % DDR de cada una de las vitaminas y minerales quedarían cubiertos con esta cantidad?

3. María está interesada en controlar su peso semanalmente. Para ello se pesó en una pesa digital. En su cuaderno se encuentran las siguientes anotaciones:

Semana1	Semana2	Semana 3	Semana 4	Semana 5	Semana 6	Semana 7
Mi peso es 57,65 kg	Subí 1,07kg	Subí 0,32 kg	Bajé 0,98 kg	Bajé 1,87 kg	Subí 0,14 kg	Mantuve el peso

Una amiga le preguntó, al cabo de la semana 7 cuánto estaba pesando. Ayude a María a calcular la respuesta pedida.

4. SUPERFICIE DE PAÍSES

Los seis países con más superficie son: Rusia, China, Canadá, USA, Brasil y Australia. La tabla siguiente indica el porcentaje del área total que representa cada uno de ellos:

País	% del área total mundial
Rusia	13.0
China	7.1
Canadá	7.0
USA	6.9
Brasil	6.4
Australia	5.8

¿Qué porcentaje del área mundial representan estos seis países en conjunto?

¿Qué porcentaje del área mundial representan el **resto** de los países del planeta?

5. AGUA CAÍDA

El agua caída en Santiago[1] en los años 1998 al 2002 aparece en la tabla siguiente:

Lluvias en Santiago (milímetros de agua caída)						
mes	**1998**	**1999**	**2000**	**2001**	**2002**	**Año normal**
Enero	-	0	-	-	0	0.4
Febrero	4.3	0.1	14.7	-	-	0.8
Marzo	0	19.7	-	9.9	1.7	3.2
Abril	32.7	12.9	17.6	16.1	13.6	10.4
Mayo	13.8	0.9	20.0	32.2	137.9	42.2
Junio	22.6	31.2	261.5	0.3	247.5	70.4
Julio	0.2	43.4	28.5	186.6	92.3	86.6
Agosto	0.6	109.9	0.5	50.21	74.2	51.8
Septiembre	15.1	100.1	116.5	15.8	28.3	22.0
Octubre	-	23.6	13.6	0.7	4.0	13.4
Noviembre	0	-	1.0	0	0	9.2
Diciembre	-	1.4	-	-	1.3	2.1
Total						

- ¿Cuál es el total de agua caída en un año normal?
- Cuál de estos año fue el más lluvioso en Santiago?

La precipitación es válida en horario de invierno, desde las 08:00 hrs. del día anterior hasta las 08:00 hrs. del día actual. www.meteochile.cl

[1] Síntesis Estadística de Chile 1998-2002, Banco Central de Chile. Pág. 7

6. Considere los datos de esta tabla para responder las preguntas que vienen a continuación.

valor de una moneda ($)	diámetro (mm)
$500	26
$100 antigua	27
$100 nueva	23,5
$10	21
$ 1	15,5

- Si colocamos cada una de estas cinco monedas juntas y alineadas, como muestra la figura, ¿qué longitud se alcanzaría?

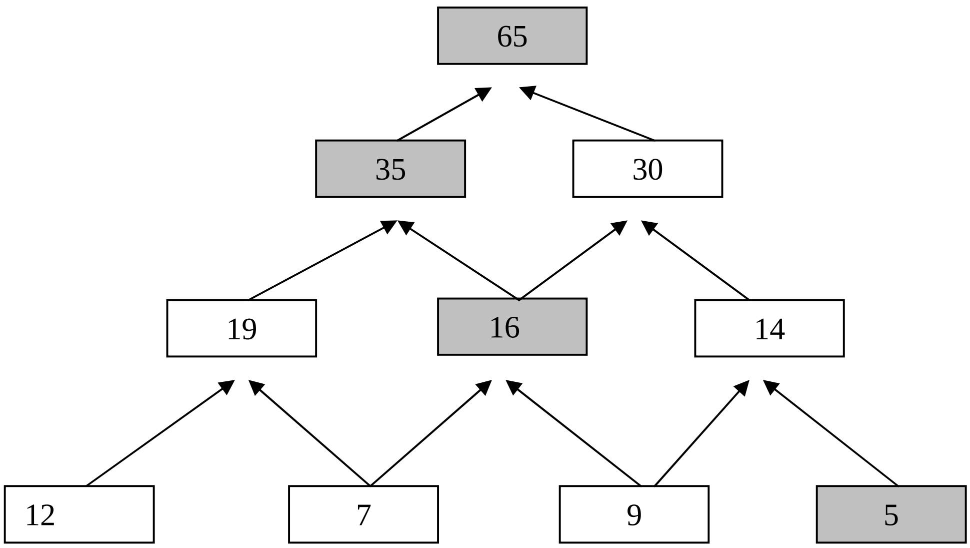
- Juega con tu compañera (o) de banco a encontrar qué combinación de 5 monedas, se acerca más a las siguientes longitudes (se pueden repetir las monedas). Las dos últimas las inventas tú.

