

Matemática
Séptimo año Básico
SEGUNDA UNIDAD DIDÁCTICA

ESTUDIANDO LOS TRIÁNGULOS A TRAVÉS DE SU CONSTRUCCIÓN CON REGLA Y COMPÁS

Coordinadora
Lorena Espinoza S.

Autores

Joaquim Barbé F. Lorena Espinoza S.
Francisco Cerda B. Fanny Waisman C.
Dinko Mitrovich G.

Colaboradora

Grecia Gálvez P.

INDICE

I	Presentación	5
II	Esquema	13
III	Orientaciones para el docente: estrategia didáctica	16
IV	Planes de clases	47
V	Pruebas	64
VI	Espacio para la reflexión personal	70
VII	Glosario	71
VIII	Fichas y materiales para alumnas y alumnos	72

SEGUNDA UNIDAD DIDÁCTICA

APRENDIZAJES ESPERADOS DEL PROGRAMA

- Caracterizan familias de pirámides y prismas rectos que se generan al hacer variar las caras de dichos cuerpos geométricos; seleccionan las figuras necesarias para construir redes de pirámides y de prismas rectos (en forma y cantidad adecuadas).
- Construyen triángulos con regla y compás, y describen verbalmente el procedimiento realizado, considerando los elementos que aseguran el cumplimiento de las condiciones que hacen posible su construcción.
- Reconocen diversos elementos de los triángulos, los relacionan con las características de éstos y los utilizan adecuadamente para clasificarlos y para la reproducción y/o creación de triángulos.
- Justifican la igualdad de las áreas y diferencia de perímetro de una familia de triángulos de base común construidos entre dos paralelas.

APRENDIZAJES ESPERADOS PARA LA UNIDAD

- Construyen triángulos con regla y compás, y describen verbalmente el procedimiento realizado.
- Reconocen elementos básicos de los triángulos, y los utilizan adecuadamente para la reproducción y/o creación de triángulos.
- Distinguen los elementos que permiten caracterizar un triángulo.
- Utilizan la construcción de triángulos para reproducir polígonos.

Aprendizajes Previos

- Miden y reproducen longitudes utilizando una regla.
- Miden y reproducen ángulos utilizando un transportador.
- Reproducen y crean figuras geométricas usando regla, compás y escuadra.
- Reconocen un triángulo como una figura geométrica formada por tres lados rectos.
- Clasifican triángulos según cantidad de lados de igual medida y según medida de los ángulos internos.

I. Presentación:

En esta Unidad se estudia la construcción de triángulos y polígonos. Los alumnos aprenderán a construir un triángulo cuando disponen solo de información relativa a algunos de sus elementos, a la vez que irán identificando el triángulo como una figura físicamente rígida, esto es, indeformable (no es posible modificar sus ángulos sin modificar la longitud de sus lados). La consecuencia de esto último es que conociendo la medida de los tres lados de un triángulo, éste se puede construir de manera única. Reconocer que la propiedad física de rigidez de los triángulos construidos con varillas articuladas en sus vértices, es fundamental, ya que permite comprender que al triangular figuras geométricas poligonales (construidas con varillas articuladas en sus vértices) se da rigidez. Además, la triangulación, es una buena técnica para reproducir polígonos. Para el estudio de esta Unidad, se utilizarán como instrumentos principales la regla y el compás, pudiendo en ocasiones disponerse también del transportador.

Esta Unidad se desarrolla a partir del contexto de la reposición de *vidrios poligonales que se han caído de vitrales*. Los alumnos se enfrentarán con el desafío de construir modelos en cartulina de los vidrios faltantes, disponiendo de distinta información en cada caso.

A continuación se detallan los aspectos didácticos matemáticos que estructuran esta Unidad.

1. Tareas matemáticas:

Las tareas matemáticas que niñas y niños realizan para lograr los aprendizajes esperados de esta Unidad son:

- Ubican el tercer vértice de un triángulo si se conoce la ubicación de los otros dos vértices y la distancia que hay entre ellos y el tercer vértice.
- Reproducen triángulos, cuadriláteros y polígonos.
- Construyen triángulos y cuadriláteros conocidos sus 3 lados y 4 lados, respectivamente.
- Construyen cuadriláteros conocidos sus 4 lados y una diagonal.
- Construyen polígonos conocidos sus lados y algunas diagonales u otros segmentos que lo triangulan.
- Construyen triángulos:
 - conocidos 2 de sus lados y el ángulo comprendido entre dichos lados.
 - conocido 1 de sus lados y los 2 ángulos que subtienden dicho lado.
 - conocidos sus tres ángulos.
 - conocidos dos de sus lados y el ángulo que se opone a uno de ellos.
- Caracterizan un triángulo.

2. Variables didácticas:

Las variables didácticas que se consideran para graduar la complejidad de las tareas matemáticas que niñas y niños realizan son:

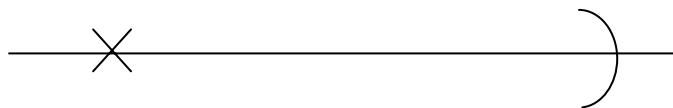
- Instrumentos disponibles: varillas articuladas, modelos en cartulina de ángulos y trazos, regla graduada, regla no graduada, transportador, escuadra y compás.

- Información que se conoce de los triángulos a construir: tres lados, dos lados y el ángulo que ellos forman, dos ángulos y el lado comprendido entre ellos, tres ángulos, dos lados y el ángulo que se opone al menor de ellos.
- Figura que se va a construir: triángulo, cuadrilátero, pentágono y hexágono.
- Disponibilidad de la figura que se pide construir: disponible, no disponible.

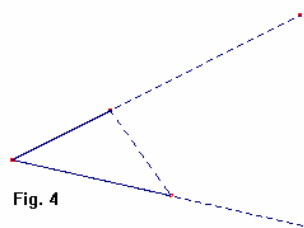
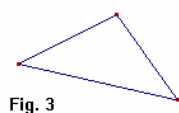
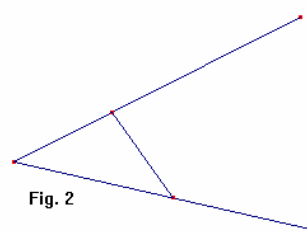
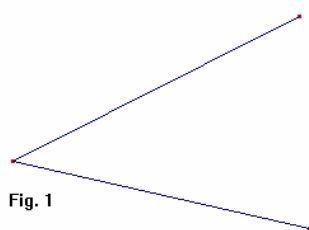
3. Procedimientos:

Los procedimientos que los niños y niñas construyen y se apropian para realizar las tareas matemáticas son:

- Para reproducir trazos, (a) Si utilizan regla graduada, miden el segmento a copiar y trasladan dicha medida a un segmento cualquiera. (b) Si utilizan regla no graduada y compás, dibujan un segmento con la regla no graduada y marcan en él un punto cualquiera (uno de los extremos del trazo reproducido) para luego, con el compás apoyado en dicho punto con una apertura igual a la longitud del trazo a reproducir, marcar el punto correspondiente al otro extremo del trazo reproducido.

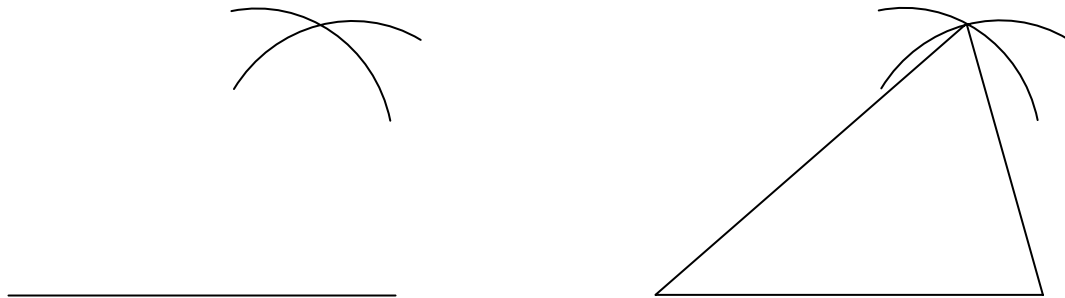


- Para reproducir ángulos, (a) Si utilizan transportador, miden el ángulo que se quiere reproducir y trasladan dicha medida. Para ello, dibujan un trazo de cualquier longitud y ubican el origen del transportador en un extremo del trazo dibujado de modo que el segmento coincida con el cero del transportador y leen la medida que corresponde según el sentido en el que se está midiendo. (b) Si utilizan regla no graduada y compás, unen dos puntos cualesquiera de los lados del ángulo de modo de formar un triángulo (Fig. 2), luego reproducen ese triángulo utilizando como información para construirlo la medida de sus tres lados (Fig. 3), finalmente extienden los lados correspondientes al ángulo en cuestión (Fig. 4).

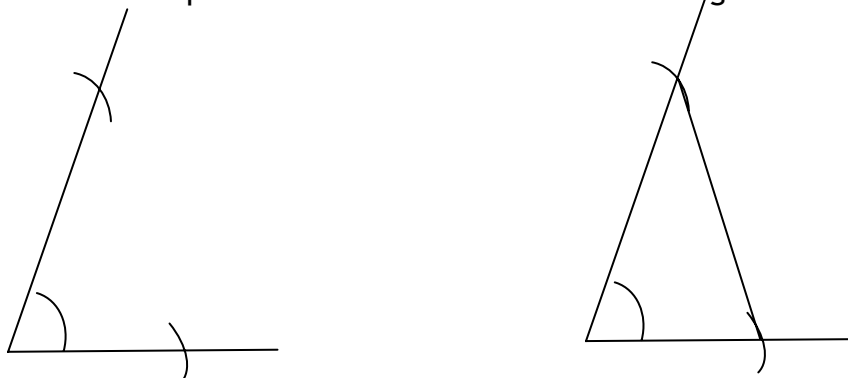


- Para reproducir un triángulo, lo construyen mediante cualquiera de los métodos de construcción descritos a continuación, dependiendo de la información que se decida utilizar:

- Para construir triángulos a partir de sus 3 lados, reproducen uno de los lados con ayuda del compás; con el compás situado en uno de los extremos de este lado, con una apertura igual a la medida de uno de los otros dos lados, dibujan un arco de circunferencia y con el compás situado en el otro extremo del lado inicialmente dibujado, con una apertura igual a la medida del tercer lado, dibujan otro arco de circunferencia; finalmente, unen el punto de intersección de los dos arcos con cada uno de los extremos del trazo inicialmente dibujado.



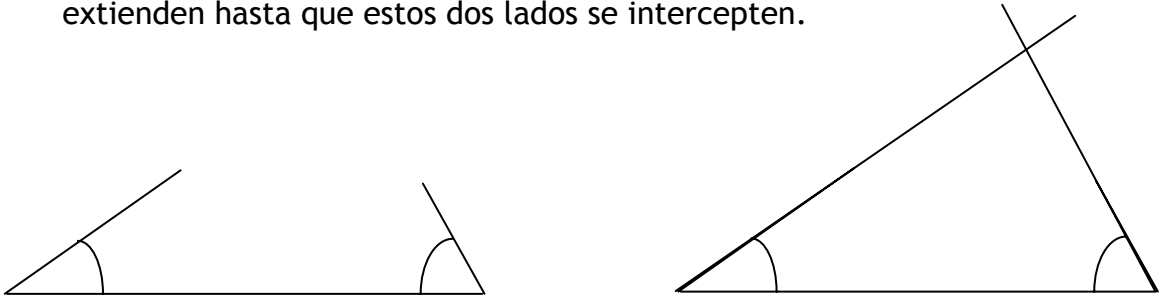
- Para construir triángulos a partir de dos lados y del ángulo comprendido entre dichos lados, construyen un ángulo con la medida dada, a continuación marcan cada uno de los lados del ángulo de acuerdo a las medidas de los dos lados conocidos (uno en cada lado) y, finalmente, unen los puntos en los que fueron marcados los lados del ángulo.



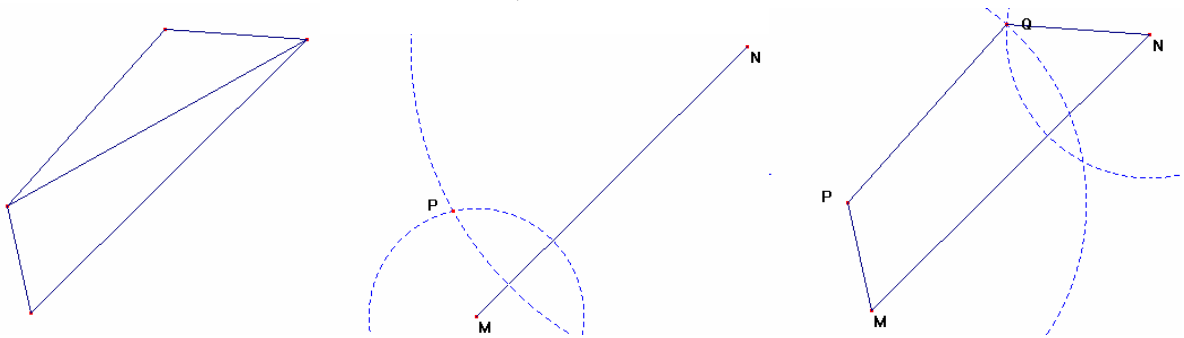
Otra opción es construir un segmento con la medida dada, luego en uno de los extremos del segmento se reproduce el ángulo y se marca el lado construido del ángulo de acuerdo a la medida del otro lado conocido, finalmente, se une el punto marcado con el extremo libre del primer segmento dibujado.



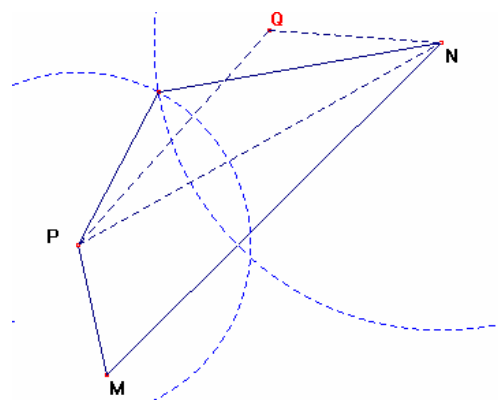
- Para construir triángulos a partir de dos ángulos y del lado comprendido entre dichos ángulos, reproducen el lado conocido y con vértice en cada uno de sus extremos reproducen los dos ángulos dados (uno en cada extremo) y los extienden hasta que estos dos lados se intercepten.



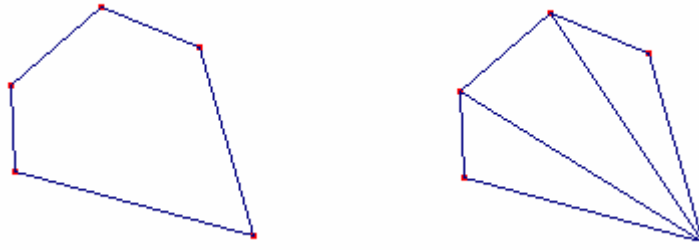
- Para construir un cuadrilátero del que se conocen los cuatro lados, el orden en que se encuentran, una de las diagonales y entre qué vértices se ubica. Construyen el triángulo formado por dos lados consecutivos y la diagonal. De esta manera se encuentran 3 de los 4 vértices del cuadrilátero. Construyen el triángulo cuyos vértices conocidos son los extremos de la diagonal y sus otros dos lados son los otros dos lados del cuadrilátero, ubicados de acuerdo al orden dado.



Para realizar la construcción se debe respetar el orden de los lados del cuadrilátero, porque en caso contrario puede construirse la reflexión del triángulo, no consiguiéndose la construcción del cuadrilátero buscado.



- Para reproducir polígonos, lo hacen mediante triangulación de las figuras (con el trazado de diagonales que no se intercepten), reproduciendo cada uno de los triángulos resultantes en la posición que corresponda. Cada triángulo lo reproducen utilizando como información sus tres lados.



4. Fundamentos centrales:

- El compás es el instrumento que permite encontrar todos los puntos que están a una distancia dada de un punto fijo.
- El tercer vértice de un triángulo se determina por la intersección de los arcos de circunferencia trazados desde los otros dos vértices, con aberturas iguales a las distancias entre los vértices conocidos y el que se quiere buscar. Si los arcos no se intersectan o se intersectan en un solo punto, no se forma triángulo. Si los arcos se intersectan en dos puntos, se forman dos triángulos iguales.
- Un triángulo queda determinado si se conocen sus tres lados. Es decir, existe un único triángulo que tiene por lados tres medidas dadas. Esta última idea se manifiesta físicamente en que los triángulos son figuras rígidas o “indeformables”, ya que no se pueden modificar sus ángulos sin modificar la longitud de sus lados.
- Un triángulo queda determinado si se conocen dos lados y el ángulo que forman dichos lados. Es decir, existe un único triángulo que tiene la medida de dos lados y del ángulo comprendido entre dichos lados, dados.
- Un triángulo queda determinado si se conocen dos de sus ángulos y el lado comprendido entre ellos. Es decir, existe un único triángulo que tiene la medida de dos ángulos y del lado comprendido entre ellos, dado.
- Cuando se reproduce un triángulo a partir de tres elementos distintos que no sean solo ángulos, se obtiene un triángulo congruente al original. Sin embargo, inicialmente el triángulo producido puede no coincidir por superposición con el original, si solo se traslada, siendo necesario reflejar el triángulo reproducido para que esto ocurra.
- El triángulo es la única figura geométrica, cuyo modelo físico construido con varillas articuladas en sus vértices, queda rígida. De aquí que para dotar de rigidez un modelo físico poligonal, se puede recurrir a la triangulación.
- Con tres segmentos no siempre es posible construir un triángulo. No es posible cuando la suma de dos lados es menor o igual que el tercero.
- Para nombrar o identificar un triángulo y sus lados se necesita convenir una forma de hacerlo. En esta unidad se utiliza la simbología ΔPQR para hacer referencia a triángulo de vértices P, Q y R, cuyos lados son los segmentos \overline{PQ} , \overline{QR} y \overline{PR} .
- Con 4 lados se pueden formar varios cuadriláteros diferentes, dependiendo del orden en que se ubiquen los lados.
- Aun conociendo el orden en que se ubican los lados, dados 4 lados, se pueden formar infinitos cuadriláteros que difieran en su forma.

- Para construir un cuadrilátero se necesita construir dos triángulos, que tienen en común un lado que corresponde a la diagonal del cuadrilátero. Para construir un pentágono se necesita construir al menos tres triángulos.
- La descomposición de los polígonos en triángulos permite construirlos o reproducirlos, porque el triángulo es una figura “indeformable”.

5. Descripción global del proceso de enseñanza y aprendizaje:

En la primera etapa se inicia el estudio de la construcción de triángulos y la caracterización de estas figuras a partir de algunos de sus elementos. En un comienzo se concentra el estudio en la búsqueda de una técnica para determinar el tercer vértice de un triángulo, confrontando las ventajas que tiene el compás respecto a la regla graduada, para realizar esta tarea.

Alumnas y alumnos caracterizarán al triángulo como la única figura rígida o indeformable, pues comprobarán que los otros polígonos pueden cambiar su forma sin modificar la longitud de sus lados.

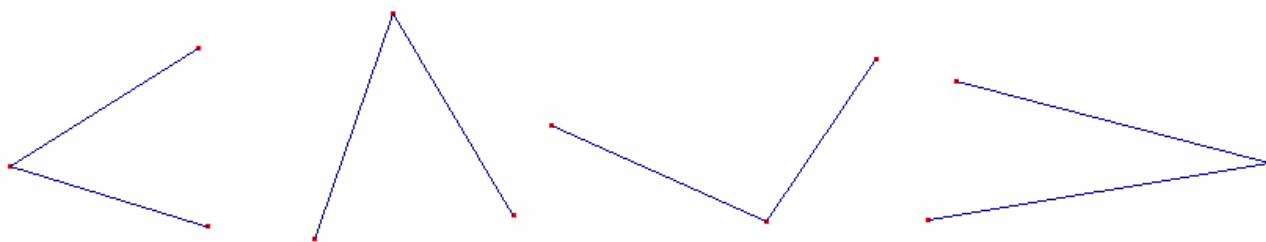
La construcción de triángulos a partir de sus tres lados, es la técnica que emplearán para reproducir polígonos. En síntesis, en esta etapa aprenderán a construir triángulos conocidos sus tres lados y a reproducir polígonos basándose en la construcción de triángulos.

En la segunda etapa se desarrolla un trabajo de construcción de triángulos con regla y compás, de los que se conocen dos lados y el ángulo que ellos forman o dos ángulos y el lado que ellos subtienden. Además, con el objetivo de reconocer que no siempre que se dispone de tres elementos de un triángulo, este queda caracterizado (determinado), se realizará también un trabajo de construcción de triángulos dados tres ángulos. Una vez que los estudiantes han desarrollado técnicas de construcción de triángulos y han reconocido que un triángulo no queda determinado con tres cualesquiera de sus elementos, se efectúa una actividad en la que piden un triángulo a su profesora o profesor, con un máximo de 3 datos, de modo que refuercen, por un lado, el hecho de que no basta con tres datos cualesquiera relativos a un triángulo para poder caracterizarlo y que reconozcan, por otro lado, que al momento de caracterizar un triángulo es necesario explicitar la relación de orden existente entre los datos dados. Este trabajo culmina pidiendo al curso que estudien las posibilidades de construcción de un triángulo del que se conocen dos lados y el ángulo que se opone al menor de los lados conocidos. Finalmente, se realiza un trabajo de consolidación de las técnicas estudiadas abordando diversos problemas vistos durante la Unidad.

6. Sugerencias para trabajar los aprendizajes previos:

Antes de dar inicio al estudio de la Unidad, es necesario realizar un trabajo sobre los aprendizajes previos. Interesa que niños y niñas activen los conocimientos necesarios para que puedan enfrentar adecuadamente la Unidad y lograr los aprendizajes esperados en ella. El profesor(a) debe asegurarse, mediante actividades como las sugeridas a continuación, que todos los niños y niñas:

- **Miden y reproducen longitudes utilizando una regla.**
El profesor(a) puede pedir que midan las dimensiones (largo, ancho y/o alto) de los bancos u otros objetos de la sala de clases. Es importante cerciorarse de que, al momento de medir, ubiquen la regla como corresponde, esto es, a partir del cero y no a partir del comienzo de la misma. Por otro lado, para evaluar si saben reproducir longitudes utilizando una regla (o reforzar dicho aprendizaje en caso de ser necesario), se les puede solicitar que construyan cuadrados o rectángulos conociendo las medidas de sus lados, incluyendo valores decimales entre las medidas dadas. Para dibujar los ángulos rectos de los rectángulos podrán utilizar una escuadra.
- **Miden y reproducen ángulos utilizando un transportador.**
Se puede pedir directamente a los alumnos y alumnas que midan diversos ángulos. Es importante procurar que los ángulos que se pide medir estén ubicados en diversas posiciones y no solamente de la manera habitual, por ejemplo:



También se les puede pedir que midan los ángulos internos de distintos cuadriláteros.

Asegúrese de que, al momento de medir, los estudiantes ubiquen el transportador como corresponde, esto es, ubicando el vértice del ángulo a medir en el origen del transportador y un lado del ángulo coincidente con el cero y leyendo la medida que corresponde según el sentido en el que se está midiendo.

Por otro lado, para evaluar si saben reproducir ángulos utilizando un transportador, se les puede invitar a reproducir ángulos cualesquiera.

- **Reproducen y crean figuras geométricas usando regla, compás y escuadra.**
El profesor(a) puede pedir a su curso que trabajen con los instrumentos mencionados dibujando figuras destinadas a producir una composición artística. Una vez terminadas las distintas composiciones, se muestran y comentan, destacando tanto sus resultados como su diversidad. Se espera también que el docente procure concentrar al curso en la función de la regla, el compás y la escuadra como instrumentos y en las distintas posibilidades de diseño de figuras que posibilitan, mediante preguntas del tipo: ¿Para que sirve la regla (el compás, la escuadra)? ¿Qué dibujos nos permite realizar la regla (el compás, la escuadra)? Se espera que alumnas y alumnos reconozcan que la escuadra (a diferencia de la regla) nos permite construir

y verificar ángulos rectos en cualquier posición, así como trazar rectas perpendiculares (lo que permite también llegar a dibujar paralelas) y que el compás es un instrumento que permite construir circunferencias o partes de ella (arcos de circunferencia).

Por otro lado, se sugiere realizar a continuación un trabajo orientado a que los estudiantes reconozcan el compás como el instrumento que permite construir “*el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de un punto fijo (llamado centro)*”. Esto es importante ya que ese conocimiento es la base para que reconozcan que un compás puede servir para reproducir un trazo, e incluso un triángulo, cuando se dispone únicamente de regla NO graduada y compás. Este último trabajo viene propuesto en las fichas de repaso de los aprendizajes previos, las que deberán ser complementadas en caso de que usted lo estime conveniente.

- Reconocen un triángulo como una figura geométrica formada por tres lados rectos. El profesor(a) puede solicitar a su curso que definan, con sus palabras, el concepto de triángulo.
- Clasifican triángulos según cantidad de lados de igual medida y según medida de los ángulos internos. El profesor(a) puede mostrar a su curso un conjunto de triángulos de distinto tipo y pedir que, utilizando regla y transportador, señalen qué tipo de triángulo es cada uno de ellos, utilizando como criterio tanto la cantidad de lados iguales que posee como la medida de sus ángulos internos. Por otro lado, puede pedir que definan con sus palabras qué entienden por un triángulo isósceles, un triángulo rectángulo, etc.

II. ESQUEMA
 APRENDIZAJES ESPERADOS



ETAPA 2

<u>TAREAS MATEMÁTICAS</u>	<u>CONDICIONES</u>	<u>TÉCNICAS</u>	<u>FUNDAMENTOS CENTRALES</u>
<ul style="list-style-type: none"> • Construyen triángulos conocidos 2 de sus lados y el ángulo comprendido entre dichos lados. • Construyen triángulos conocidas las medidas de 2 de sus ángulos y el lado que ellos subtienden. • Construyen triángulos conocidos sus 3 ángulos. • Construyen triángulos conocidos dos de sus lados y el ángulo que se opone al lado menor. • Describen un triángulo. 	<p>Para reproducir un triángulo Disponen de regla, transportador, escuadra y compás.</p> <p>Para construir un triángulo - Disponen de trazos y ángulos con las medidas solicitadas, confeccionados en cartulina. - Disponen de regla y compás.</p> <p>Para describir el triángulo Podrán utilizar un máximo de 3 datos.</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Para construir triángulos conocidos dos lados de él y el ángulo comprendido entre dichos lados, construyen un ángulo con la medida dada, a continuación marcan cada uno de los lados del ángulo de acuerdo a las medidas de los dos lados conocidos (uno en cada lado) finalmente, unen los puntos en los que fueron marcados los lados del ángulo. Otra opción es construir un segmento con la medida dada, luego en uno de los extremos del segmento se reproduce el ángulo y, luego, se marca el lado construido del ángulo de acuerdo a la medida del otro lado conocido, finalmente, se une el punto marcado con el extremo libre del primer segmento dibujado. - Para construir triángulos conocidos dos ángulos de él y el lado comprendido entre dichos ángulos, reproducen el lado conocido, y con vértice en cada uno de sus extremos reproducen los dos ángulos dados (uno en cada extremo) y los extienden hasta que estos dos lados se intercepten. - Para construir triángulos conocidos sus tres ángulos, le asignan una medida arbitraria a uno de sus lados. - Para construir triángulos conocidos dos de sus lados y el ángulo opuesto al menor de dichos lados, lo hacen con ayuda de dos trazos y un ángulo con las medidas solicitadas, confeccionados en cartulina. - Para reproducir ángulos, unen dos puntos cualesquiera de los lados del ángulo de modo de formar un triángulo, luego reproducen ese triángulo utilizando como información para dicha construcción la medida de sus tres lados, finalmente extienden los lados correspondientes al ángulo en cuestión. 	<ul style="list-style-type: none"> - Un triángulo queda determinado si se conocen dos lados y el ángulo que forman dichos lados. Es decir, existe un único triángulo que tiene las medidas dadas. - Un triángulo queda determinado si se conocen dos de sus ángulos y el lado comprendido entre ellos. Es decir, existe un único triángulo que tiene las medidas dadas.



ETAPA 1

<u>TAREAS MATEMÁTICAS</u>	<u>CONDICIONES</u>	<u>TÉCNICAS</u>	<u>FUNDAMENTOS CENTRALES</u>
<ul style="list-style-type: none"> • Ubican el tercer vértice de un triángulo si se conoce la ubicación de los otros dos vértices y la distancia que hay entre ellos y el tercer vértice. • Reproducen un triángulo. • Construyen triángulos conocidos sus 3 lados. • Construyen cuadriláteros conocidos sus 4 lados. • Reproducen un cuadrilátero. • Construyen un cuadrilátero conocidos sus 4 lados y una diagonal. • Reproducen un polígono. 	<p>Para ubicar el vértice, disponen de regla graduada, regla no graduada y compás.</p> <p>Para reproducir un triángulo disponen de regla graduada, regla no graduada y compás.</p> <p>Para construir un triángulo disponen de regla no graduada y compás.</p> <p>Para reproducir un cuadrilátero, en una primera instancia, utilizan un set de varillas articuladas. Posteriormente, utilizan regla y compás</p> <p>Para construir polígonos disponen de regla graduada y compás</p>	<p>Para ubicar el tercer vértice del triángulo, utilizan el compás ubicándolo en uno de los vértices conocidos y trazan arcos de circunferencia con radio igual a una de las distancias conocidas. Se hace lo mismo en el otro vértice con un radio igual a la otra distancia conocida. Los puntos de intersección de los arcos corresponden al tercer vértice del triángulo. Se unen los vértices utilizando la regla no graduada.</p> <p>Para construir un triángulo conocidos sus tres lados, dibujan un segmento con la misma medida de uno de los lados y con el compás con centro en cada uno de los extremos del segmento dibujan arcos de circunferencia con radio igual a la medida de los otros dos lados. El punto de intersección de los arcos corresponde al tercer vértice del triángulo. Se unen los vértices utilizando la regla para formar el triángulo.</p> <p>Para evitar que un cuadrilátero se deforme, se triangula, ubicando o midiendo una de sus diagonales.</p> <p>Para construir un cuadrilátero del que se conocen los cuatro lados, el orden en que se encuentran, la medida de una de las diagonales y entre qué vértices se ubica. Construyen el triángulo formado por dos lados consecutivos y la diagonal. De esta manera se encuentran 3 de los 4 vértices del cuadrilátero. Construyen el triángulo cuyos vértices conocidos son los extremos de la diagonal y sus otros dos lados son los otros dos lados del cuadrilátero, ubicados de acuerdo al orden dado. Para realizar la construcción es necesario respetar el orden de los lados del cuadrilátero, porque en caso contrario puede construirse la reflexión del triángulo, no consiguiéndose la construcción del cuadrilátero buscado.</p>	<p>El compás es el instrumento que permite encontrar todos los puntos que están a una distancia dada de un punto fijo.</p> <p>El tercer vértice de un triángulo se determina por la intersección de los arcos de circunferencia trazados desde los otros dos vértices, con aberturas iguales a las distancias entre los vértices conocidos y el que se quiere buscar. Si los arcos no se intersectan o se intersectan en un solo punto, no se forma triángulo. Si los arcos se intersectan en dos puntos, se forman dos triángulos iguales.</p> <p>Un triángulo queda determinado si se conocen sus tres lados. Es decir, existe un único triángulo que tiene por lados tres medidas dadas. Esta última idea se manifiesta físicamente en que los triángulos son figuras rígidas o “indeformables”, ya que no se pueden modificar sus ángulos sin modificar la longitud de sus lados.</p> <p>Con tres segmentos no siempre es posible construir un triángulo.</p>

<ul style="list-style-type: none"> • Construyen un polígono conocidos sus lados y algunas diagonales u otros segmentos que lo triangulan. 		<p>Para construir un polígono se debe trazar una estrategia respecto de cómo se puede descomponer el polígono en triángulos, consiguiendo de esta forma conocer la ubicación de cada uno de sus vértices.</p>	<p>Con 4 lados se pueden formar varios cuadriláteros diferentes, dependiendo del orden en que se ubiquen los lados.</p> <p>Aun conociendo el orden en que se ubican los lados, existen muchos cuadriláteros formados con las medidas de los lados colocadas en el orden correcto, que tienen distintas formas.</p> <p>La descomposición de los polígonos en triángulos permite construirlos o reproducirlos, porque el triángulo es una figura “indeformable”, es decir, no se pueden modificar sus ángulos sin modificar la longitud de sus lados.</p>
--	--	---	---



APRENDIZAJES PREVIOS

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE: ESTRATEGIA DIDÁCTICA

La estrategia didáctica propuesta para esta Unidad considera dos etapas en las que se abordan distintas técnicas de construcción de triángulos con regla y compás. El triángulo se utilizará también como base para la construcción de diversas figuras geométricas conocidas y disponibles. Los alumnos y alumna aprenderán, junto con las construcciones que vayan realizando, a caracterizar un triángulo mediante la mínima información posible.

En la primera etapa se aborda la construcción de triángulos cuando solo se conocen las medidas de sus tres lados. Luego, utilizando como fundamento la rigidez del triángulo, se construyen figuras geométricas idénticas a una conocida por medio de la triangulación de la misma.

En la segunda etapa se realizan construcciones de triángulos conocidos dos de sus lados y el ángulo que ellos forman, así como dos ángulos y el lado que ellos subtienden. Posteriormente, se realizará un trabajo que permita a los estudiantes identificar la información necesaria y suficiente para caracterizar un triángulo, distinguiéndola de aquella que no lo determina.

Primera Etapa

La unidad didáctica gira en torno a la construcción y la caracterización del triángulo. En esta primera etapa, el estudio se concentra en tres aspectos medulares:

- La construcción de un triángulo conociendo sus tres lados;
- La construcción de un polígono, y
- Los fundamentos matemáticos respecto a cuando un triángulo o un polígono es congruente otro.

Para el desarrollo de estos temas, los problemas propuestos se contextualizan en la reposición de un trozo poligonal de vidrio de un vitral y en la ubicación de puntos en un plano que se encuentra a distancias conocidas de otros dos puntos dados.

El estudio se realiza en tres apartados que abordan sucesivamente los aspectos esenciales de la construcción de triángulos y polígonos conocidos algunos de sus lados y diagonales.

I.1 Cómo ubicar el tercer vértice de un triángulo

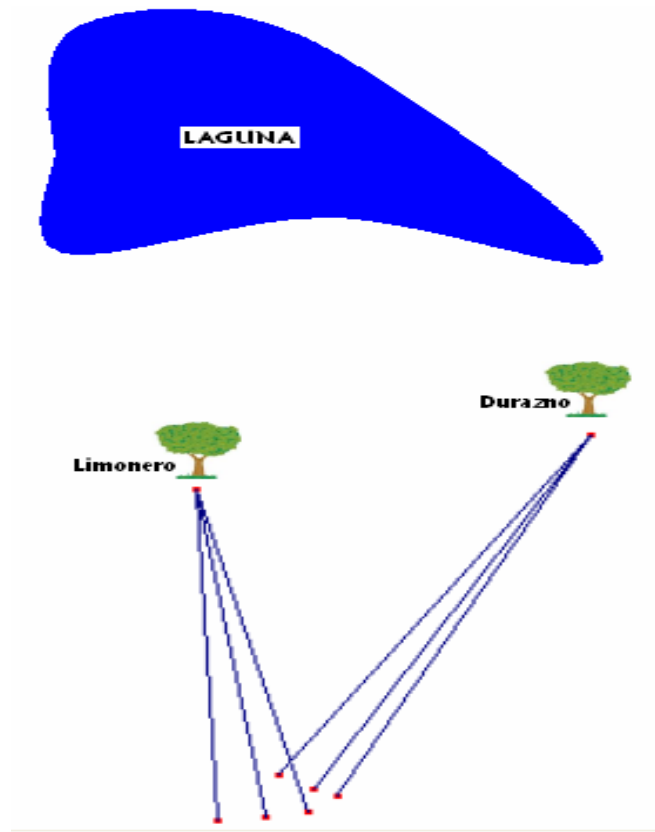
Uno de los problemas que permite que alumnas y alumnos se introduzcan en el estudio, consiste en ubicar un punto en un plano teniendo como referencia otros dos puntos y la distancia que hay entre cada uno de ellos y el punto que se quiere ubicar. Por ejemplo, el problema que se propone en la Ficha 1, en donde deberán ubicar el lugar para plantar un naranjo a 5 metros del limonero y a 6 metros del durazno.



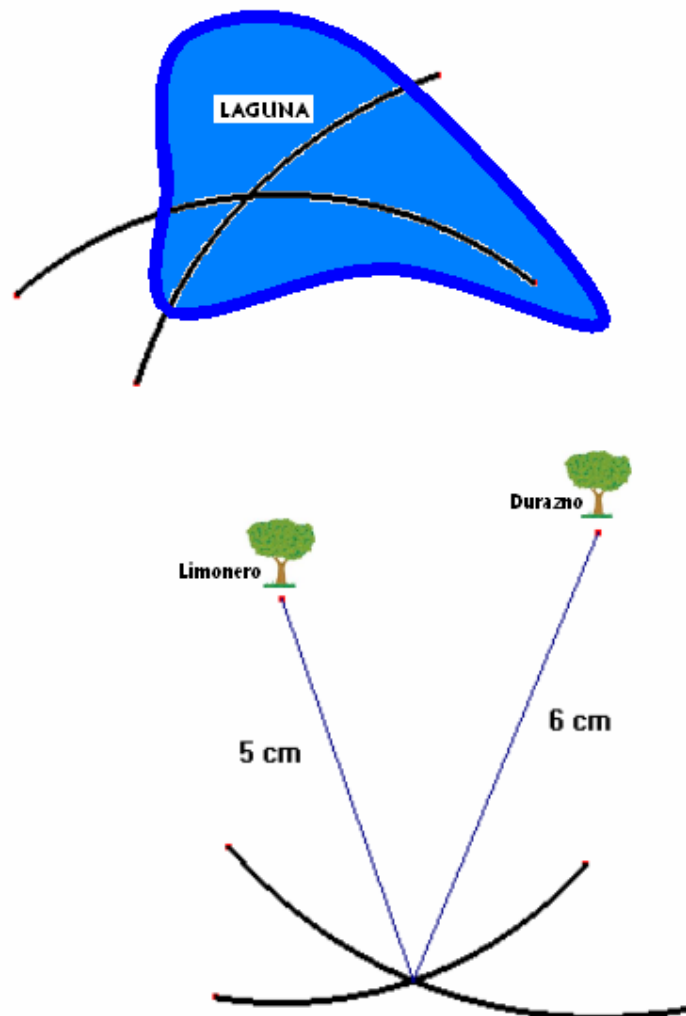
En este problema se pone en juego la utilización de una técnica para ubicar los posibles puntos. Niñas y niños dispondrán de variados instrumentos, como la regla graduada y no graduada, transportador y compás, debiendo decidir cuáles utilizarán.

Lo más probable es que recurran a la regla graduada, por ser el instrumento que más conocen y porque se da a conocer la medida a la que se debe ubicar el naranjo de los otros dos árboles.

Al utilizar la regla graduada para encontrar la ubicación del naranjo, deberán encontrar “la buena inclinación” que permita encontrar el punto que está a 5 metros del limón y, a la vez, a 6 metros del durazno. Conseguirlo les puede llevar varios intentos.



Al buscar la ubicación de dónde plantar el naranjo con las condiciones señaladas, se encontrarán dos puntos. Sin embargo, para este caso uno de los puntos se descarta, porque no se puede plantar el árbol en la laguna.



Con este primer problema se espera que en la clase se comparen las técnicas utilizadas para ubicar el punto, contrastando la ubicación del punto utilizando la regla y/ o el compás.

Se sugiere pedir que quienes lo hicieron con compás lo hagan con la regla y viceversa, y que comparen las ventajas y desventajas de usar uno u otro instrumento.

Una técnica que integra a ambas es medir un segmento con la regla desde el punto deseado. Después, fijar el compás en el punto conocido, abrirlo hasta que la punta con la mina o el lápiz lleguen al otro extremo del segmento y luego trazar el arco.

Se espera que concluyan que, para encontrar los puntos que se encuentran a distancias conocidas de otros dos, el compás es el instrumento que permite encontrar todos los puntos, con más rapidez y mayor precisión. La razón de esto es, que con el compás se encuentran todos los puntos que están a una distancia dada de un punto fijo. Por ejemplo, cuando se ubica el compás en un punto (P), con una abertura de 5 cm y se traza un arco de circunferencia, los puntos de dicho arco se encuentran todos a 5 cm del punto P. Si realiza nuevamente esta operación en otro punto (Q) y ahora con una abertura de 6 cm, los dos puntos en que se intercepten los arcos de circunferencia cumplirán con una doble condición: están a 5 cm del punto P y a 6 cm del punto Q. Si se unen los puntos P y Q entre sí y con uno de los puntos encontrado se forma un triángulo.

Con la intención de que pongan a prueba las técnicas que están aprendiendo o que utilizan, en la Ficha 2 se propone un problema similar, pero esta vez deberán ubicar un lugar (punto), basándose en otros puntos que deberán encontrar previamente, es decir, deberán resolver un problema que tiene más de un paso.

Para descartar una de las dos soluciones que puede tener este tipo de problemas, en el problema planteado se da como información otros referentes, específicamente los puntos cardinales.

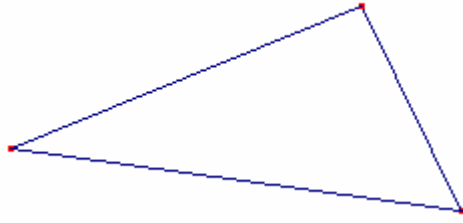
Para ubicar el lugar *donde está el tesoro* (Ficha 2), se deberá encontrar la cabaña que cumple con la condición señalada; para ello será necesario seleccionar aquella que se encuentra hacia el este y está a 6 pasos de la palmera. Pero para ubicar la roca, que está cubierta por la arena, no es suficiente descartar las posibilidades que están dibujadas en el plano, sino que hay que buscar entre todas las alternativas. Es aquí, donde la utilización del compás facilita encontrar el lugar en el que se encuentra ubicada la roca. Lo mismo ocurrirá para determinar el punto donde se encuentra el tesoro.

1.2 Construcción de triángulos congruentes a partir de sus tres lados

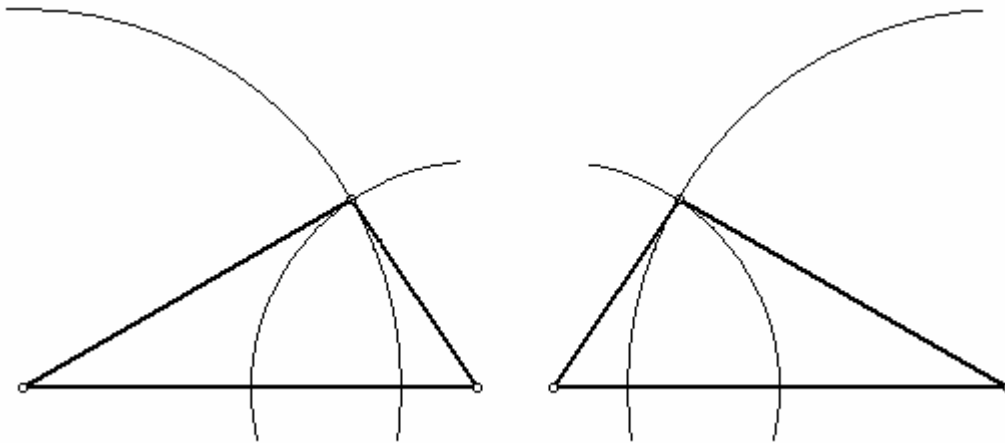
Se progresa con el estudio proponiendo a los alumnos problemas en los que pondrán en juego conocimientos matemáticos relacionados con la construcción y congruencia de triángulos.

El primer tipo de problema consiste en reponer un trozo de un vitral que se ha quebrado, Ficha 3. La situación propuesta en ella requiere cautelar algunas condiciones desde el punto de vista de la gestión: que niñas y niños no tengan permanentemente el vitral en sus manos, porque en este caso bastaría “calcar” la figura; además, el vitral debiera estar pegado en la pizarra o en alguna de las paredes de la sala, para plantear al curso la consigna de *que tienen una sola oportunidad para ir a medir lo que consideren necesario para reproducir el trozo que falta*.

Para reproducir un triángulo, disponen de regla graduada, regla no graduada y compás. Podrán medir o copiar los lados del triángulo, y en uno u otro caso tienen la información para reproducir el triángulo de color que calce en el vitral. (El color depende de la cartulina que se consiga).



Aquí aparece una problemática geométrica que es necesario considerar. Al tomar las medidas de los lados del triángulo, si no se especifica cuáles son los vértices que están a las distancias medidas, se pueden dar dos situaciones:



Los dos triángulos son congruentes, pero para hacerlos coincidir por superposición es necesario reflejar uno de ellos. En la actividad propuesta, esto traería como consecuencia que algunos de los triángulos construidos no servirían para el vitral si la cartulina tuviera color celeste por un solo lado y los lados del triángulo se hubieran tomado en orden distinto al original. Para evitar esta situación se propone utilizar cartulina que tenga color celeste por ambos lados.

Para realizar las construcciones de los triángulos propuestas tanto en la Ficha 3 como en la Ficha 4, se utiliza la misma técnica descrita en el primer apartado, recurriendo al compás.

Para nombrar o identificar un triángulo y sus lados se necesita convenir una forma de hacerlo. En la Ficha 4 se utiliza la simbología ΔPQR para hacer referencia al triángulo determinado por los vértices P, Q y R, cuyos lados son los segmentos \overline{PQ} , \overline{QR} y \overline{RP} .

Del trabajo realizado se espera que se concluya que:

- Para construir un triángulo se necesita conocer la ubicación de sus tres vértices, lo que es equivalente a conocer la medida de sus tres lados.
- Los triángulos que tienen dos lados de la misma longitud, si se superponen son idénticos. Para superponerlos a veces basta trasladarlos y en otras es necesario reflejar uno de ellos.
- Con tres segmentos no siempre es posible construir un triángulo.
- Para referirse a un triángulo se utiliza una simbología ΔABC donde A, B y C corresponden a sus vértices.

I.3 Por qué la triangulación hace posible construir un polígono idéntico a otro

Para continuar con el estudio del tema de la unidad se propone realizar una actividad que permita al curso recordar lo que debieron haber aprendido en 4° básico, respecto a la rigidez del triángulo y de los cuadriláteros.

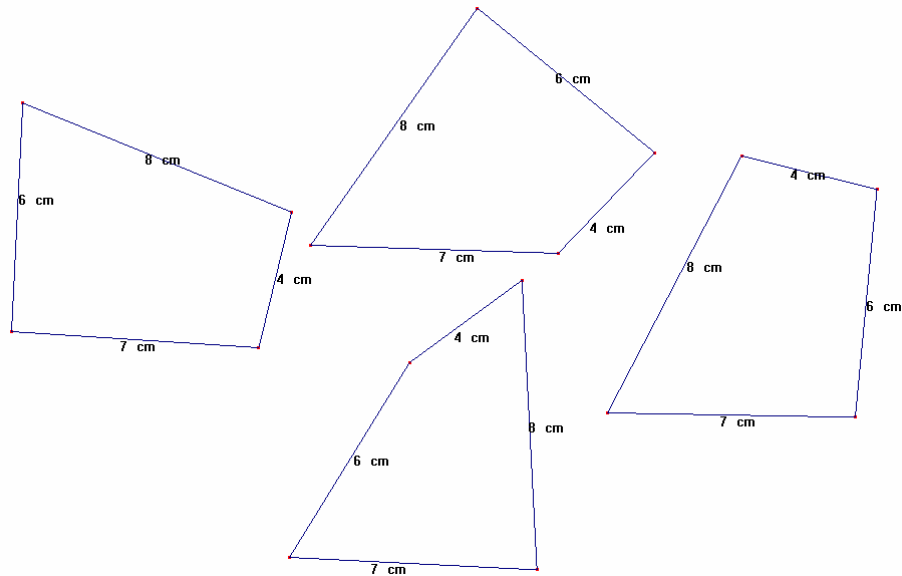
Se les propone que formen un cuadrilátero idéntico a uno que tiene el profesor(a) dibujado en una hoja; para ello solo conocen la medida de sus cuatro lados (18 cm, 13 cm, 12 cm y 10 cm) y disponen de varillas perforadas para hacerlo. (Material Recortable 1).

Una vez que formen un cuadrilátero con la varillas, promueva que comparen sus producciones entre ellos, haciéndoles preguntas del tipo: ¿Cuál de los cuadriláteros que han hecho será igual al que tengo dibujado (no se les muestra todavía el cuadrilátero)? ¿Qué diferencias hay entre los cuadriláteros que han construido? Si tuvieran que escoger uno, ¿con cuál se quedarían?

Se espera que niñas y niños concluyan que:

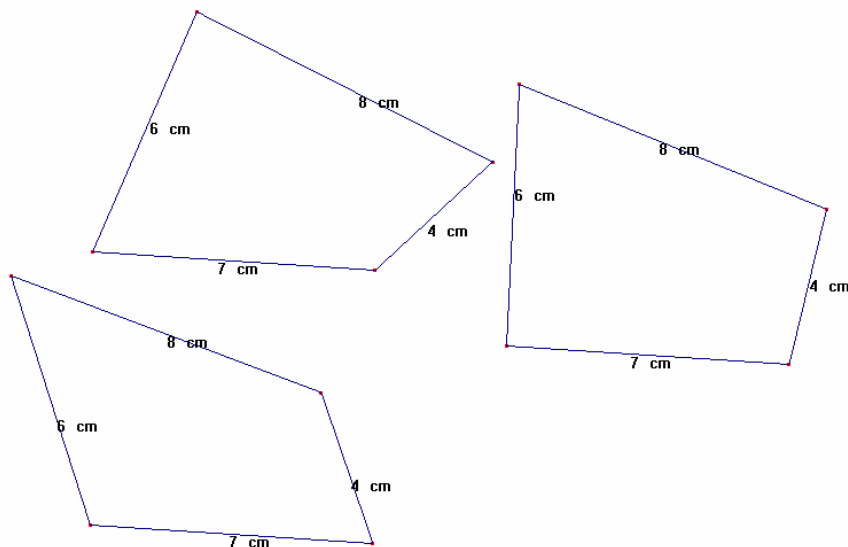
- Con 4 lados se pueden formar varios cuadriláteros diferentes, dependiendo del orden en que se ubiquen los lados.

Por ejemplo, con los 4 segmentos de longitudes 7 cm, 6 cm, 8 cm y 4 cm se pueden formar estos cuadriláteros:



- Aun, conociendo el orden en el que se ubican los lados, existen muchos cuadriláteros que tienen la misma forma, porque el cuadrilátero es una figura “deformable” (en un modelo armado con varillas articuladas)

Por ejemplo, en estos cuadriláteros los lados tienen la misma medida, el mismo orden y sin embargo tienen distinta forma, porque sus ángulos homólogos son diferentes:



Que el cuadrilátero sea “deformable” significa que se puede cambiar de forma sin modificar la longitud de sus lados.

La pregunta que es importante plantear es: ¿Qué se necesitaría saber, además de la longitud de los lados, para hacer un cuadrilátero idéntico al que el profesor(a) tiene dibujado en una hoja?

De la discusión grupal que realicen los estudiantes, se espera que recuerden lo aprendido en 4° y 5° básico y pidan como información la longitud de una de las diagonales para rigidizar el cuadrilátero. Entonces el profesor les dará como información la longitud de la diagonal (16 cm) que va del vértice donde se interceptan los lados de longitud 12 cm y 13 cm, al vértice donde se interceptan los lados de longitud 18 cm y 10 cm.

Una vez que hayan comprobado que al poner una diagonal en el cuadrilátero formado con varillas ya no se deforma, porque se forman dos triángulos, pídeles que formen un triángulo y verifiquen que no se deforma como el cuadrilátero.

Finalice la actividad permitiendo que comprueben que los cuadriláteros producidos son iguales al que tenía dibujado en la hoja. (material anexo 1)

De este trabajo, se espera que alumnas y alumnos concluyan:

- El triángulo es una figura “indeformable”, es decir, no se puede deformar sin modificar la longitud de sus lados.
- Para evitar que un cuadrilátero se deforme se debe triangular.
- Con la medida de los cuatro lados, el orden en que se encuentran y la medida de una de las diagonales, señalando entre que vértices se ubica, se puede formar un único cuadrilátero.

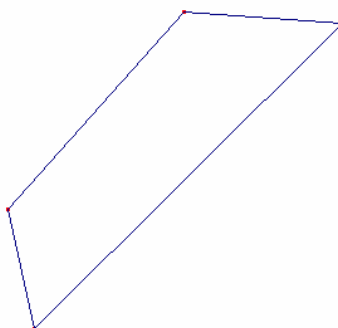
En la Ficha 5, la actividad propuesta es similar a la de la Ficha 3, solo se modifica la figura que tienen que reponer. Desde el punto de vista de la gestión se debe tener en cuenta las mismas condiciones, es decir: que no tengan permanentemente el vitral en sus manos, que el vitral esté pegado en la pizarra o en alguna de las paredes de la sala y se les señale en la consigna que tienen una sola oportunidad para ir a medir lo que consideren necesario para reproducir el trozo del vitral que falta.

Para reproducir el cuadrilátero disponen de regla graduada y no graduada, transportador y compás.

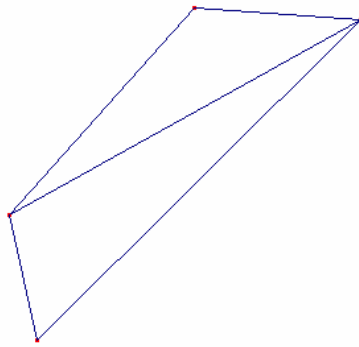
Para evitar que al cuadrilátero producido por los alumnos, aun siendo congruente al que falta, le quede el color por el otro lado, por ser la reflexión de este, se sugiere trabajar con cartulina que tenga el mismo color por ambos lados.

El procedimiento que se espera que utilicen para reproducir el cuadrilátero que falta en el vitral, se basa en la triangulación. Miden los cuatro lados y una de las diagonales, y los van construyendo por los triángulos en los que se ha descompuesto el cuadrilátero.

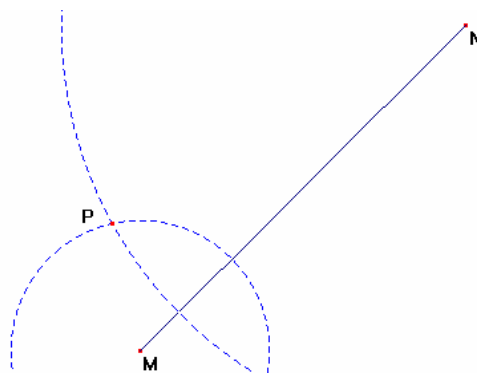
Por ejemplo, si el cuadrilátero a reponer fuera este:



Para hacer uno idéntico es necesario descomponerlo en triángulos y copiar o medir sus lados, y para ello basta trazar una de las diagonales.

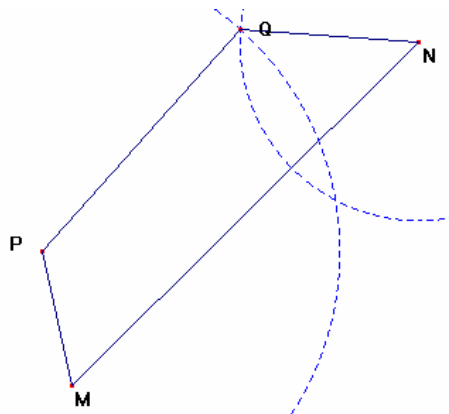


Luego, se ubica el compás en cada uno de los extremos del primer lado dibujado (en este ejemplo en los vértices M y N), trazando dos arcos con las respectivas aberturas de los lados que forman el triángulo.

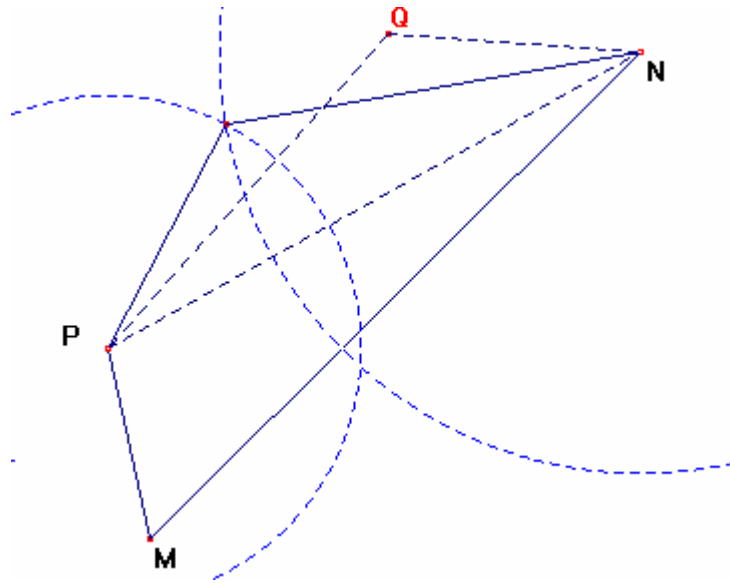


De esta forma se ha conseguido ubicar tres de los vértices del cuadrilátero. Para encontrar el cuarto vértice, se construye el segundo triángulo en el que se descompuso el cuadrilátero.

Para ello se repite lo hecho anteriormente para la construcción de un triángulo.



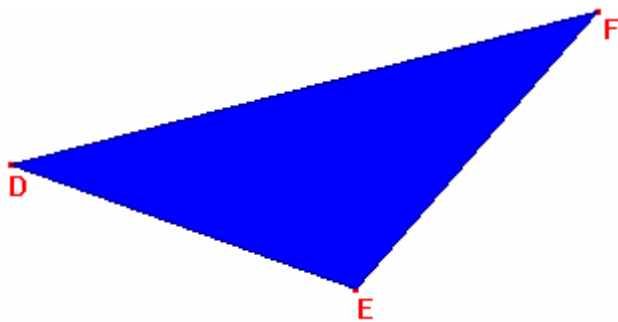
Para realizar la construcción es necesario respetar el orden de los lados del cuadrilátero, porque en caso contrario puede construirse la reflexión del triángulo buscado, no consiguiéndose la construcción del cuadrilátero. Por ejemplo, si en la construcción anterior se hubiese intercambiado la medida de los arcos ubicando el compás en los vértices contrarios, se construiría la reflexión del triángulo deseado y, en consecuencia, otro cuadrilátero.