Longitud	Moneda 1	Moneda 2	Moneda 3	Moneda 4	Moneda 5
8 cm					
9,7 cm					
10,4 cm					
12,3 cm					
13,6 cm					

Ficha 7	Segunda Unidad Clase 9	Sexto Básico	Nombre: ______________________ Curso: ____________

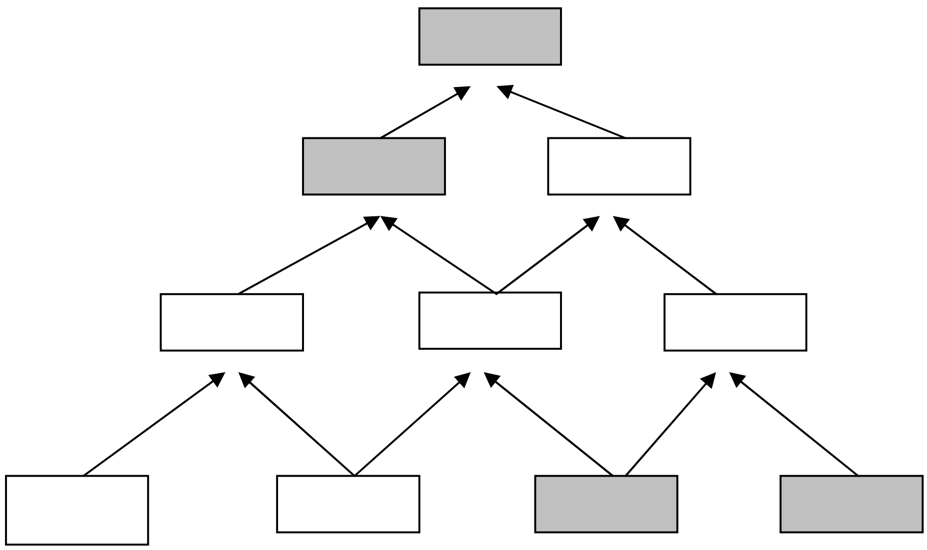
1. La señora Juanita va de compras a un mini mercado. Toma un canastillo y echa en él un trozo de zapallo, dos tarros de conserva (0,560 kg cada uno), una bolsa con lentejas (1,050 kg); luego, compra una cantidad de pan que pesó 1, 75 kg. Al sentir que llevaba mucho peso, decidió sacar uno de los tarros de conserva. Al final de su compra, puso su canastillo en una balanza y esta marcó 4 kilos exactos. La persona que atendía le señaló que los canastillos pesan 0,35 kg. Una vez en su casa, la señora Juanita quiso saber cuánto pesaba el trozo de zapallo, pero no tenía una pesa. Calcule usted el peso del zapallo.

2. Complete con los números que faltan en este esquema. Recuerde que un número de un casillero superior se forma por la suma de los dos inferiores, según indican las flechas.

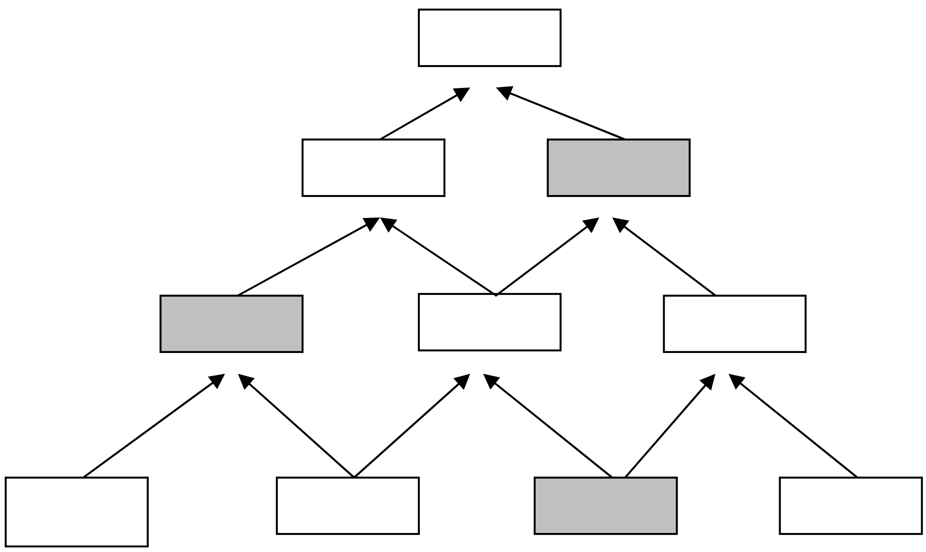


3. Invente uno de estos juegos, colocando datos numéricos decimales solo en aquellos casilleros sombreados. ¿Cómo se puede asegurar de que su juego está bien construido? Intercambie su juego con el de otro compañero(a) y resuélvalo.

a)



b)



4. Considere los datos de esta tabla para responder las preguntas que vienen a continuación.

valor de una moneda ($)	diámetro (cm)
$500	2,6
$100 antigua	2,7
$100 nueva	2,35
$10	2,1
$ 1	1,55

o

o Al poner tres monedas alineadas se obtuvo una longitud de 7,4 cm. Encuentre la moneda que falta según los datos dados en la tabla siguiente:

Longitud	Moneda 1	Moneda 2	Moneda 3
7,4	$10	¿?	$100 antigua