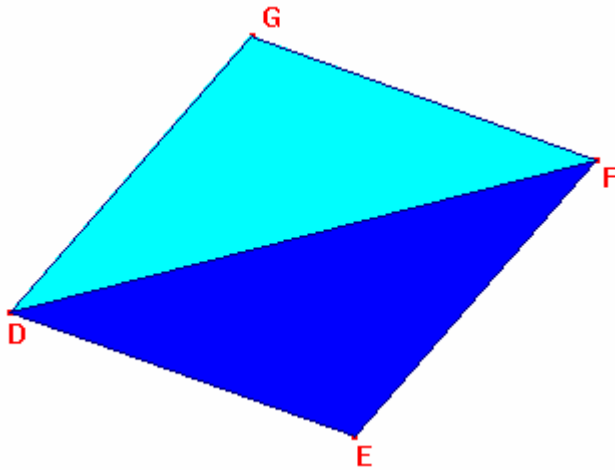


La primera actividad de la Ficha 6, tiene como propósito que alumnas y alumnos adquieran práctica en la construcción de cuadriláteros basándose en la triangulación. Una vez que hayan dibujado el cuadrilátero, es conveniente que comprueben que es idéntico al original. Para ello se recomienda tener recortadas un par de figuras.

En la segunda actividad de la Ficha 6 deberán construir un cuadrilátero conocidos sus lados y una de sus diagonales. El cuadrilátero a construir es un rombo, figura que tiene la característica de tener todos sus lados iguales y las diagonales diferentes.

Para construirlo se comienza construyendo el triángulo formado por dos lados del rombo y cuyo tercer lado es la diagonal mayor, para luego construir el otro triángulo.

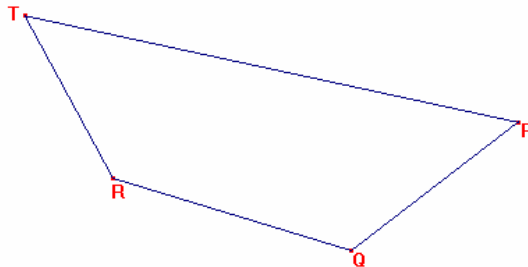




La tercera actividad de la Ficha 6, tiene el desafío para los alumnos de comunicar por escrito, a otro, lo que hacen para reproducir un cuadrilátero. Se busca con esto crear la necesidad de adoptar una escritura que facilite referirse a los vértices, a los segmentos y a los arcos que se hacen con el compás.

Como resultado del trabajo realizado se espera que en la clase concluyan:

- La triangulación es el procedimiento que permite construir un cuadrilátero idéntico a otro.
- Para construir un cuadrilátero se necesita construir dos triángulos, que tienen en común un lado, el que corresponde a la diagonal del cuadrilátero.
- Para referirse a los vértices se utilizan letras mayúsculas y para los lados se utilizan las dos letras con la que se han designado los puntos de sus extremos. Por ejemplo, los vértices del cuadrilátero son P, Q, R y T, y sus lados son RQ, QP, PT y TR.



- Para comunicar la acción realizada con el compás se necesita hacer mención de dos aspectos: dónde se ubica el compás y con qué abertura se traza el arco. La escritura formal que se utiliza es $\odot(R, 5 \text{ cm})$, que significa: arco con centro en el punto R y abertura 5 cm.

Para ampliar el uso de la triangulación para construir figuras, en la Ficha 7 se propone el problema de reponer un trozo de un vitral con forma pentagonal. Este problema es similar al resuelto por los alumnos para restaurar un vitral en el que faltaba una parte con forma triangular y otra con forma cuadrilátera. El desafío ahora es ampliar a otros polígonos la técnica para construir cuadriláteros basados en la triangulación.

Con la Ficha 8 se pretende, además, que alumnas y alumnos practiquen la técnica de la triangulación para construir polígonos, poniendo en discusión la forma de triangular.

Tal como se plantea en la Actividad 2, no existe una única forma de triangular un polígono, lo que va más allá de considerar diferentes diagonales, sino que también un polígono puede ser reproducido al triangularlo a partir de un punto al interior de él, uniéndolo con los vértices. En ambos casos, la construcción del polígono se realiza a partir de la construcción de triángulos, a través de los cuales se van determinando los vértices del polígono.

Finalmente, se espera que alumnas y alumnos concluyan que es necesaria la descomposición de los polígonos en triángulos, porque el triángulo es una figura “indeformable”, es decir, no se puede deformar sin modificar la longitud de sus lados. Por lo tanto, a través de triángulos se puede llegar a construir un polígono idéntico a otro.

Por último, al término de esta etapa se lleva a cabo la aplicación de una prueba, para constatar si el curso tiene los conocimientos necesarios para continuar con el estudio en la segunda etapa.

Una vez aplicada esta prueba, se sugiere que el profesor o profesora analice los resultados y corrija las respuestas con el curso.

Segunda Etapa

En la segunda etapa, el trabajo de los estudiantes estará orientado al desarrollo de técnicas de construcción de triángulos, conocidas las medidas de dos de sus lados y del ángulo que ellos forman, o las medidas de dos de sus ángulos y del lado que ellos comprenden. Estas construcciones se realizarán, en una primera instancia, con trazos y ángulos confeccionados en cartulina y, en una segunda instancia, con regla y compás. En particular para la construcción con regla y compás, se verán en la necesidad de desarrollar una técnica para reproducir ángulos utilizando dichos instrumentos, lo que, al igual como se hizo para reproducir polígonos, se puede llevar a cabo mediante triangulación, tal como se explica más adelante. Una vez que hayan desarrollado técnicas apropiadas para las construcciones en cuestión, se les pedirá que construyan triángulos conocidos sus 3 ángulos. Se trata de que alumnas y alumnos se den cuenta de que no siempre es única la construcción que se puede realizar cuando se conocen 3 elementos del triángulo, lo que implica que un triángulo no queda determinado con tres cualesquiera de sus elementos.

Una vez realizadas estas construcciones, continúa el trabajo desarrollando una actividad en la que los estudiantes se enfrentarán a la tarea de tener que caracterizar un triángulo con no más de tres elementos. El propósito es que se apropien del hecho de que no basta cualquier trío de datos para poder realizar dicha caracterización. En efecto, para que un triángulo quede determinado se debe conocer como mínimo las medidas relativas a tres lados, dos lados y el ángulo que ellos forman o dos ángulos y el lado que ellos comprenden (es por esta razón, justamente, que las construcciones propuestas en la primera parte de esta etapa son posibles y únicas). Por otro lado, con esta actividad se espera también que reconozcan que la relación de orden entre los elementos del triángulo que se escogen para caracterizarlo debe ser explicitada, esto es, no basta con dar la medida de dos ángulos y un lado asumiendo que ese lado se encuentra entre dichos ángulos, sino que es necesario indicar en qué orden se encuentran estos elementos, por ejemplo, los dos ángulos subtienden el lado en cuestión.

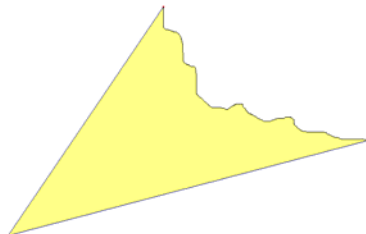
El trabajo propuesto para esta etapa continúa pidiendo a los alumnos y alumnas que estudien las posibilidades de construcción de un triángulo conocidos dos de sus lados y el ángulo que se opone al menor de dichos lados. Finalmente, se realiza un trabajo de ejercitación de las técnicas de construcción elaboradas por los estudiantes, en el que se les presentan diversos problemas como los vistos durante el desarrollo de la Unidad.

Al igual que en la etapa anterior, hay que tener presente que al construir un triángulo congruente a otro, no siempre es posible superponerlos por traslación; en tal caso será necesario reflejar uno de los triángulos.

En las actividades propuestas esto traería como consecuencia que algunos de los triángulos construidos podrían no servir para el vitral si la cartulina tuviera color por un solo lado y los elementos del triángulo se hubieran tomado en sentido distinto al original. Para evitar esta situación, en todas y cada una de las actividades, se propone utilizar cartulina que tenga color por ambos lados.

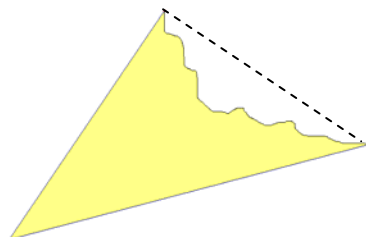
II.1. Construcción de un triángulo conocidos dos lados y el ángulo que ellos forman.

Para lograr los objetivos específicos de esta etapa, el estudio comienza con el desarrollo, en parejas, de la Ficha 9. En esta ficha, se plantea la situación de un vidrio triangular que se ha caído de un vitral y se ha roto en uno de sus lados, de modo que sus otros dos lados y uno de sus ángulos permanecieron intactos, tal como se muestra en el dibujo.



Frente a esta situación, se pide a los alumnos que construyan, en una hoja de cartulina, un vidrio igual al que se ha roto, pero contando para ello únicamente de modelos en cartulina de los dos lados y el ángulo del vidrio que no se rompieron, confeccionados por el dueño del vitral. Pueden recurrir a una regla no graduada si lo estiman conveniente.

Se trata de que utilicen los modelos en cartulina de los lados y el ángulo para construir el triángulo en cuestión. Por esta razón se les entregan únicamente los modelos mencionados, ya que si se les diera el dibujo del vidrio roto podrían completarlo uniendo los extremos de los lados que se encuentran intactos,



y utilizar como información para la construcción la medida de los tres lados, como se ha venido haciendo durante la etapa 1.

Dentro del material del docente está el material anexo 2. En esta hoja se encuentra un modelo del vidrio que se le pide construir a los alumnos. Se recomienda que fotocopie esta hoja y distribuya algunas reproducciones de la misma en la pizarra (pegándolas solo por el lado de arriba de la hoja de modo que se pueda levantar). Una vez que los estudiantes hayan construido el vidrio, deberán comprobar si corresponde al que se pedía. Para ello tendrán que recortar el triángulo que construyeron y superponerle el triángulo del modelo (por no ser translúcida la cartulina, la superposición tendrá que hacerse colocando el triángulo hecho por los alumnos en cartulina debajo del modelo en papel que se encuentra en la pizarra). En caso de que el vidrio construido no coincida con el modelo, deberán construirlo nuevamente.

Se debe tener presente que, tanto para esta actividad como para las próximas actividades que se describen más adelante, la hoja con el modelo del vidrio que se quiere construir NO debe estar al alcance de los alumnos, de modo que no puedan calcar ni construir a ojo el triángulo que se está pidiendo. El uso que se le dé a esta hoja debe

ser únicamente el de comprobar si la construcción realizada corresponde a la que se pedía o no.

Concluida la actividad, es importante que los estudiantes realicen una puesta en común del trabajo realizado, compartiendo sus dificultades y las técnicas de construcción utilizadas, tanto aquellas que resultaron exitosas como aquellas que no resultaron exitosas, analizando por qué ciertas técnicas fracasaron.

Uno de los propósitos de esta actividad es que alumnas y alumnos tengan la posibilidad de constatar que sí es posible realizar la construcción de un triángulo cuando se conoce únicamente dos de sus lados y el ángulo que ellos forman y que dicha construcción es única. De este modo, en la actividad que viene a continuación, en la que se les pide construir con regla y compás un vidrio triangular del que se conoce únicamente el dibujo de los dos lados y del ángulo que ellos forman, los alumnos tendrán conciencia de que la dificultad para realizar la construcción no está en la información con que se cuenta.

Además, dada la actividad realizada, dispondrán de una técnica de construcción cuando se dispone físicamente de un modelo de los elementos en cuestión, de modo que para hacer evolucionar esta técnica para el caso en que se pide realizar la construcción con regla y compás, el desafío consistirá principalmente en generar una técnica para reproducir ángulos usando dichas herramientas.

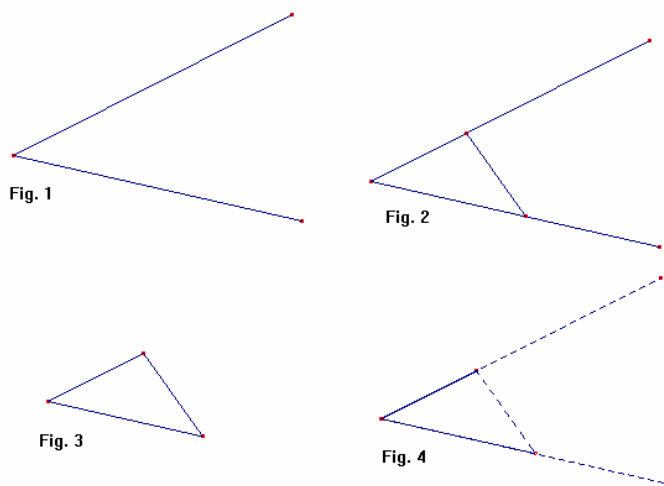
A continuación, resuelven la Ficha 10. Se plantea la misma situación de la actividad anterior, de un vidrio triangular perteneciente a un vitral que se ha roto en uno de sus lados, de modo que sus otros dos lados y uno de sus ángulos permanecieron intactos. Esta vez se les pide que construyan, directamente en una hoja de cartulina y sin utilizar ningún papel anexo, un vidrio igual al que se ha roto, contando para ello únicamente con el dibujo que hizo el dueño del vitral de los dos lados y del ángulo del vidrio que no se rompieron. Otra variable que se introduce al problema es que esta vez la construcción deberá realizarse con el uso exclusivo de regla y compás.

Hay que destacar que, para un desarrollo óptimo de esta actividad, es de esperar que no calquen los elementos que conocen del triángulo sino que, efectivamente, los construyan utilizando las herramientas disponibles. Por esta razón se les pide construir el vidrio directamente en la cartulina (y no en una hoja del cuaderno), de modo que no sea posible calcar los dibujos de los lados y del ángulo de que disponen. Es por esta misma razón que se les exige también que no utilicen ninguna hoja anexa, ya que podrían recurrir a la técnica de construir modelos en papel de los lados y el ángulo conocidos y, de este modo, resolver el problema planteado tal y como se hizo en la ficha anterior. Por otro lado, al igual como ocurría para la actividad anterior, se espera que realicen las construcciones utilizando como información únicamente la medida de dos de sus lados y del ángulo que ellos forman. Por esta última razón se les entrega únicamente el dibujo de dichos elementos, ya que si se les diera el dibujo del vidrio roto podrían completarlo (uniendo los extremos de los lados que se encuentran intactos) y utilizar como información para la construcción la medida de los tres lados, como se ha venido haciendo durante la etapa 1.

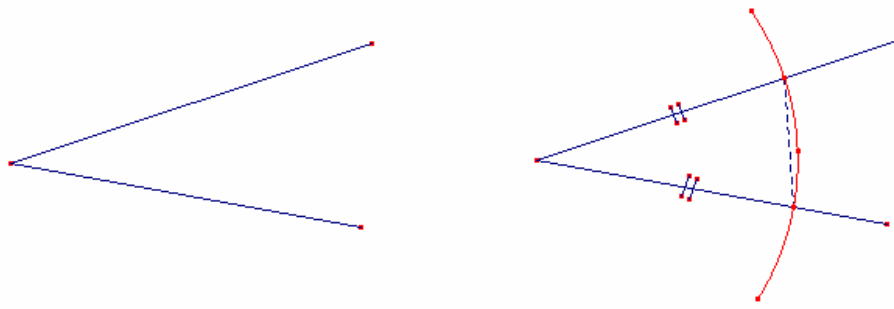
Dentro del material del profesor(a) se encuentra el material anexo 2. En esta hoja hay un modelo del vidrio que se les pide construir. Se recomienda que, al igual como se hizo para la actividad anterior, se fotocopie esta hoja y se peguen algunas reproducciones de

la misma en la pizarra, de modo que los estudiantes puedan comprobar por sí mismos si es que su construcción está correcta o no y, en caso negativo, volver a intentarlo. Para ello tendrán que recortar el triángulo que construyeron y superponerle el triángulo del modelo (por no ser translúcida la cartulina, la superposición tendrá que hacerse colocando el triángulo hecho por los alumnos en cartulina debajo del modelo en papel que se encuentra en la pizarra).

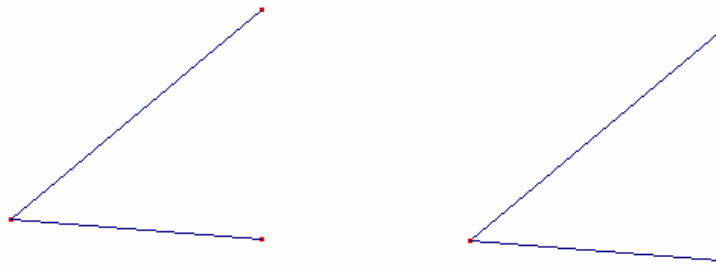
Durante el desarrollo de esta actividad, es probable que algunos estudiantes copien el ángulo a ojo y/o piensen que no es posible construir el ángulo con las herramientas que tienen. Por estas razones, se recomienda que esté atento al trabajo de alumnas y alumnos para apoyarlos, en caso de que sea necesario, con preguntas del tipo: ¿Cómo lo hiciste para realizar la construcción cuando disponías de los modelos del ángulo y de los lados? ¿Cuál es la razón por la cual no has conseguido realizar la construcción sin disponer de los modelos? Olvídate por un instante del triángulo y céntrate solo en el dibujo del ángulo que te dieron, ¿cómo podrías reproducir el ángulo utilizando solo compás y regla? ¿Cómo lo hiciste para reproducir polígonos? ¿Será posible utilizar la misma técnica para reproducir ángulos? Se espera que los alumnos reconozcan que al no disponer del modelo del ángulo deberán construir una técnica que les permita reproducirlos, utilizando para ello el compás y la regla. Se espera que visualicen que, de manera similar como lo hicieron al reproducir polígonos, para reproducir ángulos pueden acudir a la construcción de un triángulo (del que se conocen las longitudes de sus tres lados). Para ello se deben unir dos puntos cualesquiera de los lados del ángulo de modo de formar un triángulo (Fig. 2), luego reproducen ese triángulo utilizando como información para dicha construcción la medida de sus tres lados (Fig. 3), finalmente pueden extender los lados correspondientes al ángulo en cuestión y/o borrar el lado del triángulo que no corresponde a un lado de dicho ángulo (Fig. 4).



La elección del triángulo a construir puede ser diversa. Por ejemplo, la manera más óptima, y que sirve como justificación para la técnica que tradicionalmente se utiliza para reproducir ángulos con regla y compás, es la de formar un triángulo isósceles.



Por otro lado, es muy probable que alumnas y alumnos opten por construir el triángulo que se forma al unir los extremos de los lados del ángulo con el que cuentan.



De todos modos, cualquier triángulo que formen permite resolver el problema de reproducir un ángulo dado.

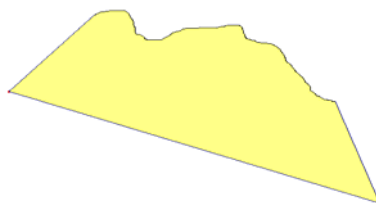
Una vez concluida la actividad es importante que realicen una puesta en común del trabajo realizado, compartiendo las técnicas utilizadas, tanto aquellas que resultaron exitosas como aquellas que no resultaron exitosas, y analicen por qué ciertas técnicas fracasaron.

Durante el cierre de esta actividad, se recomienda que sistematice las técnicas utilizadas por los estudiantes para las construcciones realizadas. Esto es:

- Para reproducir ángulos, unen dos puntos cualesquiera de los lados del ángulo de modo de formar un triángulo, luego reproducen ese triángulo utilizando como información para dicha construcción la medida de sus tres lados, finalmente extienden los lados correspondientes al ángulo en cuestión.
- Para construir triángulos, conocidos dos lados de él y la medida del ángulo comprendido entre dichos lados, construyen un ángulo con la medida dada y a continuación marcan cada uno de los lados del ángulo de acuerdo a las medidas de los dos lados conocidos (uno en cada lado) y finalmente unen los puntos en los que fueron marcados los lados del ángulo. Otra opción es construir un segmento con la medida dada,

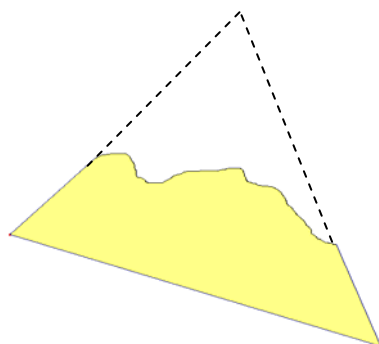
II.2. Construcción de un triángulo conocidos dos ángulos y el lado que ellos subtienden.

El estudio de esta etapa continúa con la realización de la Ficha 11, en la que se trata un nuevo problema. Se plantea la situación de un vidrio triangular de un vitral que se ha roto en uno de sus vértices, de modo que solo uno de sus lados y dos de sus ángulos permanecieron intactos, como se muestra en el dibujo.



Frente a esta situación, se pide a los estudiantes que construyan, en una hoja de cartulina, un vidrio igual al que se ha roto, pero contando para ello únicamente de los modelos en cartulina que hizo el dueño del vitral, de los dos ángulos y el lado del vidrio que no se rompieron (*los modelos de los ángulos y el lado en cuestión vienen suministrados dentro de la Unidad, para ser entregados a los estudiantes*). También pueden recurrir a una regla no graduada en caso de que lo estimen conveniente.

Se trata de que los alumnos utilicen los modelos en cartulina de los ángulos y el lado para construir el triángulo en cuestión. Por esta razón se les entregan únicamente los modelos en cartulina, ya que si se les diera el dibujo del vidrio roto podrían completarlo, extendiendo los lados rotos hasta su intersección,



y utilizar como información para la construcción la medida de los tres lados, como se hizo durante la etapa 1.

Se recomienda que el profesor(a) pegue algunas reproducciones del material anexo 3 en la pizarra, para que los alumnos puedan ir comprobando si el trabajo que han realizado está correcto o no (recortando el triángulo que construyeron y superponiéndole el triángulo del modelo) y vuelvan a intentar construirlo si fuera necesario.

Una vez concluida la actividad, es importante que realicen una puesta en común del trabajo realizado, compartiendo las técnicas utilizadas y analizando por qué ciertas técnicas fracasaron.

Es importante tener presente que el propósito de esta Ficha es el mismo considerado para la Ficha 9, esto es, que alumnas y alumnos tengan la posibilidad de constatar que

sí es posible realizar la construcción de un triángulo cuando se conoce únicamente dos de sus lados y el ángulo que ellos subtienden.

Una vez concluida esta actividad y realizada la puesta en común, trabajan en parejas en la Ficha 12. En esta ficha se les pide la construcción, directamente en una hoja de cartulina y sin utilizar ningún papel anexo, de un vidrio que se ha roto en uno de sus vértices (misma problemática de la Ficha 11). La diferencia es que esta vez cuentan únicamente con un dibujo de dos de sus ángulos y del lado que ellos comprenden y, además, se les pide que realicen la construcción con el uso exclusivo de regla y compás.

Para el desarrollo de esta actividad, alumnas y alumnos ya cuentan con una técnica para la construcción de triángulos, conocidos dos ángulos y el lado que ellos subtienden, con ayuda de los modelos en cartulina de los ángulos y lados conocidos. Disponen también de una técnica para reproducir ángulos con la ayuda de un compás y una regla. No obstante, puede ser que de todos modos se encuentren con dificultades al momento de realizar la construcción debido, por ejemplo, al hecho de no haberse apropiado aún de la técnica de reproducción de ángulos con compás. Por esta razón, se recomienda que supervise el trabajo de los alumnos, apoyándolos en caso de ser necesario.

Hay que destacar que, nuevamente, es de esperar que los alumnos no calquen los elementos que conocen del triángulo sino que, efectivamente, los construyan utilizando las herramientas disponibles. Es por esta razón que se les pide construir el vidrio en una hoja de cartulina (y no en una hoja del cuaderno), de modo que sea imposible calcar los dibujos del lado y de los ángulos de que disponen. Es por esta misma razón que se les exige, por otro lado, que no utilicen ninguna hoja anexa, ya que de otra manera podrían recurrir a la técnica de construir modelos en papel de los ángulos y el lado conocido y de este modo resolver el problema planteado tal y como se hizo en la ficha anterior. Por otro lado, se espera que realicen las construcciones utilizando como información únicamente la medida de dos de sus ángulos y del lado que ellos comprenden. Y por esta última razón se les entrega únicamente el dibujo de dichos elementos, ya que si se les diera el dibujo del vidrio roto podrían completarlo (extendiendo los lados rotos hasta su intercepción) y utilizar como información para la construcción la medida de los tres lados, como se hizo durante la etapa 1.

Al igual que para todas las actividades anteriores, se recomienda que el profesor(a) pegue algunas reproducciones del material anexo 3 en la pizarra, para que alumnas y alumnos puedan comprobar el trabajo realizado, recortando el triángulo que construyeron y superponiéndole el triángulo del modelo.

Una vez concluida la actividad, se recomienda realizar una puesta en común del trabajo de los alumnos, invitándolos a compartir las técnicas utilizadas y a analizar por qué ciertas técnicas fracasaron.

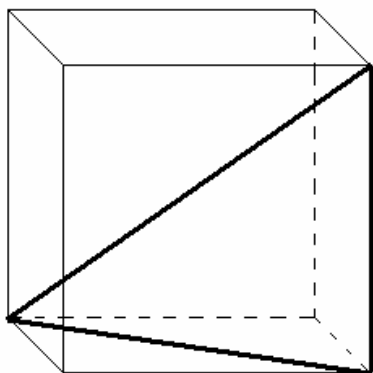
Durante el cierre de esta actividad, se recomienda que el profesor sistematice las técnicas utilizadas por los estudiantes para las construcciones realizadas. Esto es:

- Para construir triángulos, conocidos dos ángulos y la medida del lado comprendido entre dichos ángulos, reproducen el lado conocido y con vértice en cada uno de sus extremos reproducen los dos ángulos dados (uno en cada extremo) y los extienden hasta que estos dos lados se intercepten.

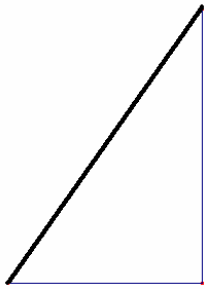
A continuación, se realiza un trabajo de ejercitación de las técnicas de construcción ya estudiadas, mediante el desarrollo individual de la Ficha 13. En esta ficha se pide que realicen diversas construcciones de triángulos y de ángulos, con el uso de regla y compás. Es importante que este trabajo sea desarrollado individualmente, para dar la oportunidad de irse apropiando de las técnicas de construcción elaboradas. Se recomienda también que el profesor o profesora supervise en todo momento el trabajo, de modo de detectar el nivel de apropiación de cada uno y realizar nuevos ejercicios de construcción en caso de ser necesario (para su resolución se puede organizar un sistema de apoyo, en que quienes van más avanzados apoyen a aquellos que se encuentran con más dificultades). Una vez resuelta la ficha se sugiere que sea revisada colectivamente.

En la Ficha 14 se plantea el problema de determinar la longitud de una diagonal de un cubo de arista de 5 cm de longitud sin desarmar el cubo. Para resolver este problema se espera que los estudiantes construyan un triángulo en el que conozcan 2 lados y el ángulo comprendido entre ellos y el tercer lado sea la diagonal del cubo. Una vez construido el triángulo, miden el lado que tiene la misma longitud de la diagonal.

Por ejemplo, se puede considerar el triángulo que se forma al unir dicha diagonal con una arista y la diagonal de una de las caras, como se muestra a continuación.



Luego, se reproduce el triángulo en cuestión, del que se conocen dos lados y el ángulo que forman. En efecto, se conoce la longitud de la arista del cubo (5 cm), se conoce la diagonal de la cara del cubo (ya que basta con dibujar un cuadrado de lado 5 cm y reproducir la longitud de su diagonal) y se conoce el ángulo que ellos forman (puesto que forman un ángulo recto). Finalmente, una vez reproducido dicho triángulo, se mide en él, con una regla, el lado correspondiente a la diagonal del cubo.



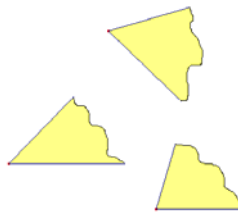
Diagonal del
cubo

Diagonal de una cara

Arista del cubo

II.3. Caracterización de un triángulo.

La etapa continúa con el desarrollo de la Ficha 15, en la que se plantea el caso de un vidrio que se ha roto de modo tal que solo se han podido conservar intactos sus tres ángulos. Frente a esta situación, se pide a los estudiantes que construyan un vidrio idéntico al que se rompió, directamente en una cartulina, utilizando para ello únicamente regla y compás.



Para el desarrollo de esta actividad se les dará una única oportunidad para que construyan el vidrio pedido. Una vez construido, se pide que lo recorten y se lo entreguen al profesor(a). Una vez que todos hayan construido y recortado el vidrio, se comparan en la pizarra las distintas construcciones. Se trata de que alumnas y alumnos visualicen que, si bien los vidrios construidos tienen todos la misma medida para sus ángulos internos, todos ellos son diferentes entre sí, no obstante tienen igual forma. Se espera que reconozcan que cuando se dispone únicamente de tres ángulos del triángulo, no se puede construir de manera certera dicho triángulo, lo que quiere decir que un triángulo no queda determinado por la medida de sus tres ángulos.

Una vez realizada esta actividad, con el fin de rescatar aquellos aspectos que consideramos importantes, se recomienda hacerles preguntas del tipo: ¿Fue posible saber cuál era exactamente el triángulo que se debía construir? ¿Por qué creen ustedes que no pudieron saber cuál era el vidrio que se pedía construir? ¿Cuántos triángulos distintos se pueden construir dados tres ángulos? ¿Cuántos datos se dieron para las construcciones previas a esta? ¿Cuántos datos conocían para poder realizar esta construcción? ¿Basta con

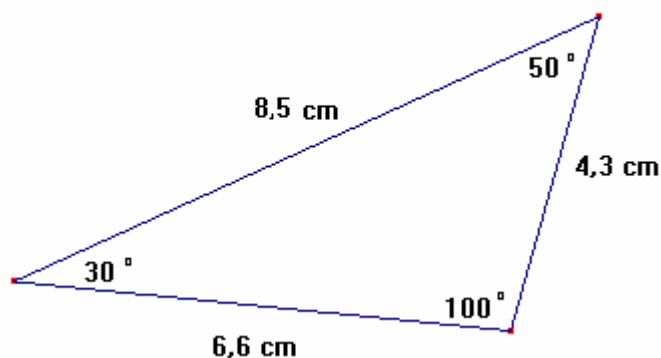
cualquier trío de datos para caracterizar un triángulo? Se espera que alumnas y alumnos sean capaces de reconocer que, a diferencia de lo que ocurrió para las construcciones realizadas en las actividades precedentes, si bien esta vez también conocían un total de 3 elementos del triángulo, no fue posible construir de manera certera el triángulo pedido. Esto debido a que existe más de un triángulo que cumple con la característica de poseer 3 ángulos determinados (en efecto, dados tres ángulos es posible construir infinitos triángulos). Esto quiere decir que no siempre que se conozca 3 elementos del triángulo existirá un único triángulo que cumpla con estas características y, por tanto, no siempre será posible su construcción inequívoca. Tras esta distinción, el docente les comenta que en la actividad que realizarán a continuación, el desafío estará, precisamente, en lograr caracterizar correctamente un triángulo.

Posteriormente, trabajan en parejas en la Ficha 16, la que consiste en un dictado de figuras, en la que tendrán que pedirle al profesor(a) un vidrio triangular. Para ello se les presentará a los estudiantes una situación en la que se solicita que, mediante un máximo de 3 datos, le indiquen al profesor las dimensiones del vidrio que se quiere reponer. Se pide, además, que ambos integrantes del grupo vayan juntos a pedirle el vidrio al profesor, exigiéndose que cada uno de los integrantes del grupo le pida individualmente un vidrio por medio de una información distinta a la de su pareja. El propósito de esta última exigencia es el de asegurarse que, al menos parte de las informaciones dadas por los estudiantes, no corresponda a la medida de sus tres lados. Esto debido a que podrían, astutamente, asegurarse de realizar exitosamente la tarea dando como datos únicamente las medidas de los tres lados del triángulo, en cuyo caso la tarea planteada no cumpliría con sus objetivos. Por esto, se sugiere que el profesor(a) exija que ambos alumnos vayan juntos a pedir el triángulo, de modo de corroborar que, efectivamente, ambos den una información distinta. También es conveniente que las parejas vayan de a una y no se junten adelante, de modo que no sepan la información que dan las otras parejas.

Frente a la solicitud, el profesor(a) les entregará un vidrio que cumpla con las condiciones señaladas por los estudiantes. En caso de que alguno de los dos vidrios entregados no coincida en el vitral, se deberá repetir la actividad previo análisis por parte de la pareja del fracaso obtenido. Es recomendable pedir a los alumnos, en caso de que el triángulo que ellos pidieran no calce en el vitral, que midan los distintos elementos del triángulo que se les dio para que puedan saber, exactamente, cuál es el error del mensaje que le entregaron al profesor. Una vez que ambos vidrios pedidos coincidan, deberán registrar la información que resultó exitosa.

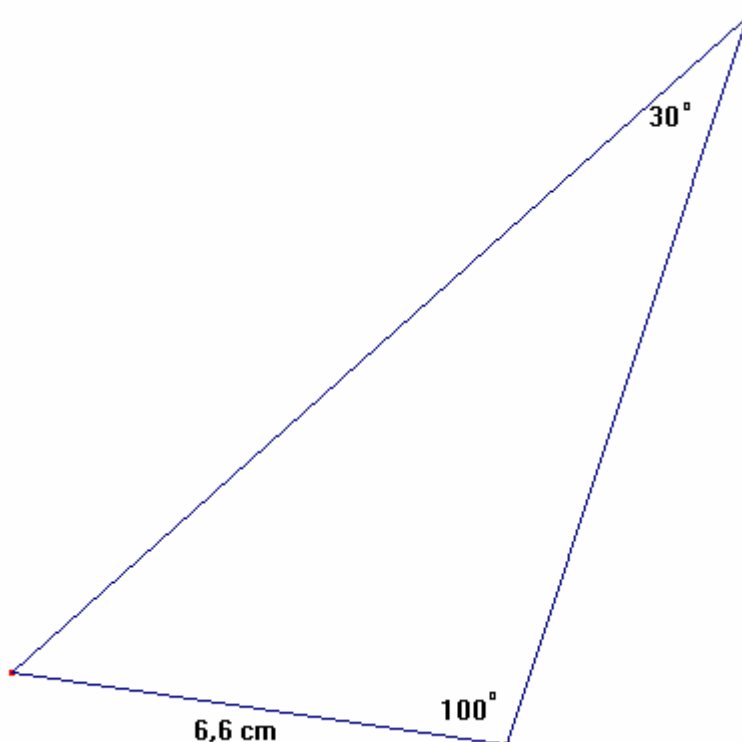
Es probable que algunos alumnos den como información la medida de un lado y dos ángulos, dejando implícito el hecho de que dichos ángulos subtienden al lado en cuestión (lo mismo en caso de dar la medida de dos lados y un ángulo, dejando implícito el hecho de que dichos lados forman al ángulo en cuestión), sin prever que deben explicitar dicha relación de orden. Por ello, uno de los propósitos de esta actividad es que alumnas y alumnos detecten que no es suficiente con conocer un lado y dos ángulos (o dos lados y un ángulo) de un triángulo para reproducirlo, sino que, además, es necesario conocer la relación de orden existente entre dichos elementos.

Para el desarrollo de esta actividad deberán caracterizar el triángulo que se muestra a continuación:



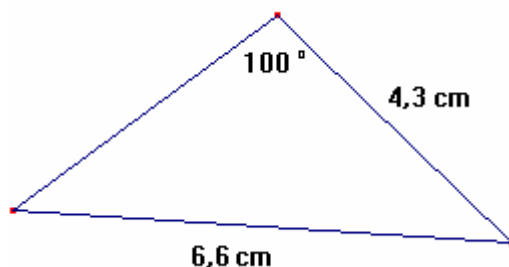
El profesor o profesora cuenta con un set de 12 tipos distintos de triángulos, disponibles en los materiales anexos del 4 al 9, en los que se señala el triángulo que debe entregar dependiendo de la información que los alumnos le den. *El profesor(a) deberá reproducir los triángulos de los anexos para que no le falten.*

Por ejemplo, si los alumnos piden un triángulo que tiene un lado de largo $6,6 \text{ cm}$ y dos ángulos de medida 30° y 100° (sin señalar que dicho lado se encuentra comprendido entre los ángulos dados, o que se trata de un triángulo ABC tal que $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 100^\circ$ y $AB = 6,6 \text{ cm}$ u otra relación de orden equivalente) entonces el profesor les entregará un triángulo que efectivamente tiene un lado de largo $6,6 \text{ cm}$ y dos ángulos de medida 30° y 100° , pero que no corresponde al del dibujo, por ejemplo:



Por otro lado, si le piden un triángulo que tiene dos lados de largo $6,6 \text{ cm}$ y $4,3 \text{ cm}$ y un ángulo de medida 100° (sin señalar que dicho ángulo es el formado por los lados en

cuestión, o que se trata de un triángulo ABC tal que $\alpha = 100^\circ$, $AC = 4,3$ cm y $AB = 6,6$ cm u otra relación de orden equivalente) entonces el profesor entregará un triángulo que efectivamente tiene dos lados de largo 6,6 cm y 4,3 cm y un ángulo de medida 100° , pero que no corresponde al del dibujo, por ejemplo:



Así sucesivamente, hasta que alumnas y alumnos le den un mensaje que incluya, además de los elementos correctos que permitan caracterizar dicho triángulo, la ubicación relativa de dichos elementos, en cuyo caso, el profesor les entregará el triángulo correcto. Por ejemplo, para los casos anteriores una de las tantas formas posibles de dar correctamente la información sería:

- 1) Para el primer caso: un triángulo que tiene un lado de largo 6,6 cm que se encuentra comprendido entre dos ángulos de medida 30° y 100° .
- 2) Para el segundo caso: un triángulo que tiene dos lados de largo 6,6 cm y 4,3 cm que forman un ángulo de medida 100° .

Otro objetivo de esta actividad es que alumnas y alumnos refuercen el hecho de que, si bien es cierto que un triángulo puede caracterizarse con un mínimo de 3 elementos, no queda determinado por la medida de tres cualesquiera de sus elementos. Es importante que ellos identifiquen aquellos tríos de elementos que sí permiten caracterizar un triángulo, esto es, la medida de dos de sus lados y del ángulo que ellos forman, la medida de dos de sus ángulos y del lado que ellos subtienden o la medida de sus tres lados. Se trata de que reconozcan que las construcciones de las actividades anteriores (Fichas 9 a la 12) pudieron realizarlas y estas fueron únicas debido a que los triángulos en cuestión quedaban caracterizados por los elementos que se conocían de los mismos.

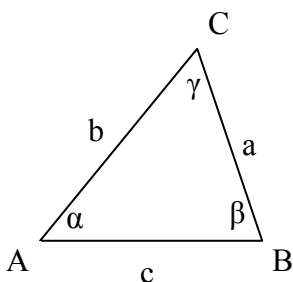
En este punto es necesario aclarar que existen otras formas de caracterizar un triángulo. Una posible forma es mediante la información relativa a dos de sus ángulos y un lado cualquiera (que no sea aquel que queda comprendido por los ángulos mencionados). Esto se debe a que, conocidos dos ángulos de un triángulo, el ángulo restante queda determinado. Por esta razón, conocer dos ángulos y un lado cualquiera es equivalente a conocer tres ángulos y un lado, y por lo tanto, equivalente a conocer dicho lado y los dos ángulos que lo subtienden. Este es un razonamiento que no se encuentra al alcance de estos estudiantes, ya que aún no conocen la relación existente entre los ángulos internos de un triángulo. Por esta razón, en caso de que aparezca esta forma de caracterizar un triángulo, es importante que al igual que las otras sea debidamente aceptada como caracterización del triángulo, pero siempre y cuando la relación de orden sea explicitada. Más adelante, cuando los alumnos conozcan la relación existente entre los ángulos internos de un triángulo, se podrá estudiar con ellos la equivalencia entre esta manera de caracterizar un triángulo y aquella en la que se conocen dos ángulos y el lado que ellos subtienden. De todos modos, en caso de que surja esta combinación de elementos de parte de los estudiantes, resulta interesante invitarles a realizar la

construcción de un triángulo conocidos dos de sus ángulos y un lado cualquiera (idealmente, se deberá pedir que realicen la construcción con modelos hechos en cartulina de los ángulos y el lado conocidos).

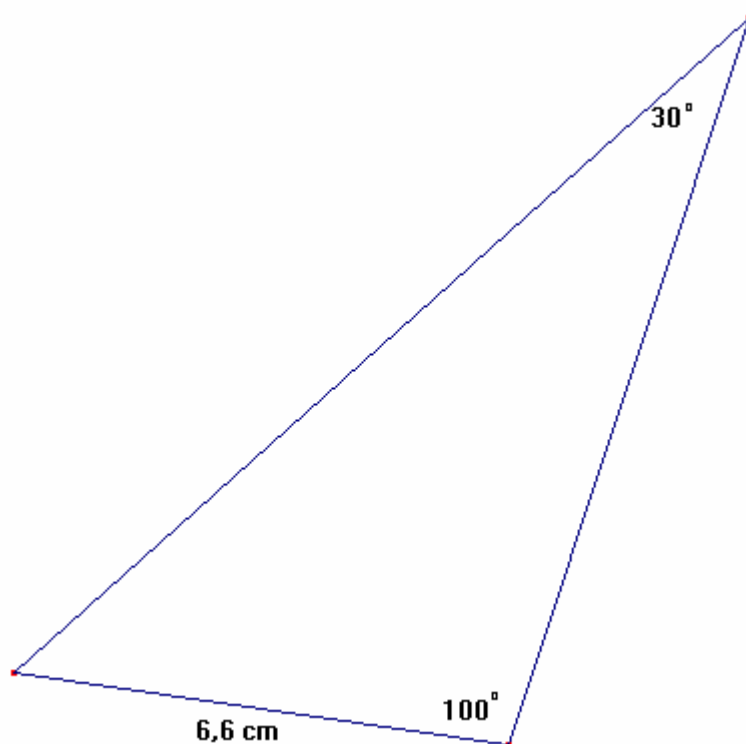
Por otro lado, si se conocen dos lados cualesquiera de un triángulo y el ángulo que se opone al mayor de dichos lados, la construcción de un triángulo con estas condiciones también es única, lo que significa que el triángulo en cuestión queda determinado con dicha información. Esto no ocurre si se conocen dos lados del triángulo y el ángulo que se opone al menor de dichos lados, en cuyo caso pueden existir hasta dos triángulos distintos dados estos elementos (ninguno, uno o dos). Esta es una distinción muy sutil, razón por la cual recomendamos considerar ambos casos como si fueran un único caso, esto es, dos lados y el ángulo que se opone a uno cualquiera de estos lados, teniendo presente que dicha información no siempre permite caracterizar un triángulo.

Es bueno tener presente que podría ocurrir que algún alumno o alumna dé como información dos lados y el ángulo que se opone a alguno de estos lados y justo haya coincidido que exista un único triángulo con dichas características (por haber escogido precisamente el ángulo que se oponía al mayor de los lados). En este caso, sería importante averiguar con el resto del curso si es que alguien dio también como información dos lados y el ángulo que se oponía a alguno de ellos y el triángulo pedido no coincidió con el del vitral. De ser así, este contraejemplo podría mostrar directamente que un triángulo no necesariamente queda determinado por dos lados y el ángulo que se opone a alguno de ellos, y que por tanto dicha información no me permite caracterizar un triángulo. En caso contrario no hay que preocuparse, dado que la actividad que se propone a continuación tiene como objetivo mostrar que, al tener dos lados y un ángulo cualquiera que no esté formado por estos dos lados, el triángulo no necesariamente queda determinado y, por tanto, dicha información no nos permite caracterizar un triángulo.

El último objetivo a destacar es que el desarrollo de esta ficha deja en evidencia la necesidad de disponer de una simbología especial que permita referirse a los distintos elementos del triángulo, indistintamente, de modo de poder dar un orden a los elementos que se está comunicando. Por ejemplo, dado un triángulo ABC, una de las formas de designar los distintos elementos de él es:



Para un desarrollo fluido de la actividad, se recomienda que el profesor(a) consiga 12 cajitas para colocar en cada una de ellas, por separado, varias reproducciones de cada uno de los 12 tipos de triángulos con los que cuenta y que anote, afuera de las cajitas, la información para la cual deberá entregar los triángulos que están dentro de cada una de ellas. Por ejemplo, si en una caja se ponen todos los triángulos iguales al siguiente:



En la caja deberá decir que esos triángulos se entregarán si es que los alumnos piden:

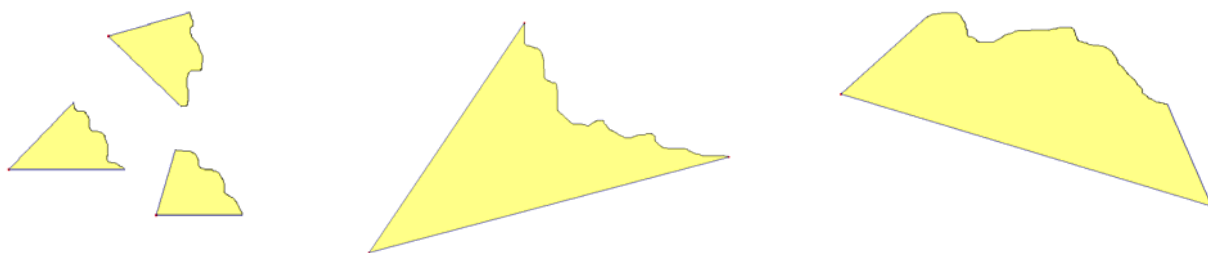
- Un triángulo que posea un ángulo de 30° , un ángulo de 100° y un lado de 6,6 cm, sin indicar el orden de los elementos (lo que podría anotarse de manera más resumida como: $A = 30^\circ$, $A = 100^\circ$ y $L = 6,6$ cm);
- Un triángulo que posea un ángulo de 30° , un ángulo de 50° y un lado de 6,6 cm, sin indicar el orden de los elementos ($A = 30^\circ$, $A = 50^\circ$ y $L = 6,6$ cm);
- Un triángulo que posea un ángulo de 50° , un ángulo de 100° y un lado de 6,6 cm, sin indicar el orden de los elementos ($A = 50^\circ$, $A = 100^\circ$ y $L = 6,6$ cm);
- Un triángulo con solo dos datos, un lado de longitud 6,6 cm y un ángulo de 30° o 50° o 100° ($A = 30^\circ$ y $L = 6,6$ cm; $A = 50^\circ$ y $L = 6,6$ cm; $A = 100^\circ$ y $L = 6,6$ cm).

De este modo, cada docente podrá identificar fácilmente el triángulo que deberá entregar cuando se lo soliciten.

Una vez realizada esta actividad, se recomienda gestionar una puesta en común del trabajo realizado por los alumnos y alumnas, mediante preguntas del tipo: Del conjunto de mensajes dados, ¿cuál de ellos les resultó exitoso? ¿Por qué creen ustedes que esos mensajes resultaron exitosos? ¿Qué información les faltó en aquellos casos en que la información no fue suficiente? ¿Cuál es la mínima cantidad de datos que se debe entregar para caracterizar (describir) un triángulo? Se espera que los alumnos reconozcan que basta con conocer tres elementos básicos de un triángulo cualquiera para poder caracterizarlo, tres lados, dos lados y el ángulo que ellos forman o dos ángulos y el lado que ellos subtenden, pero sin olvidar explicitar la relación de orden existente entre estos tres elementos.

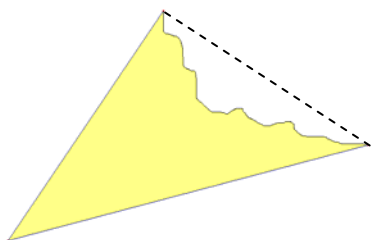
Es importante que alumnas y alumnos visualicen por qué ocurre esto. Se recomienda invitarles a reflexionar respecto a la diferencia que existe entre tener, por ejemplo, un triángulo roto en uno de sus lados, un triángulo roto en un vértice o un triángulo roto de

manera tal que permanecieron intactos solo sus tres vértices (mostrar los respectivos dibujos).

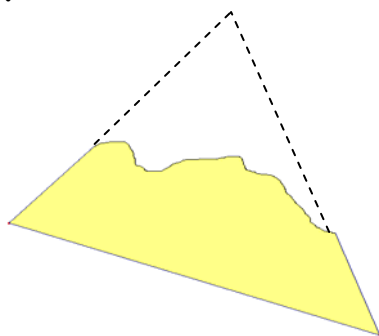


Para guiar la reflexión, se les puede preguntar: ¿Cuál(es) de ellos se puede reconstruir más fácilmente? ¿Por qué? ¿Cuál es la diferencia entre la información conocida, que facilita su construcción?

Se espera que alumnas y alumnos reconozcan que, si se borra el tercer lado de un triángulo, este queda implícito, ya que midiendo la distancia entre los dos extremos de los lados conocidos, se puede conocer la medida del lado desconocido. Del mismo modo, si se unen los vértices de los dos lados conocidos, se obtiene el lado desconocido. Esto debido a que es el ángulo que hay entre los lados conocidos, el que permite fijar dichos lados y rigidizar la figura. Por esta razón, un triángulo queda determinado si se conocen la medida de dos de sus lados y del ángulo que ellos forman.



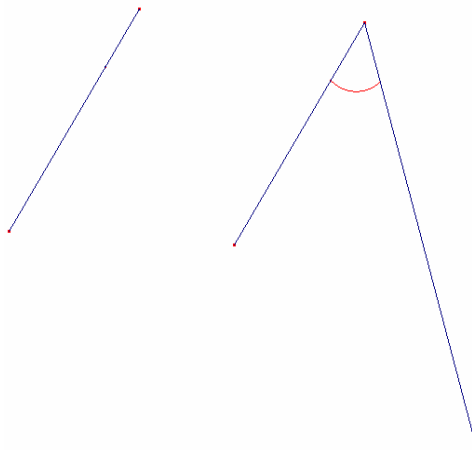
Por otro lado, es importante que visualicen que, cuando se tiene un triángulo roto en un vértice, si se extienden los lados del triángulo roto estos se intersectan justo en el tercer vértice del triángulo que se busca y no en otro punto. Los ángulos conocidos le dan rigidez a la figura que se tiene, direccionando los lados desconocidos, los que se intersectan en un único punto (ya que dos rectas no paralelas se intersectan en un único punto). Por esta razón, un triángulo queda caracterizado por la medida de dos ángulos y del lado que ellos comprenden, dado que los ángulos conocidos nos señalan la dirección exacta que tienen los lados desconocidos del triángulo y, por tanto, nos entregan información implícita respecto del punto en el que se han de juntar dichos lados (el tercer vértice del triángulo).



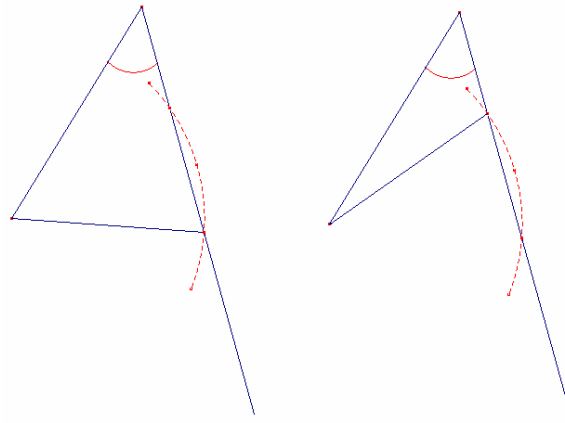
Este es el momento de resolver, en grupos de 4 integrantes, la Ficha 17. En esta ficha se propone un trabajo de construcción en que se pide construir un triángulo, contando para ello únicamente de los modelos hechos con cartulina de dos de sus lados y del ángulo que se opone al menor de esos lados (dejando abierta la posibilidad de utilizar regla y compás, en caso de considerarlo necesario). Se propone a los grupos estudiar la posibilidad de construir más de un triángulo con la información con que se cuenta. Se trata de que descubran que con esos datos es posible construir hasta dos triángulos diferentes y que, por tanto, no es posible construir de manera certera el triángulo que nos están pidiendo.

Al momento de revisar esta ficha, una vez que se haya evidenciado la existencia de 2 posibles triángulos que cumplen con las condiciones dadas, se recomienda invitarles a continuar con la investigación. Se sugiere realizar preguntas como las siguientes: ¿Cómo realizaron la construcción? ¿Será siempre posible construir un triángulo cuando se conocen dos lados y el ángulo que se opone a uno de esos lados? ¿En qué casos no es posible encontrar un triángulo que cumpla con esta información? ¿En qué casos existe un único triángulo que cumpla con las condiciones dadas? Es importante que para cada una de las preguntas se dé el tiempo necesario para investigar la situación en cuestión y dar una respuesta justificada, como las que se señalan a continuación:

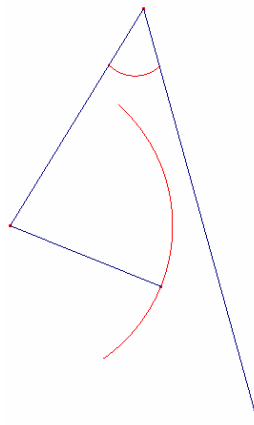
⇒ ¿Cómo realizaron la construcción? Para realizar la construcción, se debe primero dibujar el lado mayor y en uno de sus extremos se dibuja el ángulo que se ha dado.



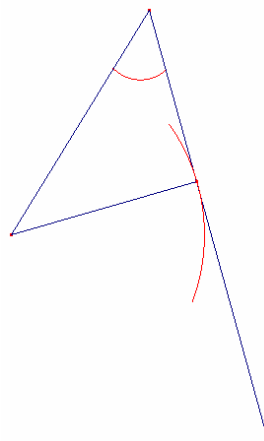
En el otro extremo del lado dibujado se debe dibujar el otro lado dado con una inclinación tal que su extremo libre coincida justo con el lado que se ha formado al dibujar el ángulo. De donde pueden obtenerse hasta 2 triángulos diferentes:



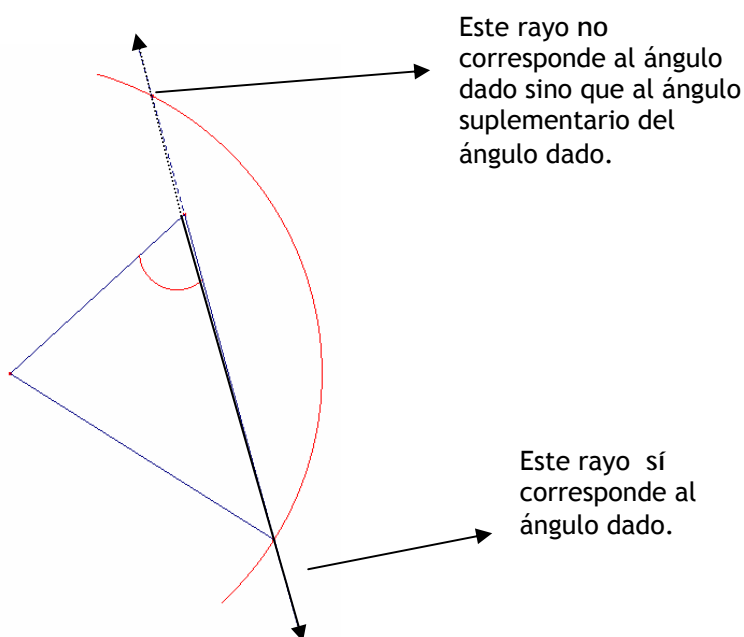
⇒ ¿Será siempre posible construir un triángulo cuando se conocen dos lados y el ángulo que se opone a uno de esos lados? ¿En qué casos no es posible encontrar un triángulo que cumpla con esta información? La respuesta correcta a estas preguntas es que dicha construcción no es siempre posible, ya que el lado más corto podría no coincidir, en ningún punto, con el lado que se ha formado al dibujar el ángulo, como se muestra en el siguiente dibujo:



⇒ ¿En qué casos existe un único triángulo que cumpla con las condiciones dadas? La respuesta correcta a esta pregunta es que la construcción es única si el lado más corto coincide en un solo punto con el lado que se ha formado al dibujar el ángulo, por ejemplo:



En particular, si el ángulo dado se opone al lado mayor, este también interceptará en un solo punto del lado que se ha formado al dibujar el ángulo, como se muestra a continuación:



En el cierre de esta actividad es importante insistir en el hecho de que no siempre que se conozcan tres elementos de un triángulo es posible construirlo (o reproducirlo) de manera certera. Para el caso en que se conocen tres lados del triángulo, o dos lados y el ángulo que ellos forman, o dos ángulos y el lado comprendido entre ellos, esto sí es posible. Sin embargo, esto no ocurre para el caso en que se conocen tres ángulos del triángulo (en cuyo caso se obtienen infinitos triángulos de igual forma, pero de distinto tamaño) ni para el caso en que se conocen dos lados y un ángulo que se oponía a uno de esos lados (en cuyo caso se pueden construir hasta dos triángulos diferentes).

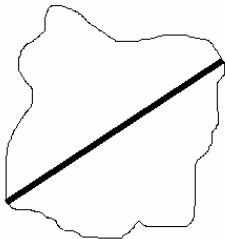
Finalmente, se realiza un trabajo que tiene como propósito que alumnas y alumnos se enfrenten a distintos problemas de construcción como los estudiados en la Unidad, de modo que tengan una oportunidad de recordar, practicar y reforzar las técnicas de construcción que ellos elaboraron.

Para ello, en una primera instancia, el profesor(a) recuerda con el curso los aprendizajes de la Unidad realizando preguntas del tipo: ¿Qué trío de elementos del triángulo me permite caracterizarlo? ¿Cuáles no? ¿Cómo se puede construir un triángulo si solo se conoce la medida de sus tres lados? ¿Cómo se puede construir un triángulo si se conocen la medida de dos de sus ángulos y del lado que ellos comprenden? ¿Cómo se puede construir un triángulo si se conocen la medida de dos de sus lados y del ángulo que ellos forman? ¿Se puede construir un polígono de 4 lados o más si solo se conoce la medida de sus lados? ¿Cómo se puede hacer para reproducir un polígono de cuatro o más lados utilizando únicamente regla y compás? ¿Por qué? ¿Cómo se puede reproducir un ángulo con el uso de regla y compás? Posteriormente, los alumnos trabajan individualmente en la Ficha 18, que contiene diversos problemas de construcción, como los trabajados durante la Unidad. Es importante que este trabajo sea realmente desarrollado de manera individual, para dar la oportunidad a los estudiantes de ir consolidando las técnicas construidas. Se recomienda que el profesor(a) supervise en todo momento el trabajo, de modo de detectar el nivel de apropiación de las técnicas y conocimientos

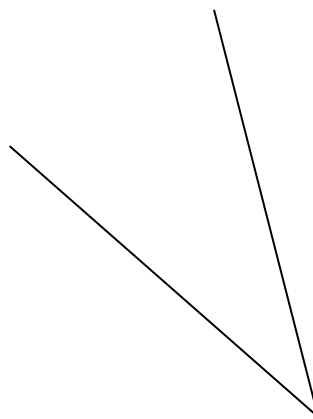
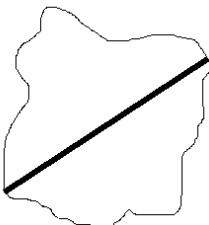
estudiados por cada uno y realizar nuevos ejercicios de construcción en caso de ser necesario. Una vez resuelta la ficha, se sugiere que sea corregida colectivamente.

En la Ficha 19 se proponen 3 problemas en que, para resolverlos, niños y niñas deberán utilizar los conocimientos aprendido en la unidad. En el problema 1, se pide determinar la altura y la longitud de los lados de igual medida de un triángulo isósceles del que se conocen únicamente la longitud de la base y los ángulos basales. Como todo triángulo queda caracterizado por un lado y los dos ángulos que lo comprenden, para resolver este problema la técnica óptima consiste en construir el triángulo que se está caracterizando y medir en él la altura y los lados de igual medida.

Por otro lado, en el problema 2 se pregunta cómo se puede saber la distancia que existe entre dos puntos de una roca.

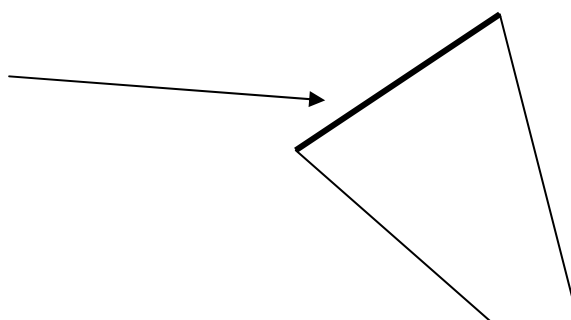


Para ello, la técnica a la que pueden acudir los estudiantes con los aprendizajes que poseen, es la de construir un triángulo para el cual la distancia a medir corresponda a uno de sus lados, tal y como se muestra a continuación:



Luego, se reproduce ese triángulo en una hoja cualquiera, utilizando como información los dos lados y el ángulo conocidos. Finalmente, en el triángulo que se ha dibujado se mide la distancia que se quiere conocer.

Se mide esta distancia, que es la que se quiere conocer.



Se sugiere que el profesor(a) invite a su curso a realizar experimentalmente esta actividad. Para ello, se puede construir una “piedra” con plasticina y atravesarle un trozo de un palito de brocheta de madera (palito de maqueta, bombilla o mondadientes) y pedirles que determinen cuál es la distancia entre los extremos del palito. Para formar el triángulo mencionado, los alumnos pueden utilizar palitos de brochetas (o palitos de maqueta, etc.). Es importante que el trabajo lo realicen en pareja, de modo que mientras uno de los integrantes del grupo sujeta el triángulo construido, el otro intente reproducirlo. Una vez que hayan encontrado la medida que se pide, pueden comprobar su trabajo midiendo la longitud del palito que estaba originalmente dentro de la plasticina.

Finalmente, en el problema 3 se pide comprobar que los dos triángulos que se forman al trazar una diagonal de un rectángulo son iguales. Para ello, basta con percatarse de que los tres lados de ambos triángulos son respectivamente iguales, y como existe un único triángulo que tiene por lados tres medidas dadas, entonces dichos triángulos son idénticos.

Durante el cierre de esta etapa, es importante repasar con el curso todos los aprendizajes de la unidad.

Por último, al término de esta etapa se lleva a cabo la aplicación de la prueba final de la unidad. Se sugiere que en un primer momento se les facilite a los estudiantes únicamente regla y compás. Posteriormente, para la resolución de las dos últimas preguntas, será necesario que dispongan también de transportador. Una vez aplicada esta prueba, se sugiere que el profesor(a) realice una corrección de la prueba en la pizarra, preguntando los procedimientos que utilizaron. Si hubo errores, averiguar por qué los cometieron.

V PLANES DE CLASES

Planes de clases de la PRIMERA ETAPA

Séptimo Básico - Segundo

Semestre

Materiales: Cuaderno de matemáticas, hojas blancas, regla graduada, regla no graduada, compás y tijeras. Fichas 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8 para cada alumno. Para la clase 3 y 4, se necesitan las varillas del **material recortable 1**, recortadas y perforadas.

Tarea matemática: Ubican el tercer vértice de un triángulo si se conoce la ubicación de dos vértices y la distancia que hay entre ellos; Reproducen un triángulo idéntico a uno conocido; Construyen triángulos conocidas las medidas de sus 3 lados; Reproducen un cuadrilátero idéntico a uno conocido; Construyen un cuadrilátero conocida la medida de sus 4 lados y una de sus diagonales; Reproducen polígonos idénticos a uno conocido; Construir cuadriláteros y pentágonos conocidos sus lados, algunas diagonales u otros segmentos que los triangulan.

Actividades

Clase 1: En esta clase alumnas y alumnos ubican el tercer vértice de un triángulo si se conoce la ubicación de dos de sus vértices y la distancia que hay entre ellos. Durante esta clase resolverán las **Fichas 1 y 2**.

Se proponen situaciones que permitan a los estudiantes buscar técnicas para resolver el problema de ubicar un punto en un plano teniendo como referencia otros dos puntos y la distancia a la que se encuentra de ellos. Las técnicas surgidas en la clase se deberán comparar y poner a prueba utilizándolas en las actividades propuestas, para seleccionar la más eficiente.

La profesora o profesor plantea el problema de la **Ficha 1**, en donde los alumnos deberán ubicar el lugar para plantar un naranjo a 5 metros del limón y a 6 metros del durazno. Permitir que exploren cómo ubicar el punto, utilizando el instrumento que hayan seleccionado. El trabajo en la clase se debe concentrar en la comparación de técnicas utilizadas para ubicar el punto, contrastando la ubicación del punto utilizando la regla y/ o el compás.

Se sugiere pedir que quienes lo hicieron con compás lo hagan con la regla y viceversa, y que comparen las ventajas y desventajas de usar uno u otro instrumento.

Posteriormente, proponga la actividad de la **Ficha 2**, con la intención de que pongan a prueba las técnicas que están aprendiendo.

Cierre:

Se espera que concluyan que, para encontrar los puntos que se encuentra a una distancia conocida de otros dos, el compás es el instrumento que permite encontrar **todos** los puntos, con más rapidez y mayor precisión. La razón de esto es que con el compás se encuentran todos los puntos que están a una distancia dada de un punto fijo en un plano. Por ejemplo, cuando se ubica el compás en un punto (P), con una abertura de 5 cm y se traza un arco de circunferencia, los puntos de dicho arco se encuentran todos a 5 cm del punto P. Si se realiza nuevamente esta operación en otro punto (Q) y ahora con una abertura de 6 cm, los **dos puntos** en que se intersecten los arcos de circunferencia, cumplirán con una doble condición: están a 5 cm del punto P y 6 cm del punto Q. Si se unen los puntos P y Q entre sí y con uno de los puntos encontrado se forma un

triángulo.

Clase 2: En esta clase alumnas y alumnos reproducen un triángulo a partir de uno conocido y construyen triángulos conociendo las medidas de sus 3 lados. Durante esta clase resolverán las **Fichas 3 y 4**.

Se proponen situaciones donde los alumnos pondrán en juego conocimientos matemáticos relacionados con la construcción y congruencia de triángulos.

La profesora o profesor plantea el problema de la **Ficha 3**, en donde los alumnos deberán construir un triángulo para reponer un trozo de un vitral que se ha quebrado.

Se deberá cautelar algunas condiciones desde el punto de vista de la gestión como son: que los niños no tengan permanentemente el vitral en sus manos; además, el vitral debiera estar pegado en la pizarra o en alguna de las paredes de la sala, para plantearles a los niños en la consigna *que tienen una sola oportunidad para ir a medir lo que consideren necesario para reproducir el trozo que falta*.

Posteriormente, el profesor (a) conduce una discusión sobre los distintos procedimientos utilizados para construir el triángulo, relacionándolos con los utilizados en la clase anterior.

Con el objetivo de profundizar en el dominio de la técnica para construir un triángulo a partir de sus lados y en el conocimiento del triángulo se propone al curso que realicen la **Ficha 4**.

Cierre: Del trabajo realizado se espera que se concluya que:

- Para construir un triángulo se necesita conocer la ubicación de sus tres vértices, lo que es equivalente a conocer la medida de sus tres lados.
- Los triángulos que tienen dos lados de la misma longitud, si se superponen son idénticos. Para superponerlos a veces basta trasladarlos y en otras es necesario reflejar uno de ellos.
- Con tres segmentos no siempre es posible construir un triángulo.
- Para referirse a un triángulo se utiliza una simbología ΔABC donde A, B y C corresponden a sus vértices.

Clase 3: En esta clase alumnas y alumnos construyen cuadriláteros conocida la medida de sus 4 lados, reproducen un cuadrilátero a partir de uno conocido y construyen un cuadrilátero conocida la medida de sus 4 lados y una diagonal. Durante esta clase resolverán la **Ficha 5**.

Las situaciones que se proponen deben permitir que los alumnos recuerden que los cuadriláteros son figuras deformables a diferencia del triángulo que no lo es. Basados en este principio aprenderán que para construir un cuadrilátero idéntico a otro, deberán recurrir a la triangulación.

El profesor o profesora les entrega un set de varillas perforadas y les pide que formen y dibujen un cuadrilátero idéntico a uno que tiene dibujado en una hoja. Para que lo hagan les proporciona como información la medida de sus cuatro lados (18 cm, 13 cm, 12 cm, 10 cm)

Una vez que los alumnos formen un cuadrilátero con las varillas y lo hayan dibujado, promueve que comparen sus producciones entre ellos, haciéndoles preguntas del tipo: ¿Cuál de los cuadriláteros que han hecho será igual al que tengo dibujado? (no se les muestra todavía el cuadrilátero) ¿Qué diferencias hay entre los cuadriláteros que han dibujado? Si tuvieran que escoger uno, ¿con cuál se quedarían? Se espera que se den cuenta que hay muchos cuadriláteros que tienen los lados de la misma medida y sin embargo tienen distinta forma. La pregunta que es importante plantear a los alumnos es: ¿Qué se necesitaría saber, además de la longitud de los lados, para hacer un cuadrilátero idéntico al que está en la hoja?

De la discusión grupal que realicen los estudiantes, se espera que recuerden lo aprendido en 4° y 5° básico y pidan como información la longitud de una de las diagonales para tornar rígido al cuadrilátero. Entonces el profesor les dará como información la longitud de la diagonal (**16 cm**) que va del vértice donde se interceptan los lados de longitud 12 cm y 13 cm, al vértice donde se interceptan los lados de longitud 18 cm y 10 cm.

Una vez que hayan comprobado que al poner una diagonal en el cuadrilátero formado con varillas ya no se deforma, el profesor (a) plantea el problema de la **Ficha 5**, en donde deberán construir un cuadrilátero para reponer un trozo de un vitral que se ha quebrado.

Se deberá cautelar algunas condiciones desde el punto de vista de la gestión como son: que los niños no tengan permanentemente el vitral en sus manos; además, el vitral debiera estar pegado en la pizarra o en alguna de las paredes de la sala, para plantearles a los niños en la consigna *que tienen una sola oportunidad para ir a medir lo que consideren necesario para reproducir el trozo que falta*.

Posteriormente, el profesor (a) conduce una discusión sobre los distintos procedimientos utilizados para construir el cuadrilátero, relacionándolos con los utilizados en la clase anterior.

Cierre:

De este trabajo realizado se espera que en la clase se concluya que:

- El triángulo es una figura “indeformable”, es decir, no se puede deformar sin modificar la longitud de sus lados.
- Para evitar que un cuadrilátero se deforme se debe triangular.
- Con la medida de los cuatro lados, el orden en que se encuentran y la medida de una de las diagonales, señalando entre qué vértice se ubica, se puede formar **un único cuadrilátero**.
- La triangulación de un cuadrilátero es la estrategia que permite construir un cuadrilátero idéntico a otro.
- Para construir un cuadrilátero se necesita construir dos triángulos que tienen en común la diagonal.

Clase 4: En esta clase alumnas y alumnos construyen cuadriláteros y pentágonos idénticos a uno conocido. Durante esta clase resolverán las **Fichas 6 y 7.**

Las situaciones propuestas contribuirán para que los niños adquieran más dominio de la técnica para construir cuadriláteros, basada en la triangulación y la amplíen para la construcción de pentágonos.

La *primera actividad* de la **Ficha 6** tiene como propósito que adquieran práctica en la construcción de cuadriláteros basándose en la triangulación. Una vez que hayan dibujado el cuadrilátero, es conveniente que comprueben que es idéntico al original. Para ello se recomienda tener recortadas un par de figuras.

En la *segunda actividad* de la **Ficha 6** deberán construir un cuadrilátero conocidos sus lados y una de sus diagonales. El cuadrilátero a construir es un rombo, figura que tiene la característica de tener todos sus lados iguales y las diagonales diferentes.

La *tercera actividad* de la **Ficha 6** tiene el desafío para los alumnos de comunicar por escrito a otra persona, lo que hacen para reproducir un cuadrilátero. Se busca con esto crear la necesidad de adoptar una escritura que facilite referirse a los vértices, a los segmentos y a los arcos que se hacen con el compás.

Posteriormente, el profesor (a) plantea el problema de la **Ficha 7**, en donde los alumnos deberán construir un pentágono para reponer un trozo de un vitral que se ha quebrado.

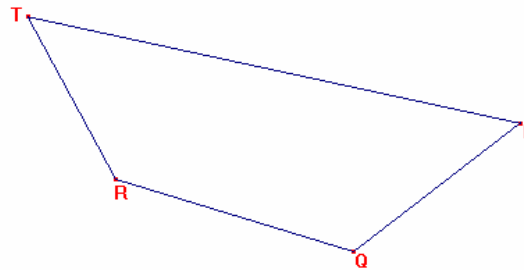
Se deberá cautelar las mismas condiciones que en actividades similares realizadas anteriormente: los niños no deberán tener el vitral en sus manos. Debe estar pegado en la pizarra o en alguna de las paredes de la sala e informarles a los alumnos *que tienen una sola oportunidad para ir a medir lo que consideren necesario para reproducir el trozo que falta.*

Posteriormente, el profesor (a) conduce una discusión sobre los distintos procedimientos utilizados para construir el pentágono, relacionándolos con lo realizado para construir cuadriláteros.

Cierre:

De este trabajo realizado se espera que en la clase se concluya que:

- La triangulación de un cuadrilátero o un pentágono es el procedimiento que permite construir un cuadrilátero o pentágono idéntico a otro.
- Para construir un cuadrilátero se necesita construir dos triángulos, que tienen en común un lado que corresponde a la diagonal del cuadrilátero.
- Para construir un pentágono se necesita descomponerlo en tres triángulos.
- Para referirse a los vértices se utilizan letras mayúsculas y para los lados se utilizan las dos letras con las que se han designado los puntos de sus extremos. Por ejemplo, los vértices del cuadrilátero son P, Q, R y T, y sus lados son RQ, QP, PT y TR.



Para comunicar la acción realizada con el compás se necesita hacer mención de dos aspectos: dónde se ubica el compás y con qué abertura se traza el arco. La escritura formal que se utiliza es $\odot(R, 5 \text{ cm})$, que significa: arco con centro en el punto R y abertura 5 cm.

Clase 5: En esta clase alumnas y alumnos reproducen un polígono a partir de uno conocido y construyen un polígono conocida la medida de sus lados y algunas diagonales o de otros segmentos que lo triangulan.

Durante esta clase resolverán la **Ficha 8**.

Las situaciones propuestas tienen como propósito que adquieran mayor dominio de la técnica de la triangulación para construir polígonos, comprobando que no existe una única forma de triangular para reproducir un polígono.

La *primera actividad* de la **Ficha 8** tiene como propósito que los alumnos adquieran práctica en la construcción de cuadriláteros basándose en la triangulación. Una vez que hayan dibujado el pentágono, es conveniente que comprueben que es idéntico al original. Para ello se recomienda tener recortadas un par de figuras.

En la *segunda actividad* de la **Ficha 8** deberán comparar dos procedimientos para construir un hexágono. Es conveniente que antes de realizar la construcción con los instrumentos, hagan un bosquejo y respondan preguntas del tipo: ¿Con ambos procedimientos se logrará construir un hexágono de la misma forma?

Promueva que realicen la construcción del hexágono utilizando ambos procedimientos.

Cierre:

De este trabajo realizado se espera que en la clase se concluya que:

- Es necesaria la descomposición de los polígonos en triángulos, porque el triángulo es una figura “indeformable”, es decir, no se puede deformar sin modificar la longitud de sus lados. Por lo tanto, a través de triángulos se puede llegar a construir un polígono idéntico a otro.
- Para planear la construcción de un polígono se puede triangular de diferentes maneras, logrando con cada una formar un polígono idéntico a uno original.

Planes de clases de la SEGUNDA ETAPA

Séptimo Básico -

Segundo Semestre

Materiales: Regla graduada y compás. También se necesita una **Ficha 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 y 19** para cada niño o niña. **Para** el profesor, los **materiales anexos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9**

Tarea matemática: Construyen triángulos; Reproducen triángulos; Caracterizan un triángulo.

Actividades

Clase 6: En esta clase, alumnas y alumnos construyen triángulos conociendo las medidas de dos de sus lados y del ángulo que ellos forman, utilizando para ello modelos de los dos lados, hechos con cartulina y del ángulo conocidos o solo con regla y compás. Durante esta clase los alumnos resolverán las **Fichas 9 y 10**.

El profesor(a) les plantea una situación en la que se cuenta con un vidrio triangular perteneciente a un vitral, al que se le ha roto uno de los lados de modo tal que sus otros dos lados y el ángulo que ellos forman han permanecido intactos. Frente a esta situación, se pide a los alumnos que construyan un vidrio igual a aquel que se ha roto, contando para ello únicamente de un modelo de los elementos que permanecieron intactos en el vidrio roto. Esto es, se cuenta únicamente con los modelos en cartulina de los dos lados y al ángulo del vidrio que no se rompieron. Para ello, los alumnos resolverán la **Ficha 9**. Una vez que hayan construido su vidrio, deberán ir a la pizarra y comprobar si coincide con el dibujo del vidrio roto disponible (**material anexo 2**). En caso de no coincidir el vidrio construido con el modelo de la pizarra, deberán intentar construirlo nuevamente. Una vez resuelta la ficha, se invita a los estudiantes a compartir colectivamente las técnicas utilizadas.

A continuación, el profesor(a) plantea una situación igual a la inicial en la que se cuenta con un vidrio triangular, distinto del anterior, que también está roto en uno de sus lados, tal y como se describe más arriba. A diferencia del caso anterior, esta vez los alumnos cuentan únicamente con el dibujo de los lados y del ángulo del vidrio que permanecieron intactos, y el profesor les pide que reconstruyan el vidrio roto utilizando únicamente regla y compás (suponiendo el hecho de que no se cuenta con transportador). Se pedirá también que el vidrio sea construido directamente sobre una hoja de cartulina, sin el uso de ninguna hoja anexa. Para ello, en esta oportunidad los alumnos resolverán la **Ficha 10**. Al igual que para el caso antes descrito, una vez que hayan construido su vidrio, deberán ir a la pizarra y comprobar si este coincide con el dibujo del vidrio disponible (**material anexo 2**). En caso de no coincidir el vidrio construido con el de la pizarra, deberán intentar construirlo nuevamente.

En caso de que a los alumnos no se les ocurra la manera de construir el triángulo en cuestión, se les puede apoyar con preguntas del tipo: ¿Cómo lo hiciste para realizar la construcción cuando disponías de los modelos del ángulo y de los lados? ¿Cuál es la razón por la cual no has conseguido realizar la construcción sin disponer de los modelos? Olvídate por un instante del triángulo y céntrate solo en el dibujo del ángulo que te dieron, ¿cómo podrías reproducir el ángulo utilizando solo compás y regla? Se espera que los alumnos visualicen que, al igual como lo hicieron al reproducir polígonos, para reproducir ángulos pueden acudir a la técnica de triangulación.

Una vez resuelta la ficha, se invita a los estudiantes a compartir colectivamente las técnicas utilizadas.

Cierre:

Durante el cierre, es importante institucionalizar las técnicas utilizadas en la resolución de los problemas trabajados, esto es:

- Para **reproducir ángulos** con regla y compás, unen dos puntos cualesquiera de los lados del ángulo de modo de formar un triángulo, luego reproducen ese triángulo utilizando como información para dicha construcción la medida de sus tres lados, finalmente extienden los lados correspondientes al ángulo en cuestión.
- Para **construir triángulos conocidos dos lados y la medida del ángulo comprendido entre dichos lados**, construyen un ángulo con la medida dada y a continuación marcan cada uno de los lados del ángulo de acuerdo a las medidas de los dos lados conocidos (uno en cada lado) y finalmente unen los puntos en los que fueron marcados los lados del ángulo. Otra opción es construir un segmento con la medida dada, luego en uno de los extremos del segmento se reproduce el ángulo y, luego, se marca el lado construido del ángulo de acuerdo a la medida del otro lado conocido, finalmente, se une el punto marcado con el extremo libre del primer segmento dibujado.

Clase 7: En esta clase, los alumnos construyen triángulos conociendo las medidas de dos de sus ángulos y del lado que ellos comprenden, utilizando para ello modelos hechos con cartulina del lado y los dos ángulos conocidos o sólo con regla y compás. Durante esta clase los alumnos resolverán las **Fichas 11 y 12**.

El profesor les plantea una situación en la que se cuenta con un vidrio triangular perteneciente a un vitral, al que se le ha roto uno de sus vértices de modo tal que uno de sus lados y dos de sus ángulos han permanecido intactos. Al igual que para el caso trabajado en la clase anterior, se pide a los alumnos que construyan un vidrio igual a aquel que se ha roto, contando para ello únicamente de un modelo hecho en cartulina de los elementos que permanecen intactos en el vidrio roto. Esto es, se cuenta únicamente con un modelo en cartulina de los dos ángulos y el lado del vidrio que no se rompieron. Para ello, los alumnos resolverán la **Ficha 11**. Una vez que hayan construido su vidrio, deberán ir a la pizarra y comprobar si coincide con el dibujo disponible (**material anexo 3**). En caso de no coincidir el vidrio construido con el de la pizarra, deberán intentar construirlo nuevamente. Una vez resuelta la ficha, se invita a los estudiantes a compartir colectivamente las técnicas utilizadas.

A continuación, el profesor(a) plantea una situación igual a la inicial en la que se cuenta con un vidrio triangular, distinto del anterior, que también está roto en uno de sus vértices, tal y como se describe más arriba. A diferencia del caso anterior, esta vez los alumnos cuentan únicamente con el dibujo de los ángulos y del lado del vidrio roto, y el profesor les pide que construyan un vidrio igual al que se rompió utilizando únicamente regla y compás (suponiendo el hecho de que no se cuenta con transportador). Para ello, en esta oportunidad los alumnos resolverán la **Ficha 12**. Al igual que para todos los casos descritos, una vez que hayan construido su vidrio, deberán ir a la pizarra y comprobar si coincide con el dibujo del vidrio disponible (**material anexo 3**). En caso de no coincidir el vidrio construido con el de la pizarra, deberán intentar construirlo nuevamente.

Una vez resuelta la ficha, se invita a los estudiantes a compartir colectivamente las técnicas utilizadas.

Cierre:

Durante el cierre, es importante institucionalizar las técnicas utilizadas en la resolución de los problemas trabajados, esto es:

Para **construir triángulos conocidos dos ángulos y la medida del lado comprendido entre dichos ángulos**, reproducen el lado conocido y con vértice en cada uno de sus extremos reproducen los dos ángulos dados (uno en cada extremo) y los extienden hasta que estos dos lados se junten.

Clase 8: En esta clase, alumnas y alumnos construyen triángulos conociendo las medidas de dos de sus lados y del ángulo que ellos forman o las medidas de dos de sus ángulos y del lado que ellos comprenden, utilizando para ello únicamente regla y compás. Durante esta clase resolverán la **Ficha 13**.

Esta clase tiene como uno de sus propósitos el de repasar las técnicas de construcción estudiadas la clase anterior. Para ello, los alumnos trabajan individualmente en los ejercicios de la **Ficha 13**, los que se recomienda que sean revisados colectivamente.

Cierre:

Al final de esta clase se repasan con los estudiantes las técnicas de construcción vistas en las clases estudiadas.

Clase 9: En esta clase, alumnas y alumnos resuelven un problema para cuya resolución deberá utilizar la construcción de un triángulo conocidos dos de sus lados y el ángulo que ellos forman. Además, se les pedirá que construyan un triángulo del que solo se conocen las medidas de sus tres ángulos. Durante esta clase resolverán los problemas de las **Fichas 14 y 15**.

Comienzan la clase resolviendo los problemas de la **Ficha 14**, los que se recomienda sean revisados colectivamente.

Una vez terminada la revisión colectiva de los problemas de la **Ficha 14**, resuelven grupalmente la **Ficha 15**. En esta ficha se les pide que construyan un vidrio triangular del que se conoce únicamente un dibujo de sus tres ángulos. Para la construcción, los estudiantes podrán utilizar únicamente regla y compás. La construcción deberá ser efectuada directamente sobre una cartulina, sin utilizar ningún papel anexo. Una vez realizada la construcción, deberán recortarla y entregársela al profesor. Cuando todos hayan entregado el vidrio, es el momento en que el profesor superponga las construcciones hechas por los estudiantes y/o las pegue en la pizarra para que puedan observar que todas son diferentes entre sí (tienen la misma forma, pero distinto tamaño). Sólo entonces se les mostrará un modelo del vidrio que, efectivamente, se pedía construir.

Una vez realizada esta actividad, con el fin de rescatar aquellos aspectos que consideramos importantes, se recomienda realizar a los estudiantes preguntas del tipo: ¿Fue posible saber cuál era exactamente el triángulo que se debía construir? ¿Por qué creen ustedes que no pudieron saber cuál era el vidrio que se pedía construir? ¿Cuántos triángulos distintos se pueden construir dados tres ángulos? ¿Cuántos datos se dieron para las construcciones previas a esta? ¿Cuántos datos conocían para poder realizar esta construcción? ¿Basta con cualquier trío de datos para poder construir un triángulo? Se espera que los alumnos sean capaces de reconocer que, a diferencia de lo que ocurrió para las construcciones realizadas en las actividades precedentes, si bien esta vez también conocían un total de 3 elementos del triángulo, no fue posible construir de manera certera el triángulo pedido. Esto debido a que existe más de un triángulo que cumple con la característica de poseer 3 ángulos con medidas dadas. Esto quiere decir que no siempre que se conozca 3 elementos del triángulo existirá un único triángulo que cumpla con estas características y, por tanto, no siempre será posible su construcción inequívoca. Tras esta distinción, el profesor comenta a su curso que en la actividad que realizarán a continuación, el desafío estará, precisamente, en lograr caracterizar correctamente un triángulo.

Cierre:

Al final de esta clase se repasan con los estudiantes las técnicas de construcción vistas en las clases pasadas. Además, se destaca el hecho importante de que no siempre que se conozca 3 elementos del triángulo existirá un único triángulo que cumpla con estas características y, por tanto, no siempre será posible su construcción inequívoca.

Clase 10: En esta clase, alumnas y alumnos caracterizan un triángulo. Durante esta clase resolverán la **Ficha 16**.

El profesor(a) cuenta que se dispone de un vitral al que se le ha caído un vidrio triangular, el que debe ser repuesto. Los alumnos disponen de un modelo del vidrio que se quiere reponer en la **Ficha 16**, pero los vidrios para reposición están en poder del profesor (**material anexo del 4 al 9**). Para poder reponer el vidrio en cuestión, los alumnos deberán indicarle al profesor cuál es el que necesitan, con un **máximo de 3 datos** relativos al mismo. Trabajarán en parejas, de modo tal que la pareja deberá ir junta a pedirle el vidrio al profesor, pero cada integrante de la pareja deberá entregarle una información distinta al profesor. En caso de que ambos integrantes reciban un triángulo distinto deberán revisar, en primer lugar, cuál de las informaciones dadas fue errada y, posteriormente, corregirla para volver a intentarlo. La actividad termina cuando ambos integrantes reciben el triángulo correcto. Una vez terminada la actividad, se deberá realizar una puesta en común en la que se comparta tanto la información que resulto exitosa como aquella que fue errada. Se trata de que los alumnos intenten analizar cuáles fueron los errores cometidos y por qué la información exitosa es exitosa.

Una vez realizada esta actividad, se recomienda gestionar una puesta en común del trabajo realizado por los alumnos y alumnas, mediante preguntas del tipo: Del conjunto de mensajes dados, cuál de ellos les resultó exitoso? ¿Por qué? ¿Qué información les faltó en aquellos casos en que la información no fue suficiente? ¿Cuál es la mínima cantidad de información que se debe entregar para caracterizar (describir) un triángulo? Se espera que los alumnos reconozcan que basta con conocer tres elementos básicos de un triángulo cualesquiera para poder caracterizarlo. Estos tres elementos pueden ser: tres lados, dos lados y el ángulo que ellos forman o dos ángulos y el lado que ellos subtienden, pero sin olvidar explicitar la relación de orden existente entre estos tres elementos.

Se recomienda invitar a los estudiantes a reflexionar respecto de la diferencia que existe al tener, por ejemplo, un triángulo roto en uno de sus lados, un triángulo roto en un vértice o un triángulo roto de manera tal que permanecieron intactos sólo sus tres vértices (mostrar los respectivos dibujos), mediante preguntas del tipo: ¿Cuál(es) de ellos se puede reconstruir más fácilmente? ¿Por qué? ¿Cuál es la diferencia entre la información conocida, que facilita su construcción?

Es importante que los alumnos visualicen que, si se borra el tercer lado de un triángulo, este queda implícito, ya que midiendo la distancia entre los dos extremos de los lados conocidos, se puede conocer la medida del lado desconocido. Del mismo modo, si se unen los vértices de los dos lados conocidos, se obtiene el lado desconocido. Esto debido a que es el ángulo que hay entre los lados conocidos el que me permite fijar dichos lados y rigidizar la figura. Por esta razón, un triángulo queda determinado si se conocen la medida de dos de sus lados y del ángulo que ellos forman.

Por otro lado, es importante que los alumnos visualicen también que, cuando se tiene un triángulo roto en un vértice, si se extienden los lados del triángulo roto, estos se intersectan justo en el tercer vértice del triángulo que se busca y no en otro punto. Los ángulos conocidos le dan rigidez a la figura que se tiene, direccionando los lados desconocidos, los que se intersectan en un punto único (ya que dos rectas no paralelas se intersectan en un único punto). Por esta razón, un triángulo queda caracterizado por la medida de dos ángulos y del lado que ellos comprenden, dado que los ángulos conocidos nos señalan la dirección exacta que tienen los lados desconocidos del triángulo y por tanto, nos entregan información implícita respecto del punto en el que se han de juntar dichos lados (el tercer vértice del triángulo).

Cierre:

Es importante sistematizar las ideas centrales desarrolladas en esta etapa:

- Un triángulo queda determinado si se conocen **las medidas de sus tres lados**. Es decir, existe un único triángulo que tiene por lados tres medidas dadas. Esta última idea se manifiesta físicamente en que **los triángulos son figuras rígidas**.
- Un triángulo queda determinado si se conocen **la medida de dos lados y del ángulo que forman dichos lados**. Es decir, existe un único triángulo que tiene la medida de dos lados y del ángulo comprendido entre dichos lados, que han sido dados.
- Un triángulo queda determinado si se conocen **la medida de dos de sus ángulos y del lado comprendido entre ellos**. Es decir, existe un único **triángulo que tiene la medida de dos ángulos y del lado comprendido entre ellos, dado**.

Clase 11: En esta clase, alumnas y alumnos resuelven un problema de construcción de un triángulo del que se conocen dos lados y el ángulo que se opone al menor de dichos lados. Durante esta clase resolverán la **Ficha 17**.

Se plantea un problema de construcción dados tres elementos del triángulo que no lo caracterizan; no obstante, es fácil llegar a pensar erradamente que dichos elementos sí permiten caracterizar un triángulo. Se trata de la construcción de un triángulo dados dos lados y el ángulo que se opone al menor de dichos lados. Para ello, los estudiantes resolverán en grupos de 4 integrantes la **Ficha 17**. En esta Ficha, no solo se les pide que construyan un triángulo conocidos dos de sus lados y el ángulo que se opone al menor de dichos lados sino que, además, analicen si es que dicha construcción es o no única.

Al momento de revisar esta ficha, una vez que se haya evidenciado la existencia de 2 posibles triángulos que cumplen con las condiciones dadas, se recomienda invitar a los alumnos a continuar con la investigación. Para ello, se sugiere realizar preguntas como las siguientes: ¿Cómo realizaron la construcción? ¿Será siempre posible construir un triángulo cuando se conocen dos lados y el ángulo que se opone a uno de esos lados? ¿En qué casos no es posible encontrar un triángulo que cumpla con dicha información? ¿En qué casos existe un único triángulo que cumpla con las condiciones dadas? Es importante que para cada una de las preguntas se dé a los estudiantes el tiempo necesario para investigar la situación en cuestión y poder dar una respuesta justificada (ver estrategia didáctica pág. 42 a 44).

Cierre:

Al final de esta clase se repasan con los estudiantes todos los aprendizajes de la Unidad.

Clase 12 y 13: En estas clases, alumnas y alumnos resuelven problemas de construcción de triángulos como los vistos durante todas las clases anteriores. Durante estas clases resolverán las **Ficha 18 y 19**.

El profesor o profesora comienza la **clase 12** recordando, con los estudiantes, los aprendizajes de la Unidad. Para ello, realiza preguntas del tipo: ¿Qué trío de elementos del triángulo me permite caracterizarlo? ¿Cuáles no? ¿Cómo se puede construir un triángulo si solo se conoce la medida de sus tres lados? ¿Cómo se puede construir un triángulo si se conocen la medida de dos de sus ángulos y del lado que ellos comprenden? ¿Cómo se puede construir un triángulo si se conocen la medida de dos de sus lados y del ángulo que ellos forman? ¿Se puede construir un polígono de 4 lados o más si solo se conoce la medida de sus lados? ¿Por qué? ¿Cómo se puede hacer para reproducir un polígono de cuatro o más lados utilizando únicamente regla y compás? ¿Por qué? ¿Cómo se puede reproducir un ángulo con el uso de regla y compás?

A continuación, individualmente resuelven la **Ficha 18**, que contiene ejercicios como los trabajados durante toda la Unidad. En esta ficha hay un conjunto de problemas que no necesariamente deberán ser resueltos en su totalidad durante estas dos clases. Algunos de ellos podrán ser enviados de tarea, procurando, eso sí, realizar una revisión colectiva en la clase de los problemas que los alumnos resuelvan en sus casas, al igual que para los problemas que sí se resuelvan en la clase. En particular, por la complejidad de los **problemas de la Ficha 19**, se aconseja que estos problemas no sean enviados de tarea.

Cierre:

Al final de cada una de estas clases, se repasan con los estudiantes todos los aprendizajes de la Unidad.

Clase 14: En esta clase se lleva a cabo la aplicación y revisión grupal de la **prueba final de la unidad**.

En una primera parte de esta etapa, se aplica la **prueba final de la unidad**.

En una segunda parte, se sugiere que el profesor(a) realice una corrección de la prueba en la pizarra, preguntando a los estudiantes los procedimientos que utilizaron. Si hubo errores, averiguar por qué los cometieron.

Para finalizar, destaque y sistematice nuevamente los fundamentos centrales de la Unidad y señale que estos se relacionan con aprendizajes que se trabajarán en unidades posteriores.

VI PRUEBAS

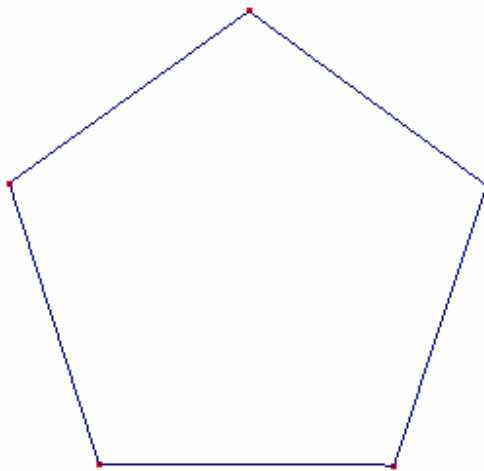
PRUEBA PARCIAL SEGUNDA UNIDAD 7° BÁSICO

Nombre: _____ Escuela: _____

Curso: _____ Fecha: _____ Puntaje: _____

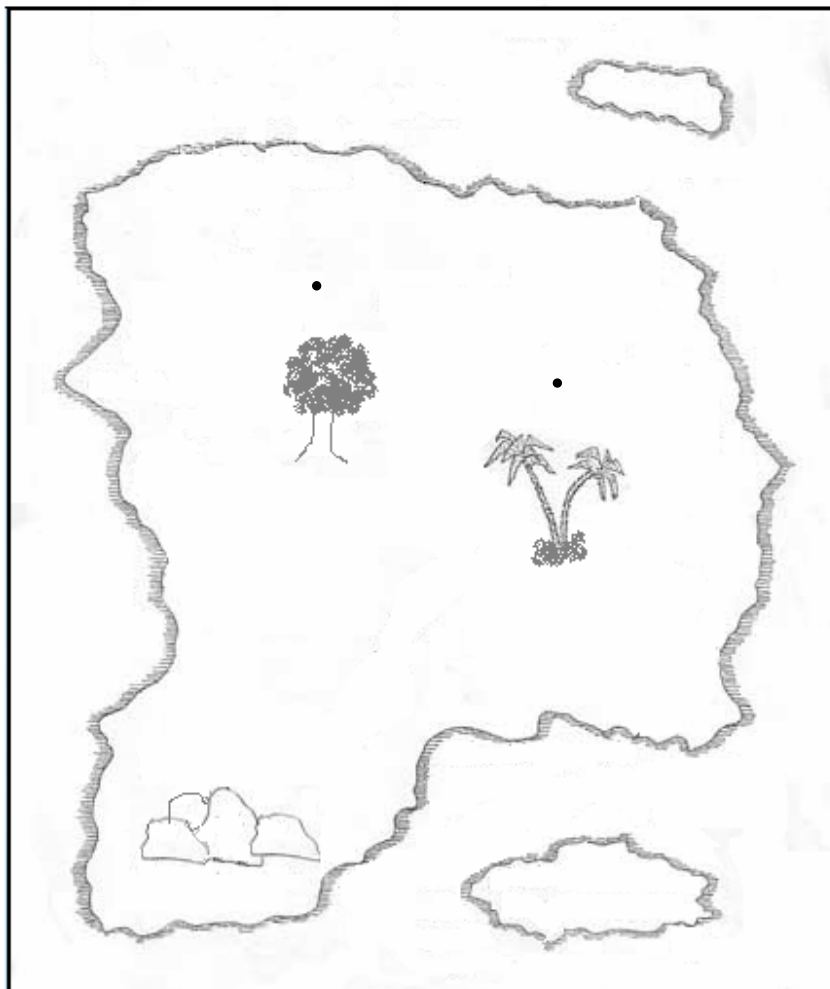
Nota

1. Utilizando únicamente regla y compás, reproduce en el espacio en blanco la siguiente figura:



2. Construye un triángulo isósceles en el que cada uno de sus lados iguales mida 8 cm y su base mida 4,4 cm.

3. En el mapa ubica el lugar que se puede encontrar el tesoro, sabiendo que se encuentra a 2,2 cm del árbol y a 1,8 cm de las palmeras.



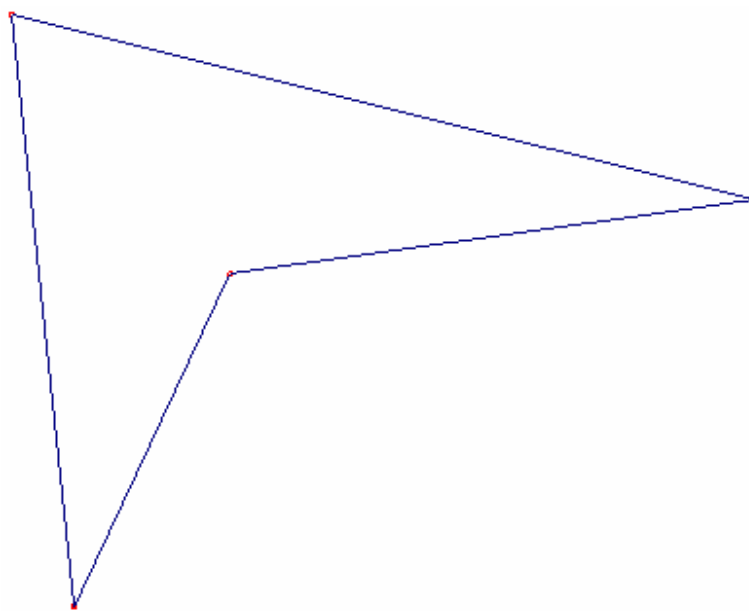
PRUEBA FINAL SEGUNDA UNIDAD 7° BÁSICO

Nombre: _____ Escuela: _____

Curso: _____ Fecha: _____ Puntaje: _____

Nota

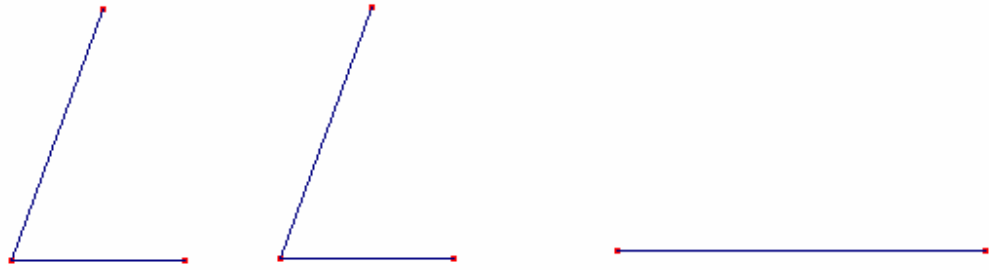
1. Utilizando únicamente regla y compás, reproduce en el espacio en blanco la siguiente figura:



2. María está haciendo, para su hermanito, un velero de juguete de una sola vela triangular, procurando que le quede como el de la foto (a escala).



María aún no ha hecho la vela del velero, pero por las medidas que pudo tomar y los cálculos que hizo, sabe que el lado que está horizontal (la base del triángulo), así como los ángulos adyacentes a dicho lado (los ángulos basales), deben quedar con las medidas que se muestran en el siguiente dibujo:



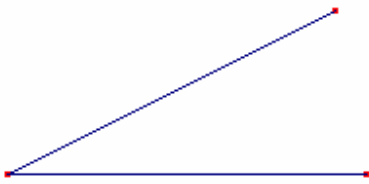
Ayuda a María y constrúyete la vela que necesita para el juguete de su hermanito.

3. Construye un triángulo cualquiera que tenga dos ángulos de igual medida.

4. Se quiere construir un par de rampas¹ de juguete, como las del dibujo, para deslizar unos autitos por ellas.



Las rampas se quiere construir ambas iguales, de tal manera que tengan una **longitud horizontal** de 17 cm y que posean una **inclinación** igual a la que se muestra a continuación:



- a) ¿Cuál será la altura de la rampa, medida en cm?
- b) ¿Cuál será la longitud del plano inclinado (por donde se deslizarán los autos)?

118118_____

¹ Una rampa es un Plano inclinado dispuesto para subir y bajar por él.

PARA RESOLVER LOS SIGUIENTES PROBLEMAS, CONSIGUE UN TRANSPORTADOR O PIDELE UNO A TU PROFESORA O PROFESOR.

5. Construye un triángulo equilátero de lado 4,2 cm.

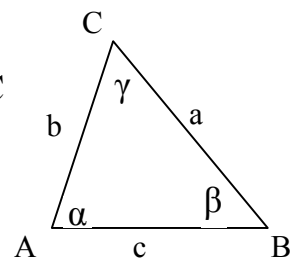
6. Señala en cuáles de los siguientes casos la información que se entrega permite construir inequívocamente el triángulo que se pide y en cuáles no. En caso de entregarse la información necesaria para caracterizar el triángulo, constrúyelo. En caso de no entregarse la información necesaria, explica por qué dicha información no permite determinar el triángulo.

a) $a = 6,5$ cm; $\beta = 45^\circ$; $c = 4,6$ cm

b) $\alpha = 40^\circ$; $\beta = 60^\circ$; $\gamma = 80^\circ$

c) $b = 4,5$ cm; $c = 3,1$ cm; $\gamma = 40^\circ$

Recuerda que para todo triángulo ABC se tiene:



ESPACIO PARA LA REFLEXIÓN PERSONAL

Busque en el momento de cierre de cada uno de los planes de clase, el o los fundamentos centrales de la unidad con el cual se corresponde:

Describa los principales aportes que le ha entregado esta unidad y la forma en que puede utilizarlos en la planificación de sus clases.

GLOSARIO

Ángulo: Región del plano limitada por dos semirrectas con un origen común. A las dos semirrectas se les denomina lados del ángulo, mientras que al punto de origen de estas se le denomina vértice del ángulo. Se denomina amplitud o abertura de ángulo a la separación de sus lados. La medida de un ángulo es la medida de su apertura y se mide en grados.

Ángulo agudo: Ángulo que mide menos de 90° .

Ángulo extendido: Ángulo que mide 180° .

Ángulo obtuso: Ángulo que mide más de 90° y menos de 180° .

Ángulo recto: Ángulo que mide 90° .

Caracterizar: Determinar los atributos peculiares de alguien o de algo, de modo que claramente se distinga de los demás.

Compás: Instrumento que sirve para dibujar circunferencias.

Reproducir: Construir algo idéntico a un modelo conocido y disponible.

Equidistan: Están a igual distancia.

Escuadra: Instrumento en forma de triángulo rectángulo que sirve para construir y verificar ángulos rectos en cualquier posición, así como trazar rectas perpendiculares.

Lugar geométrico: Conjunto de todos puntos del plano que verifican una propiedad determinada.

Origen del transportador: Parte del transportador que indica el lugar donde debe ser ubicado el vértice del ángulo a medir, para una correcta medición.

Regla no graduada: Cualquier instrumento que, por poseer al menos un lado recto, puede ser utilizado como una regla, no obstante no viene graduado en ninguna unidad de medida.

Transportador: Instrumento que sirve para medir ángulos en el plano.

Triangulación de un polígono: Descomponer un polígono en triángulos, por ejemplo en los triángulos formados a partir de las diagonales trazadas desde uno de los vértices.

Triángulo: Figura geométrica cerrada que tiene tres lados.

Triángulo acutángulo: Aquel triángulo que tiene sus tres ángulos agudos.

Triángulos congruentes: Dos triángulos son congruentes si tienen sus tres lados y sus tres ángulos respectivos de igual medida.

Triángulo equilátero: Aquel triángulo que tiene sus tres lados de igual medida.

Triángulo escaleno: Aquel triángulo que tiene sus tres lados de distinta medida.

Triángulo isósceles: Aquel triángulo que tiene dos lados de igual medida.

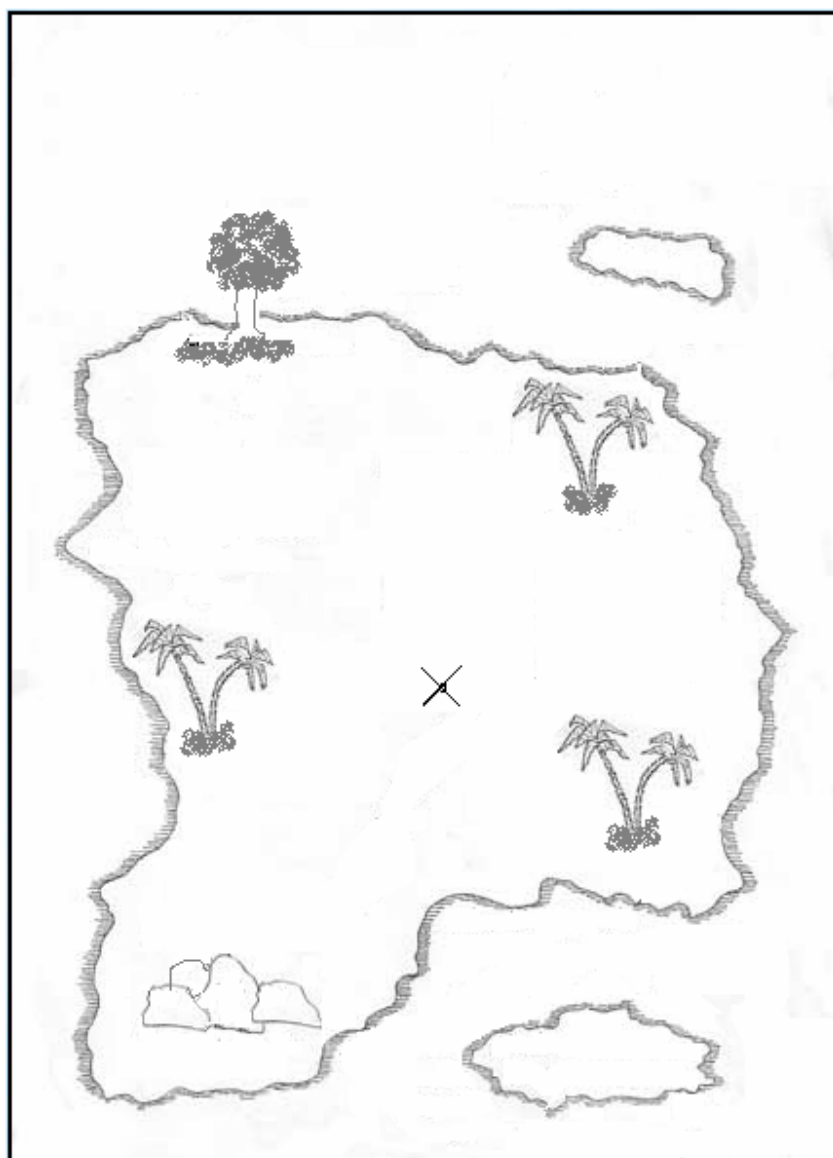
Triángulo obtusángulo: Aquel triángulo que tiene un ángulo obtuso.

Triángulo rectángulo: Aquel triángulo que tiene un ángulo recto.

Vitral: Composición formada por [vidrios](#) de colores, que pueden tener diversas formas y tamaños, unidos por medio de varillas de [plomo](#). Se utilizan para adornar ventanas, cubiertas de mesas, joyeros, lámparas, portarretratos, entre otros.

IX FICHAS Y MATERIALES PARA ALUMNAS Y ALUMNOS

El mapa del tesoro está hecho a escala y cada centímetro representa un metro. El tesoro se encuentra a 3 cm de la X. Señala todos los puntos posibles en que se puede encontrar el tesoro.



Ficha de
repaso 2

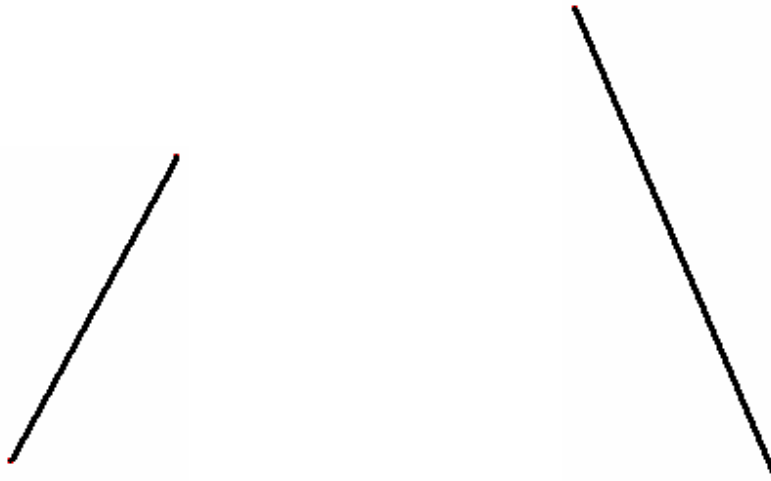
Segunda Unidad

Séptimo
Básico

Nombre: _____

Curso: _____

Copia los siguientes trazos en el lugar señalado.



Cópioslos **en posición horizontal**, utilizando para ello únicamente regla no graduada y compás. Para realizar la construcción no podrás marcar la regla no graduada ni utilizar ningún otro instrumento o material anexo, sino los señalados.

Copia aquí los segmentos en posición horizontal.

Una vez que hayas terminado tu trabajo, superpón los trazos dibujados con los trazos dados para ver si la construcción está correcta (para la superposición puedes utilizar los trazos dados que están dibujados en la ficha de tu compañero(a) de banco).

Ficha 1

Segunda Unidad

Clase 1

Séptimo
Básico

Nombre: _____

Curso: _____

Ubica el lugar donde plantar el naranjo.

El naranjo se quiere plantar a 5 metros del limón y a 6 metros del durazno.

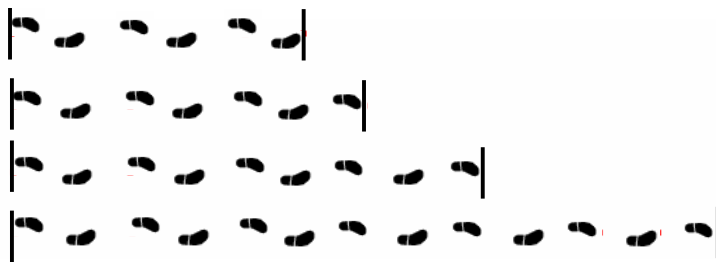
El plano está hecho a escala y cada centímetro representa un metro.



¿Dónde está el Tesoro?

- El tesoro se encuentra a 12 pasos de una de las rocas y a 12 pasos de una de las cabañas.
- La cabaña que permite encontrar el tesoro se encuentra a 6 pasos de la palmera (**P**) y está hacia el este.
- La roca que permite encontrar el tesoro se encuentra hacia el norte, a 8 pasos de la cabaña y a 5 pasos de la palmera (p). Lamentablemente, por la acción del viento la roca se encuentra cubierta por la arena.

Las distancias medidas en pasos son las que se señalan a continuación:



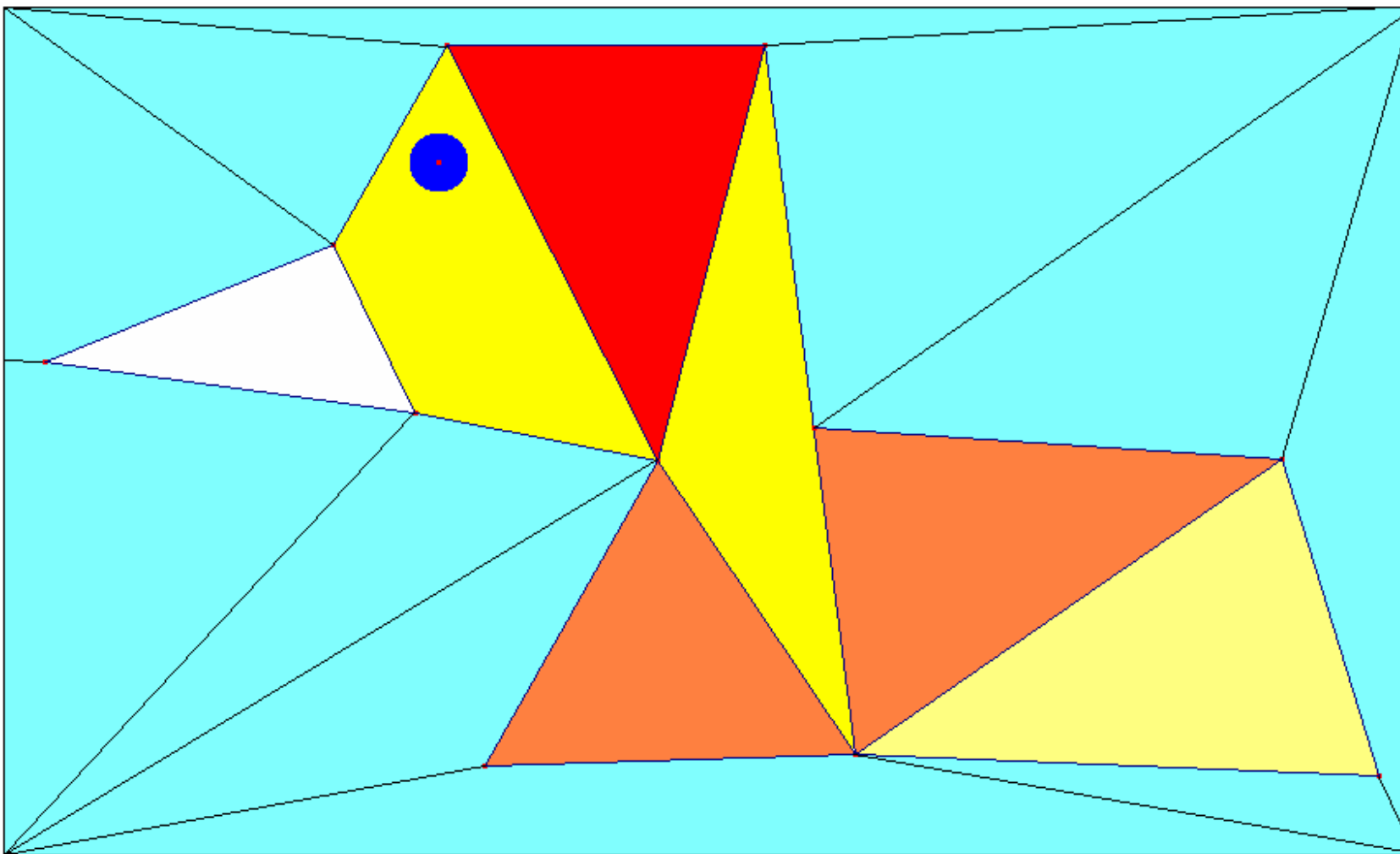
El mapa lo encontrarás en la página siguiente.



Completando el Vitral

En el vitral se ha quebrado el trozo que está en blanco y que corresponde a un triángulo.

Corta un trozo de cartulina que calce exactamente en el vitral para restaurarlo.



Ficha 4

Segunda Unidad

Clase 2

Séptimo
Básico

Nombre: _____

Curso: _____

1.- Construir un triángulo equilátero de modo que uno de sus lados sea el segmento AB. Puedes utilizar solo regla graduada y compás.



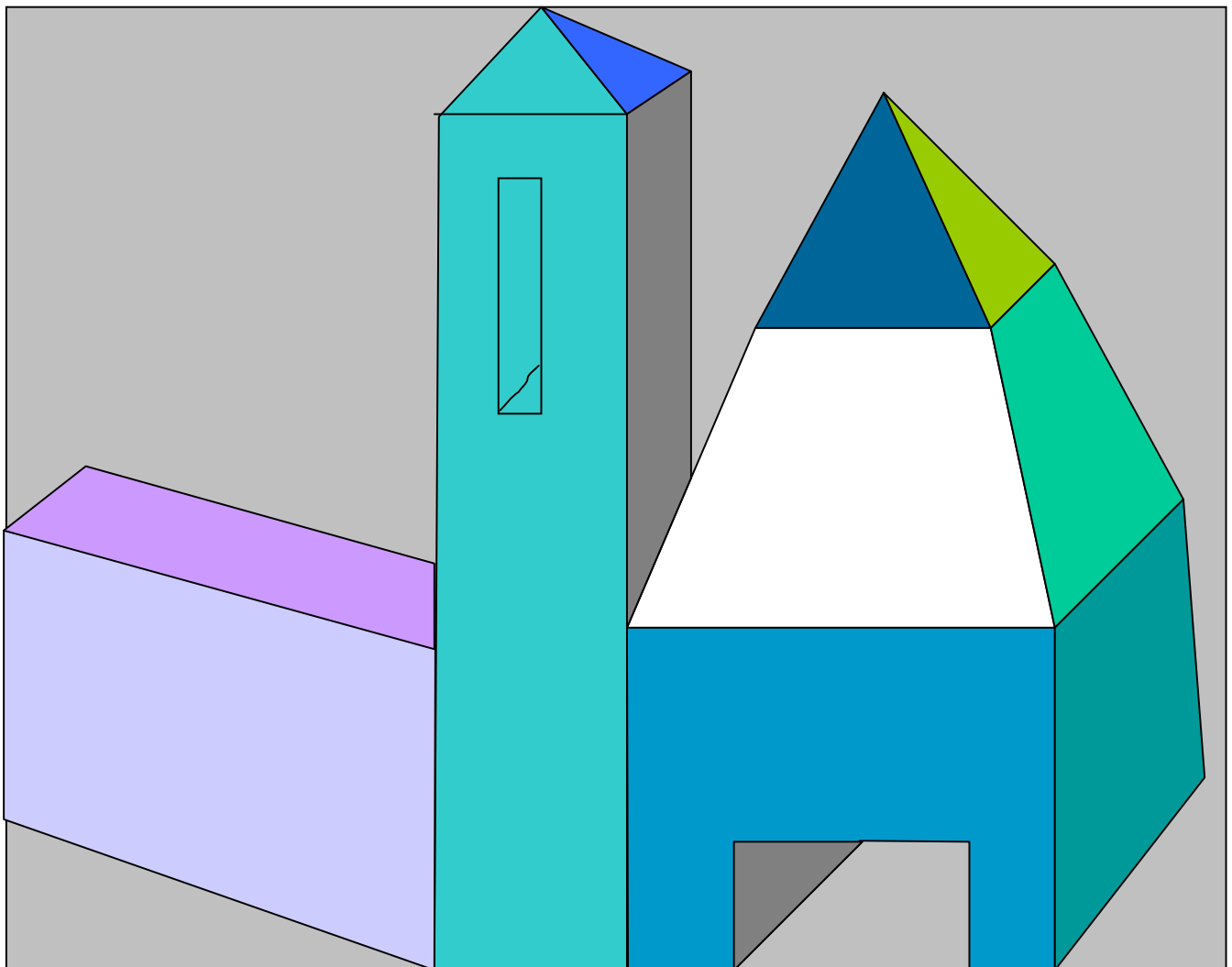
2. Construir el $\triangle ABC$, donde $\overline{AB} = 6$ cm, $\overline{BC} = 7$ cm y $\overline{AC} = 4$ cm

3. Construir el $\triangle PQR$, donde $\overline{PQ} = 8$ cm, $\overline{QR} = 4$ cm y $\overline{RP} = 3$ cm

Completando el vitral

En el vitral se ha quebrado el trozo que está en blanco y que corresponde a un cuadrilátero.

Corta un trozo de cartulina que calce exactamente en el vitral para restaurarlo.



Ficha 6

Segunda Unidad

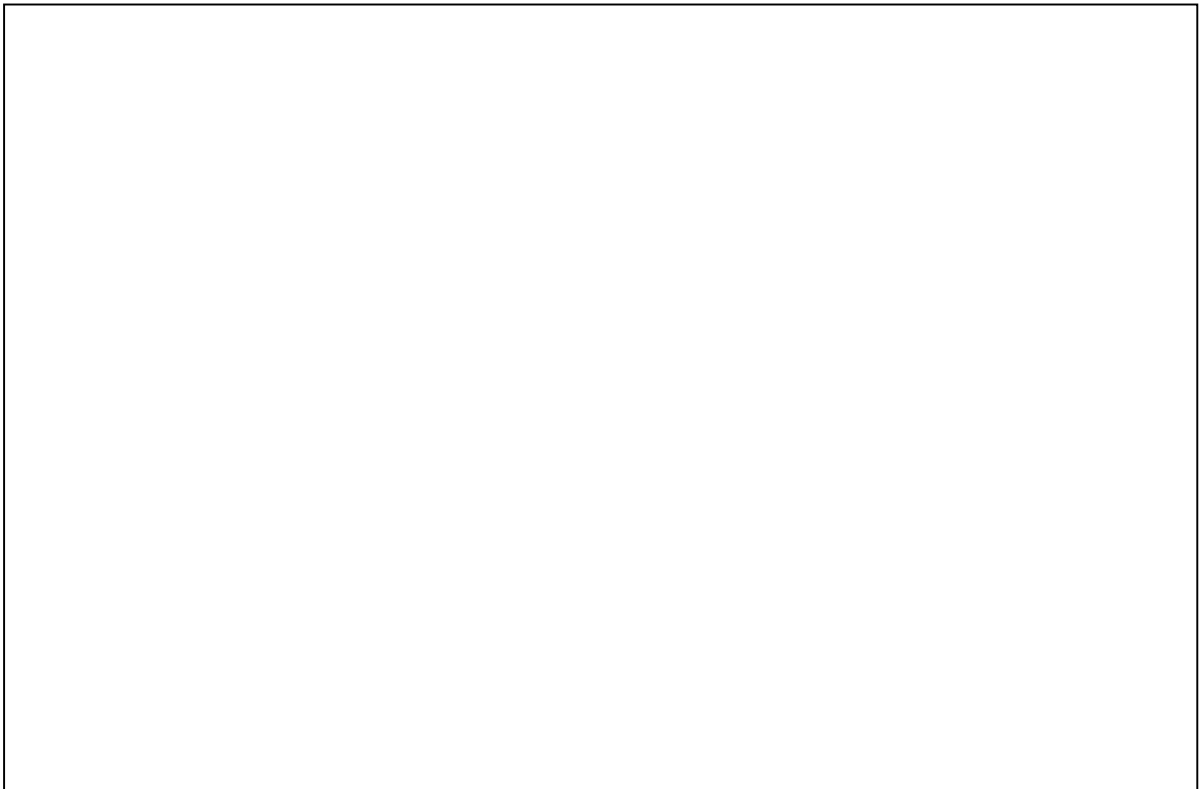
Clase 4

Séptimo
Básico

Nombre: _____

Curso: _____

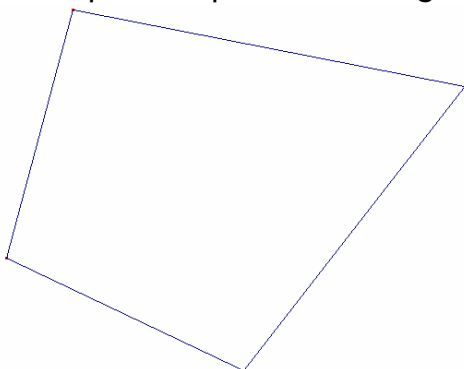
1.- Reproduce dentro del recuadro un cuadrilátero igual al que está al otro lado de la ficha.



2.- Construye en una hoja blanca un rombo en el que uno de sus lados sea el segmento DE y su diagonal mayor sea el segmento DF. Puedes utilizar solo regla no graduada y compás.

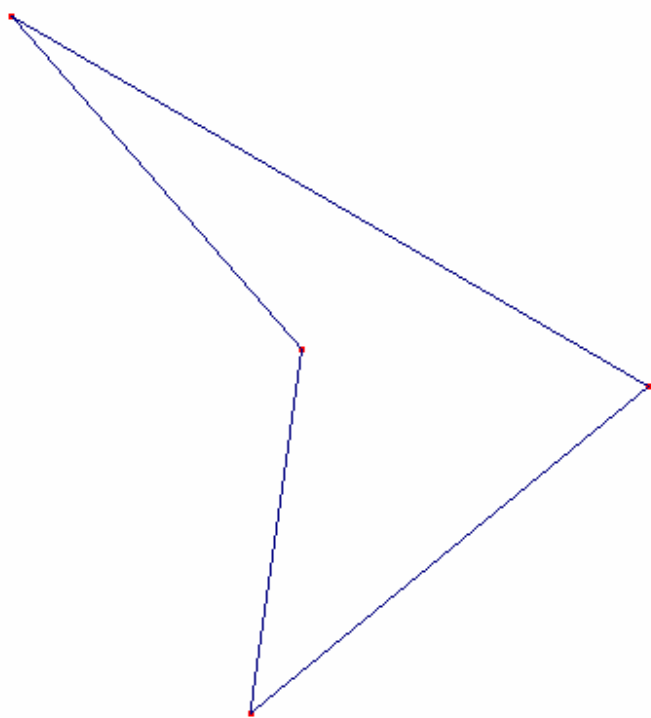


3.- Imaginen que tienen que dar información por teléfono para que un compañero pueda reproducir una figura idéntica a la del dibujo.



Escribe lo que le dirías para que la pueda hacer.

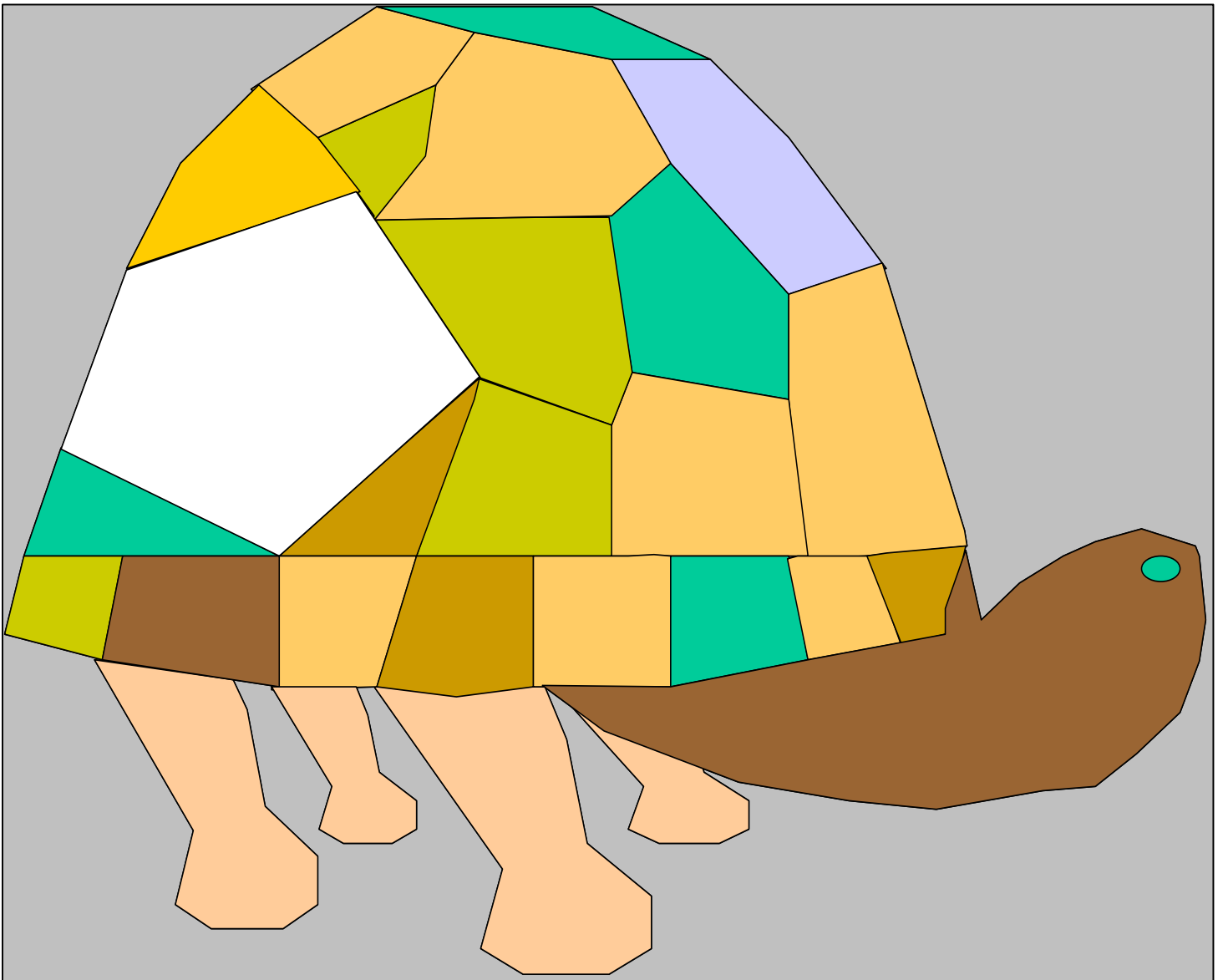
Este es el cuadrilátero de la pregunta 1, que debes reproducir:



Completando el vitral

En el vitral se ha quebrado el trozo que está en blanco y que corresponde a un pentágono.

Corta un trozo de cartulina que calce exactamente en el vitral para restaurarlo.



1.- Reproduce dentro del recuadro un pentágono igual al que está al otro lado de la ficha.

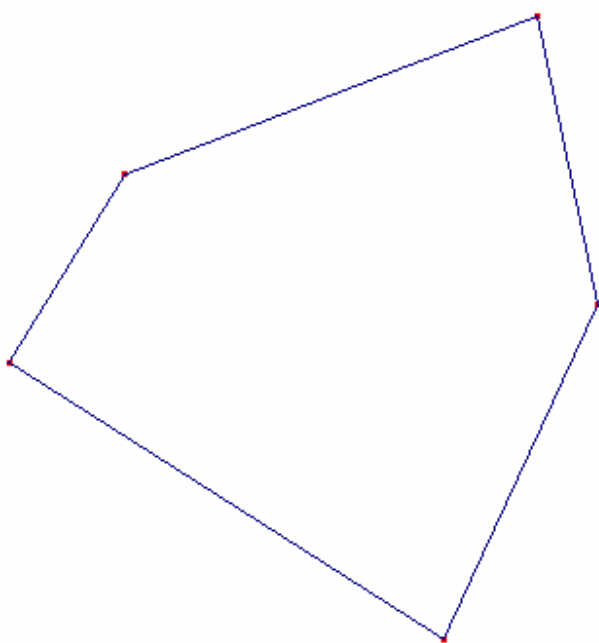


2.- A unos estudiantes se les pidió reproducir un hexágono y que luego escribieran la forma cómo lo habían construido. Dos de ellos escribieron los siguientes procedimientos:

Matías	Carolina
<p>Todos los lados del hexágono miden 4 cm.</p> <p>Para construirlo, primero tracé un lado AB de 4 cm. Luego tracé dos arcos: $\odot(A, 4\text{cm})$ y $\odot(B, 7\text{cm})$ a uno de los puntos de intersección le llamé F. Luego tracé dos arcos más: $\odot(F, 4\text{cm})$ y $\odot(B, 8\text{cm})$ al punto donde se intersectan le llamé E.</p> <p>En los puntos E y B tracé los arcos: $\odot(E, 4\text{cm})$ y $\odot(B, 7\text{cm})$, al punto en el que se intersectan lo denominé D y con este punto y el B tracé los arcos $\odot(D, 4\text{ cm})$ y $\odot(B, 4\text{ cm})$.</p> <p>El punto donde se intersectan estos dos arcos es el punto C.</p> <p>Ahora uno los puntos A, B, C, D, E y F y formé el hexágono.</p>	<p>Para comenzar escogí un punto M como centro del hexágono y tracé un segmento \overline{MA} de 4 cm.</p> <p>Luego tracé dos arcos con el compás, uno haciendo centro en M, y otro haciendo centro en A. Los arcos se intersectan en dos puntos que llamé B y F.</p> <p>Ahora ubico el compás en los puntos B y M, y tracé dos arcos de 4 cm. Al punto donde estos se intersectan le llamé C. Uní el punto B con el C.</p> <p>Realicé el mismo procedimiento ubicando el compás en los puntos M y F. Al punto donde se intersectan los arcos de 4 cm le llamo E. Después uní el punto F con E.</p> <p>Finalmente, pongo el compás en los puntos C y M y tracé dos arcos de 4 cm. El punto donde se intersectan le llamé D. Para terminar de construir el hexágono uno el punto D con C y con E.</p>

Construye dos hexágonos siguiendo las instrucciones de Matías y Carolina y verifica si con ellas se logran construir dos hexágonos iguales.

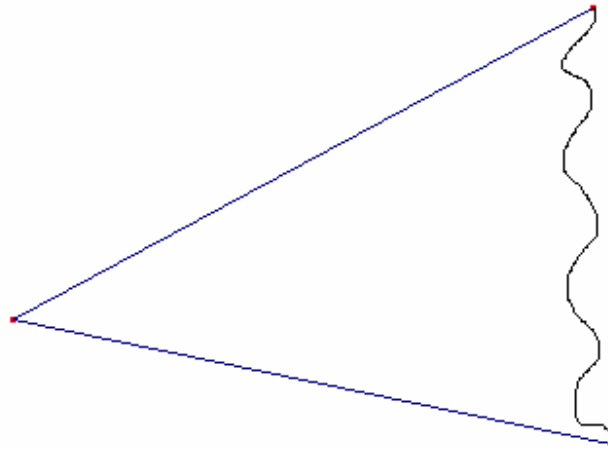
Compara los procedimientos de ambos niños. Señala en qué se parecen y en qué se diferencian.



Se ha caído un vidrio triangular de un vitral. El vidrio se ha roto justo en uno de sus lados, de modo que sus otros dos lados y uno de sus ángulos han quedado enteros, tal como se muestra en el dibujo.



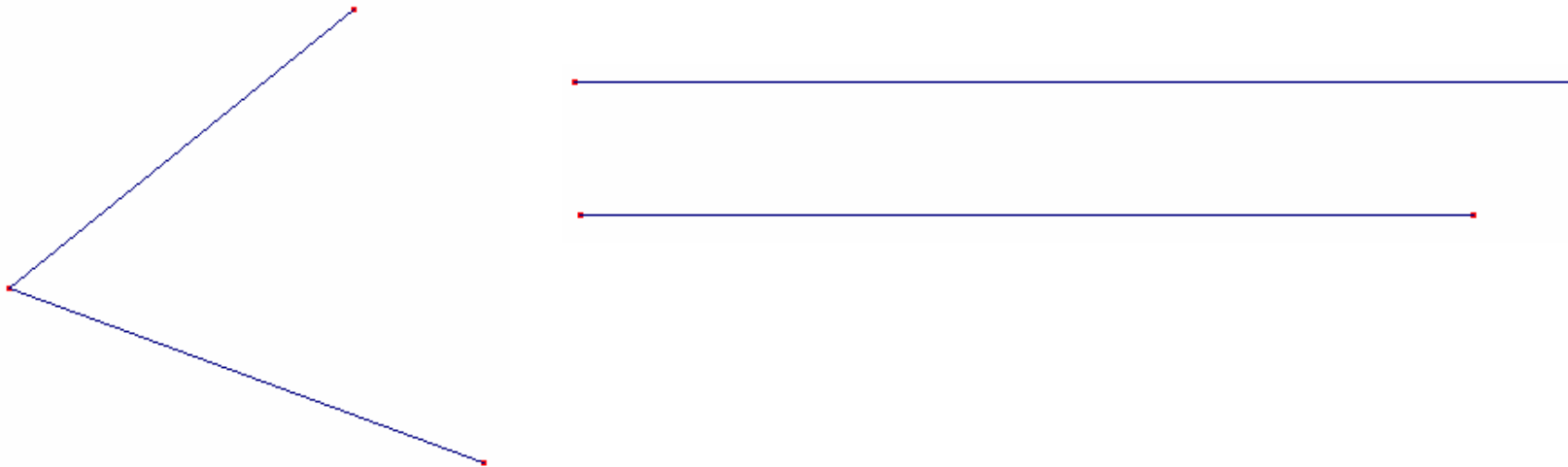
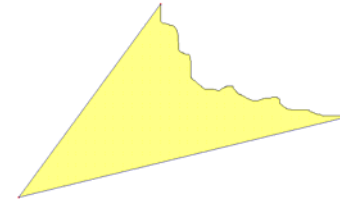
El dueño del vitral ha construido un modelo de los lados y el ángulo del vidrio que permanecieron intactos. Para hacer un modelo y luego cortar un vidrio.



Construye en una hoja de cartulina un modelo del vidrio triangular. Puedes utilizar solo los modelos de los lados y del ángulo disponibles y una regla no graduada. Una vez que lo hayas construido, anda al pizarrón y comprueba si la construcción que hiciste está correcta. En caso contrario, intenta construirlo nuevamente.

Se ha caído un vidrio triangular de un vitral. El vidrio se ha roto justo en uno de sus lados, de modo que sus otros dos lados y uno de sus ángulos han quedado enteros, tal como se muestra en el dibujo.

El dueño del vidrio ha copiado en una hoja los lados y el ángulo que permanecieron intactos y te ha pasado el dibujo de éstos para que lo ayudes a construir un vidrio idéntico para poder reponer el que se rompió. El dibujo que ha realizado es el siguiente:

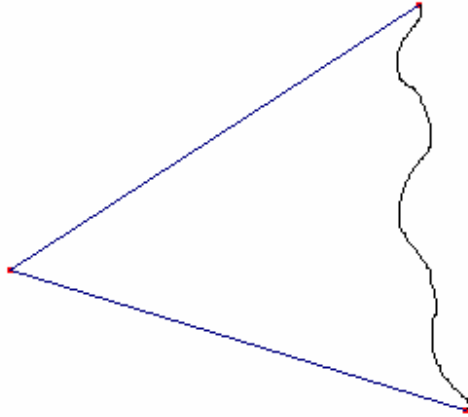
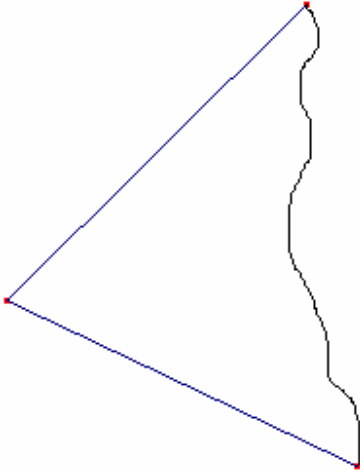


Ayuda al dueño del vitral y constrúyete el vidrio que necesita. El vidrio debe ser construido directamente en una hoja de cartulina, sin utilizar ninguna hoja anexa. Esta vez puedes utilizar solo regla y compás. Una vez que hayas construido el vidrio, anda al pizarrón y comprueba si la construcción que hiciste está correcta. En caso contrario intenta construirlo nuevamente.

Se ha roto un vidrio triangular de un vitral, justo en uno de sus esquinas, de modo que uno de sus lados y dos de sus ángulos han quedado enteros, tal como se muestra en el dibujo.

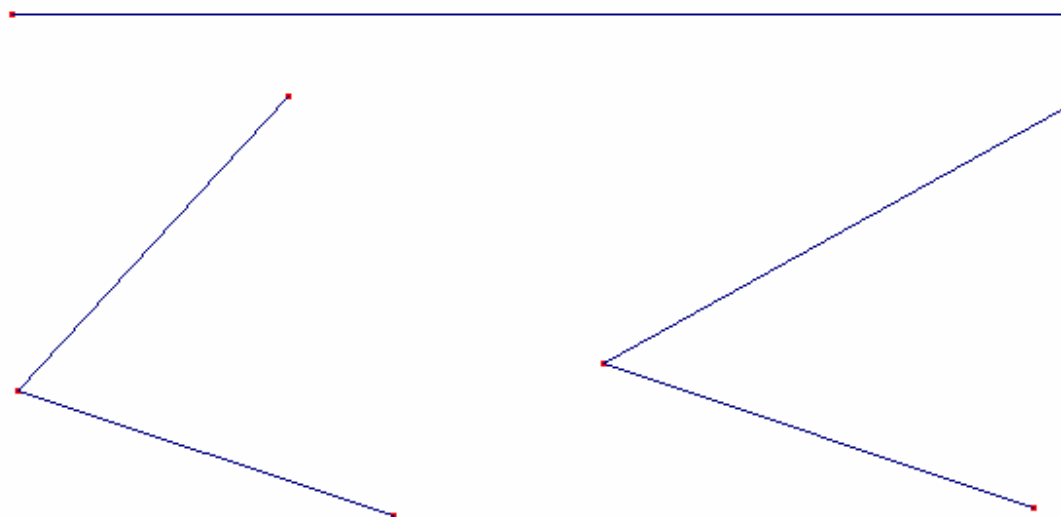
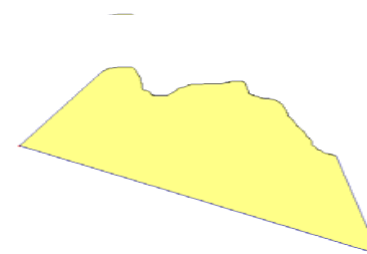


El dueño del vitral ha construido un modelo del lado y los ángulos que permanecieron intactos. Pide al profesor(a) los modelos que construyó el dueño del vitral y ayúdalo a construir un vidrio idéntico para reponer el que se rompió:



Construye en una hoja de cartulina un modelo del vidrio triangular. Puedes utilizar para ello solo los modelos de los lados y del ángulo disponibles y una regla no graduada. Una vez que lo hayas construido, anda al pizarrón y comprueba si la construcción que hiciste está correcta. En caso contrario, intenta construirlo nuevamente.

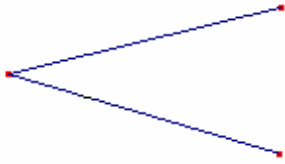
Se ha roto un vidrio triangular de un vitral, justo en una de sus esquinas, de modo que uno de sus lados y dos de sus ángulos han quedado enteros, tal como se muestra en el dibujo. El dueño del vitral ha dibujado en una hoja el lado y los ángulos que permanecieron intactos y te ha pasado el dibujo de estos para que lo ayudes a construir un vidrio idéntico para reponer el que se rompió. El dibujo que ha realizado es el siguiente:



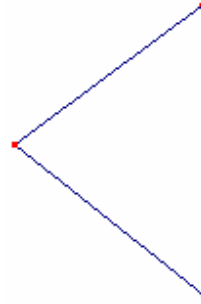
Ayuda al dueño del vitral y constrúyete el vidrio que necesita. El vidrio debe ser construido directamente en una hoja de cartulina, sin utilizar ninguna hoja anexa. Esta vez puedes utilizar para ello solo regla y compás. Una vez que hayas construido el vidrio, anda al pizarrón y comprueba si la construcción que hiciste está correcta. En caso contrario, intenta construirlo nuevamente.

1. Utilizando regla no graduada y compás, copia cada uno de los siguientes ángulos:

a)

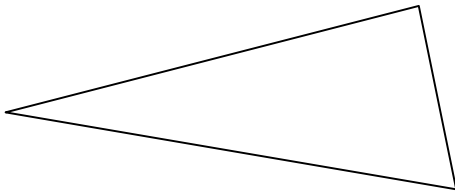


b)

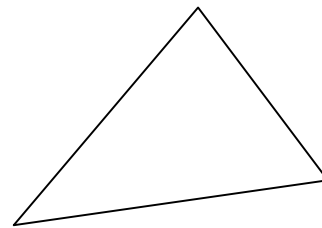


2. Utilizando regla no graduada y compás, copia cada uno de los siguientes triángulos.

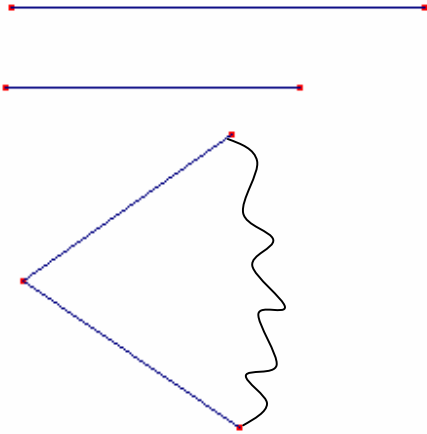
a)



b)



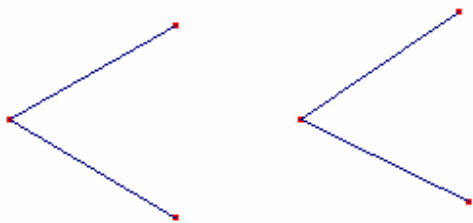
3. Construye un triángulo con regla y compás, sabiendo que estos son dos de sus lados y el ángulo comprendido entre ellos es:



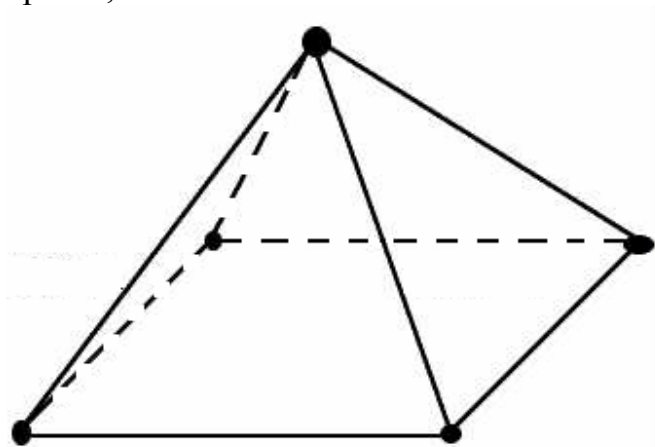
4. Construye un triángulo con regla y compás, uno de sus lados es:



Y los ángulos del triángulo cuyos vértices coinciden con los extremos del segmento son:

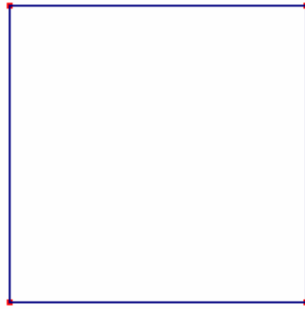


5. Una pirámide es un cuerpo geométrico que tiene por base un polígono cualquiera y cuyas caras, una por cada lado del polígono, son triángulos que se juntan en un solo punto, llamado vértice.

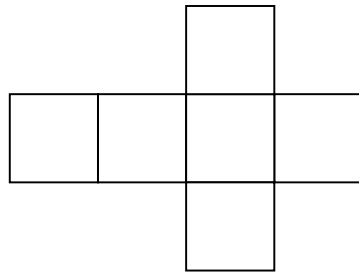


Utilizando únicamente regla y compás, construye una pirámide de base cuadrada de lado 4 cm. Las caras laterales de la pirámide son triángulos equiláteros.

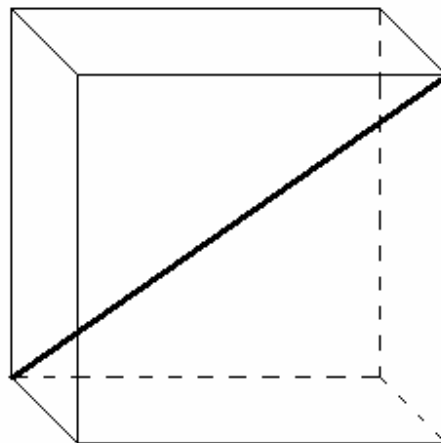
Para construir la pirámide forma una red, recórtala y pégala.



1. Construye, en una cartulina, un cubo de 5 cm de lado. Recuerda que una posible red para construir un cubo, es como la que se muestra a continuación (no olvides colocarle viñetas para poder pegar unas caras con otras). El cubo que construyas debe quedar absolutamente cerrado.



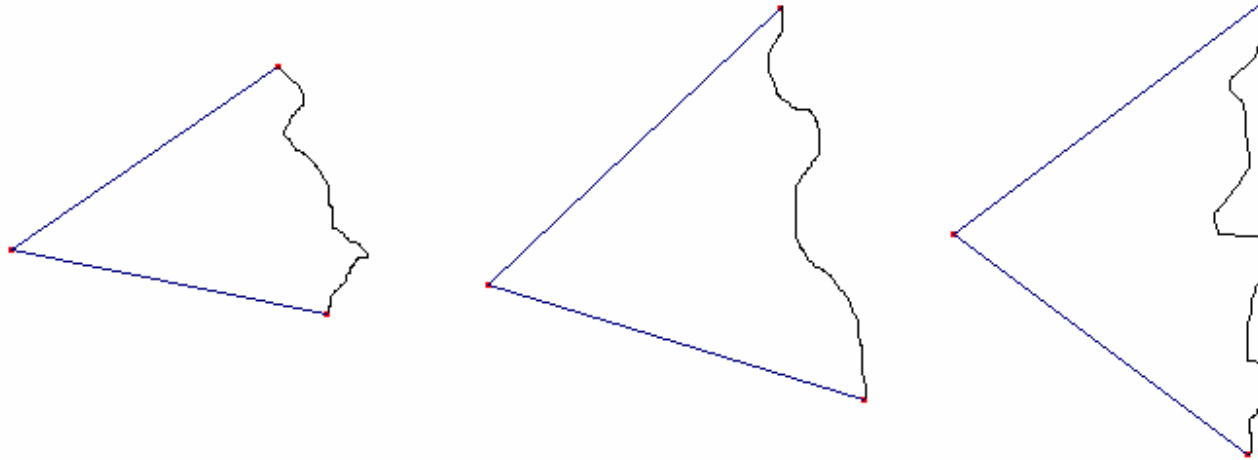
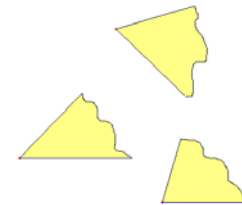
2. ¿Cuánto mide la diagonal del cubo de 5 cm de lado que construiste? Determinalo sin desarmar el cubo.



3. Comprueba la respuesta de la pregunta 5. Para ello, puedes atravesar un palito de madera (de brocheta) de un vértice del cubo al vértice opuesto (como se observa en el dibujo de la pregunta anterior), marcarlo, y luego medir la longitud marcada en el palito de brocheta.

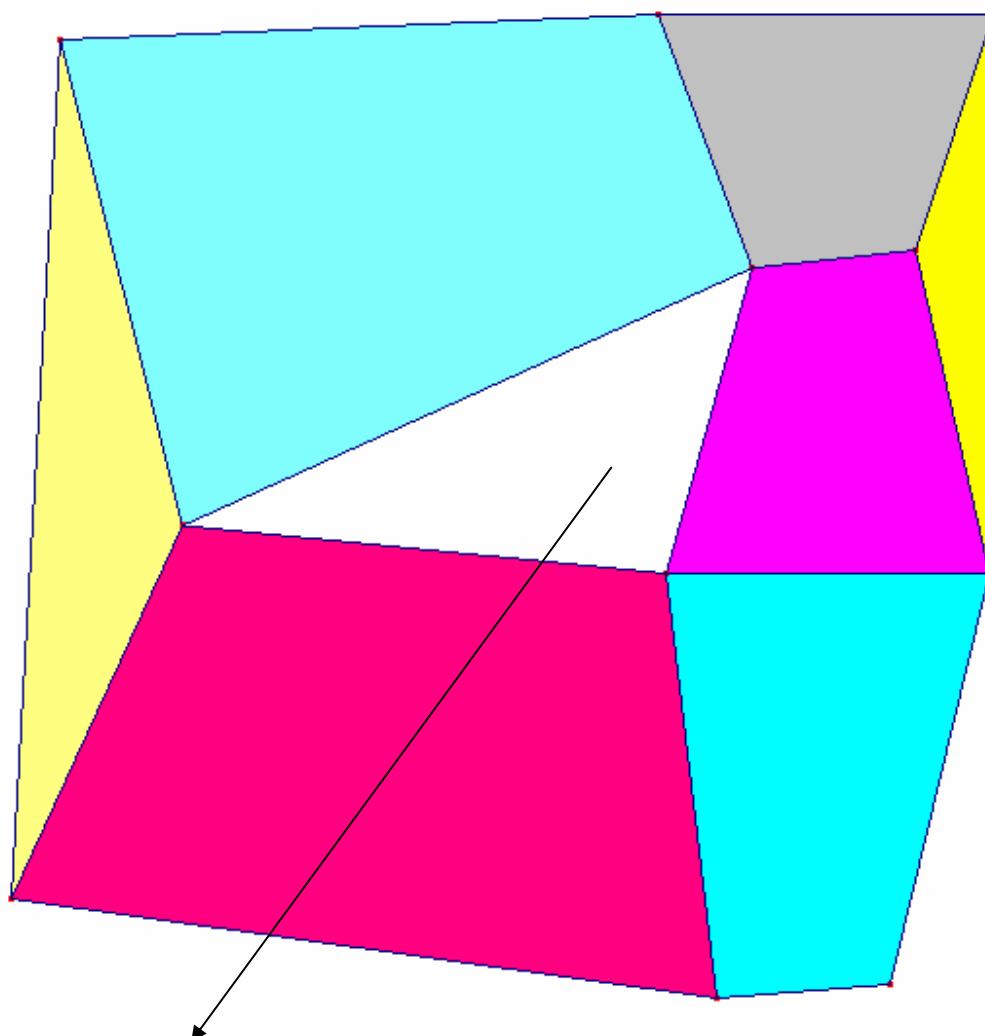
Se ha caído un vidrio triangular de un vitral. El vidrio se ha roto de tal manera que solo han quedado enteros tres de sus ángulos, tal como se muestra en el dibujo.

El dueño del vitral ha traído consigo los vértices que permanecieron intactos para que lo ayudes a construir un vidrio idéntico para poder reponer el que se rompió. Los vértices en cuestión son los que se dibujan a continuación:



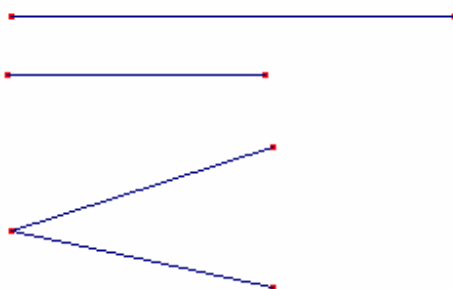
Construye un vidrio que cumpla con las condiciones pedidas, utilizando para la construcción únicamente regla y compás. El vidrio deberá ser construido en una hoja de cartulina. Una vez construido, recórtalo y llévaselo a tu profesor.

El profesor(a) dispone en su escritorio de un conjunto de vidrios triangulares. Mediante información relativa a un **máximo de 3 elementos** del triángulo, pídanle que les entregue un vidrio idéntico al que se ha caído del siguiente vitral. Deberán ir juntos a pedir el vidrio, pero cada uno deberá dar una información distinta. La actividad termina una vez que ambos obtengan un vidrio que calce en el vitral. En caso de fracasar, juntos tendrán que analizar las causas para volver a intentarlo. Para extraer la información relativa al triángulo pueden utilizar regla graduada y transportador:

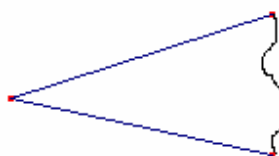


Vidrio triangular
que se ha caído

Sabiendo que el dibujo que aparece a continuación corresponde a dos lados de un triángulo y al ángulo que se **opone al menor de dichos lados**:



1. Construye, en tu cuaderno, un triángulo que cumpla con dichas características. Para la construcción puedes utilizar modelos en cartulina de los lados y del ángulo conocidos, así como regla y compás, según estimes conveniente.

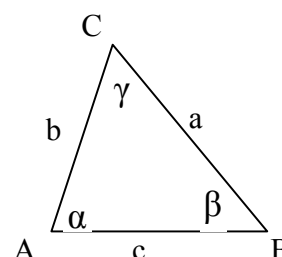


2. Intenta construir un triángulo **distinto** al que ya construiste que cumpla con las mismas características mencionadas. ¿Existe dicho triángulo?

3. ¿Cuántos triángulos distintos se pueden construir con la información dada? ¿Por qué?

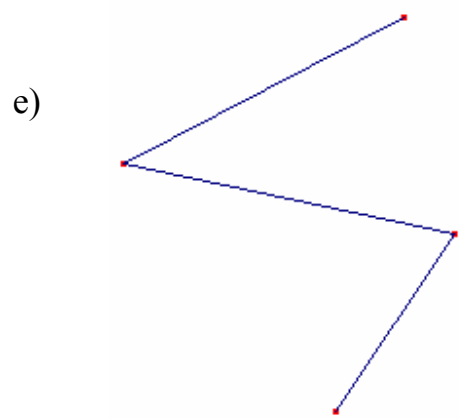
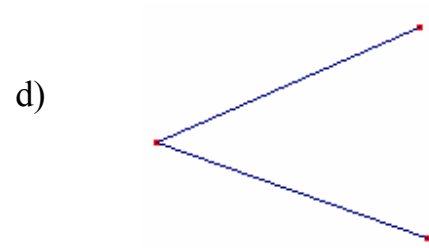
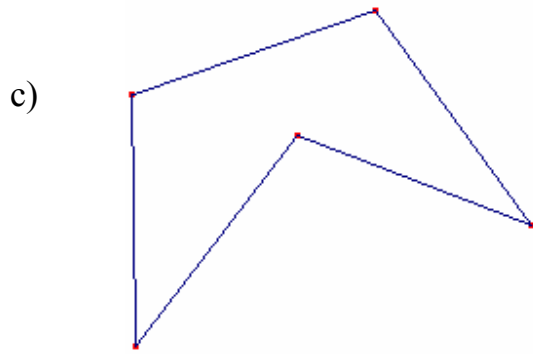
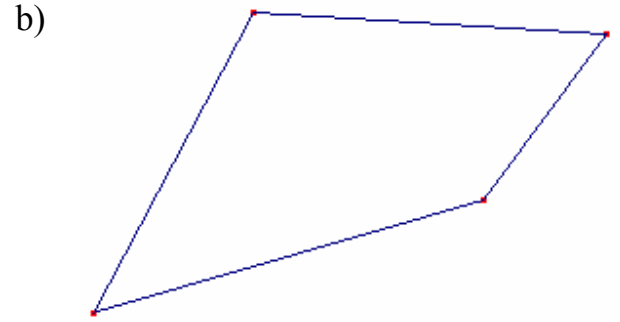
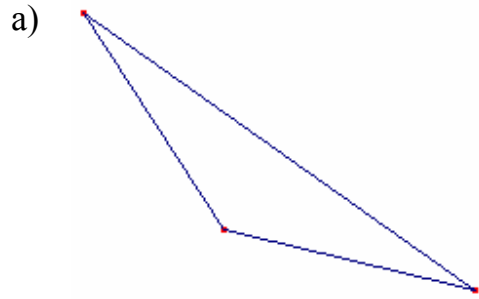
1. Señala en cuáles de los siguientes casos se entrega **solo la información mínima necesaria** para construir de manera inequívoca un triángulo y constrúyelo (puedes utilizar los implementos que estimes necesarios). En caso de no entregarse **solo** la información **mínima** necesaria para caracterizar el triángulo, señala la información sobrante o agrega la información faltante (una de las posibles alternativas).

Recuerda que para todo triángulo ABC se tiene:



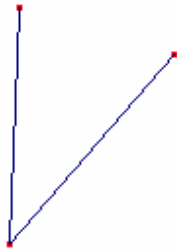
- a) $a = 7 \text{ cm}; b = 5 \text{ cm}; c = 6 \text{ cm}$
- b) $a = 4 \text{ cm}; b = 10,1 \text{ cm}; \alpha = 23^\circ; \beta = 82^\circ$
- c) $\gamma = 60^\circ; \beta = 35^\circ; a = 25 \text{ mm}$
- d) $a = 7,3 \text{ cm}; \alpha = 85^\circ$
- e) $a = 7,4 \text{ cm}; c = 4,6 \text{ cm}; \beta = 75^\circ$
- f) $\alpha = 38^\circ; \beta = 65^\circ; \gamma = 77^\circ$
- g) $\alpha = 105^\circ; \gamma = 25^\circ; b = 50$
- h) $a = 2,7 \text{ cm}; b = 5 \text{ cm}; \gamma = 112^\circ$

2. Utilizando únicamente regla y compás, copia en tu cuaderno cada una de las siguientes figuras:

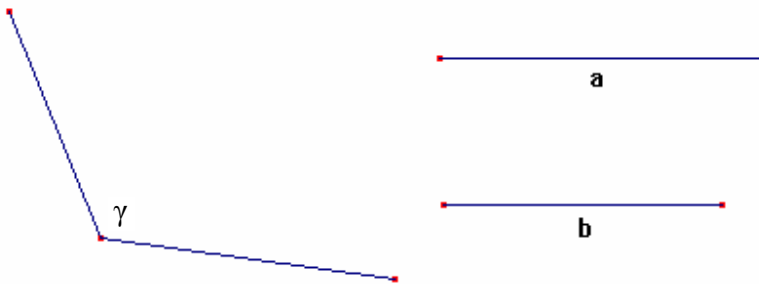


3. Construye, en tu cuaderno, cada uno de los siguientes triángulos que se pide a continuación:

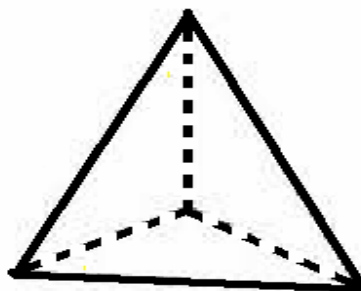
a) Un triángulo isósceles, de 5 cm. cada uno de los lados iguales, en el que el ángulo que forman estos dos lados es como el que se dibuja a continuación:



b) Un triángulo ABC tal que:



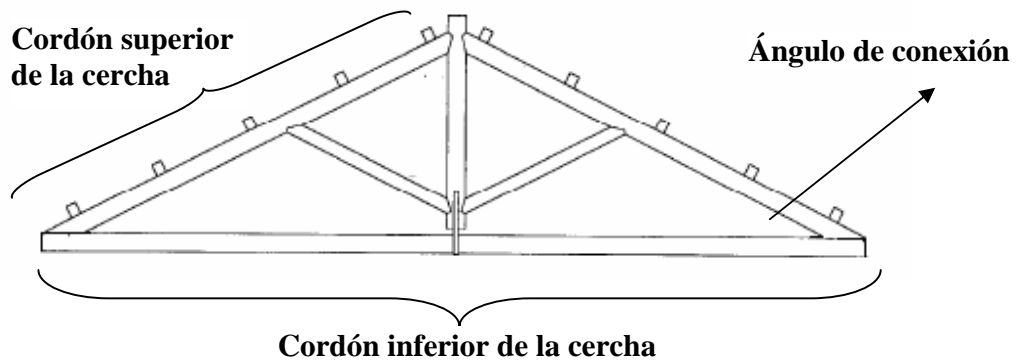
4. Un tetraedro regular es un cuerpo geométrico formado por cuatro caras iguales. Las caras del tetraedro regular consisten en triángulos equiláteros, tal y como se muestra a continuación:



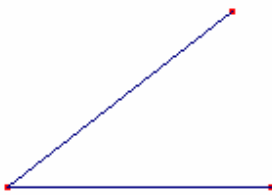
Utilizando únicamente regla y compás, construye en tu cuaderno una red para un tetraedro regular de arista 3 cm. Una vez construida la red, recórtala y arma el tetraedro.

Resuelve los siguientes problemas en tu cuaderno

1.- Juan está construyendo la maqueta de una casa. Para la colocación del techo debe construir una cercha, como la que se esquematiza en el dibujo (Una cercha es un elemento estructural de la techumbre compuesto normalmente por la triangulación de varias piezas de metal o madera)



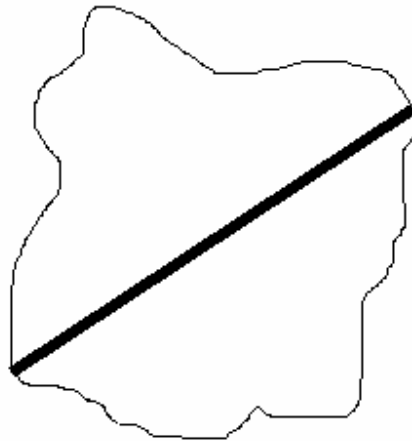
La cercha que quiere construir Juan es simétrica (esto es, con ambos **cordones superiores** de igual longitud). Por otro lado, se sabe que el **cordón inferior** tendrá una longitud de 8,2 cm y que el **ángulo de conexión** tendrá una inclinación como la que se dibuja a continuación:



a ¿Cuál será la altura aproximada de la cercha?

b ¿Cuál será la longitud aproximada de cada cordón superior de la cercha?

2. Un artista quiere hacer una escultura con una gran roca. Parte del trabajo que efectuará consiste en hacerle un agujero a la roca por el que pasará una vara de cobre, tal y como se muestra en el dibujo.



- a) ¿Es posible saber la longitud que deberá tener la vara de cobre antes de realizar la perforación? ¿Cómo?
- b) Utilizando el método por ti descrito, determina la longitud del trazo negro del dibujo.

3. Sabiendo que, en el esquema, la casa de Pedro está a 5,2 cm de la casa de Carolina y a 3,6 cm de la casa de Paola, señala los posibles puntos en los que se encuentra la casa de Pedro.



Material
recortable

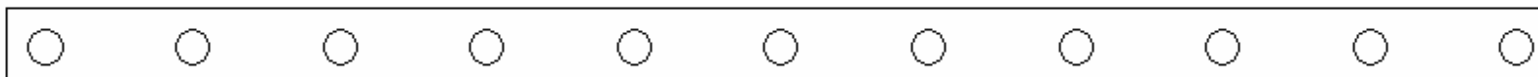
Segunda Unidad

Séptimo
Básico

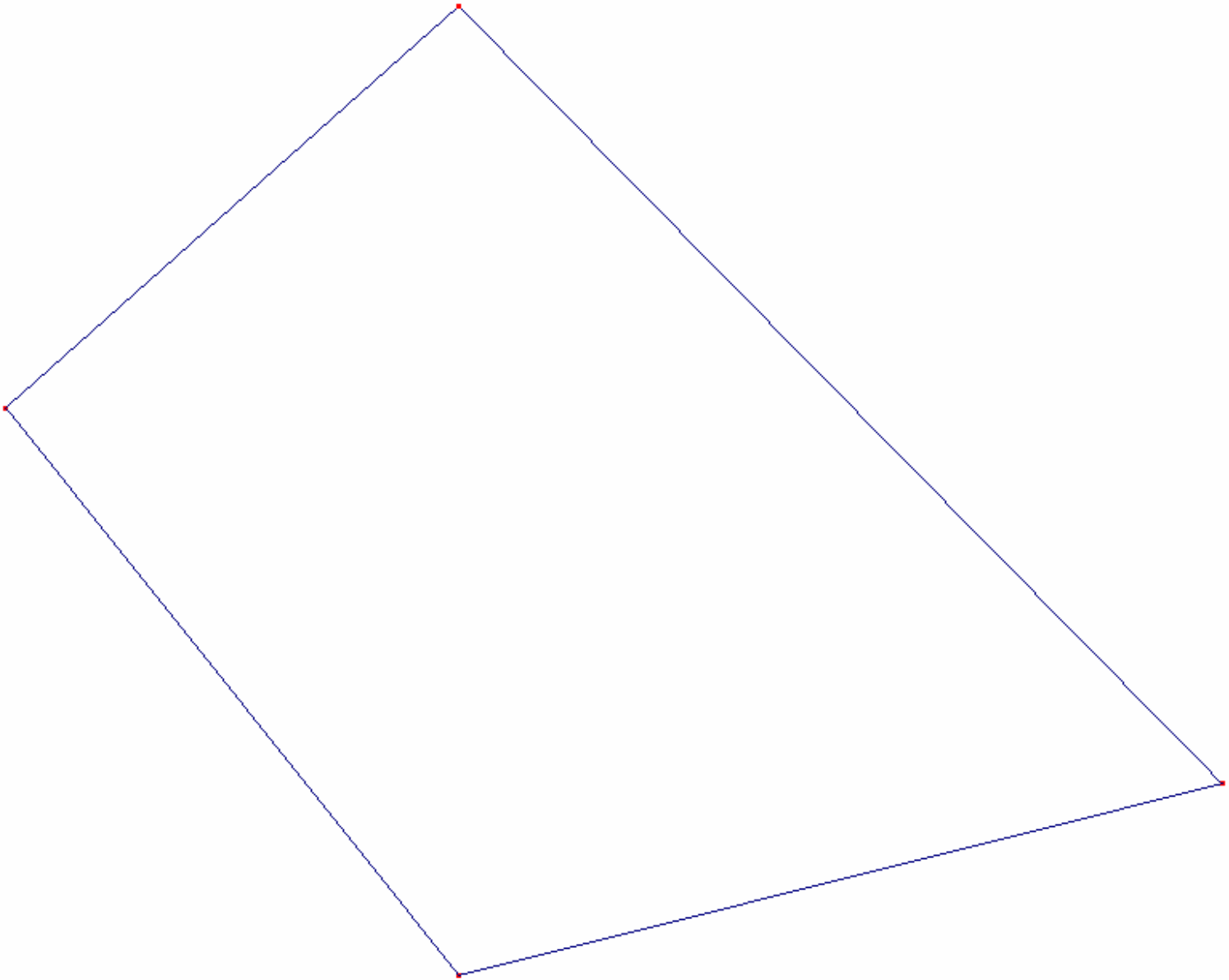
Nombre: _____

Curso: _____

Recorta las varillas y con ellas forma un cuadrilátero de lados 18 cm, 12 cm, 13 cm y 10 cm.
Une las varillas utilizando chinchas de dos patas.

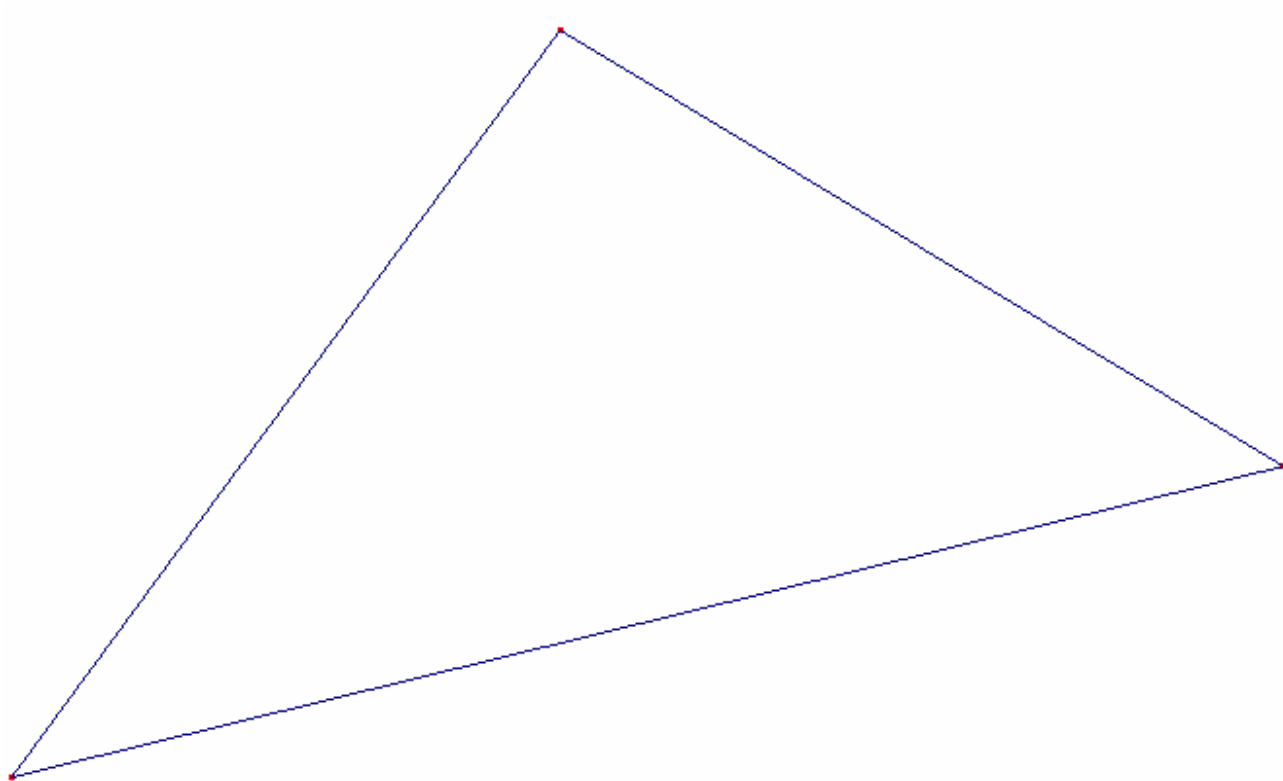


Material anexo 1	Segunda Unidad	Séptimo Básico	Material para el profesor (a)
---------------------	----------------	-------------------	-------------------------------

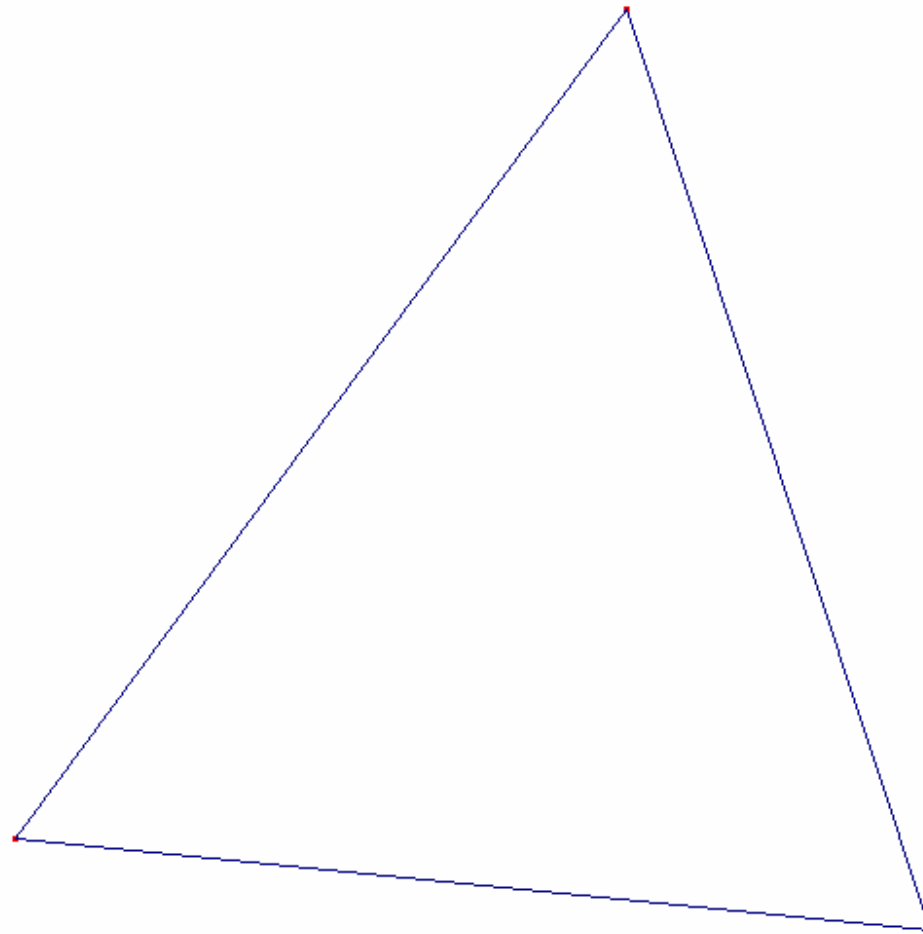


Material anexo 2	Segunda Unidad	Séptimo Básico	Material para el profesor (a)
---------------------	----------------	-------------------	-------------------------------

Triángulo de **Ficha 9**.

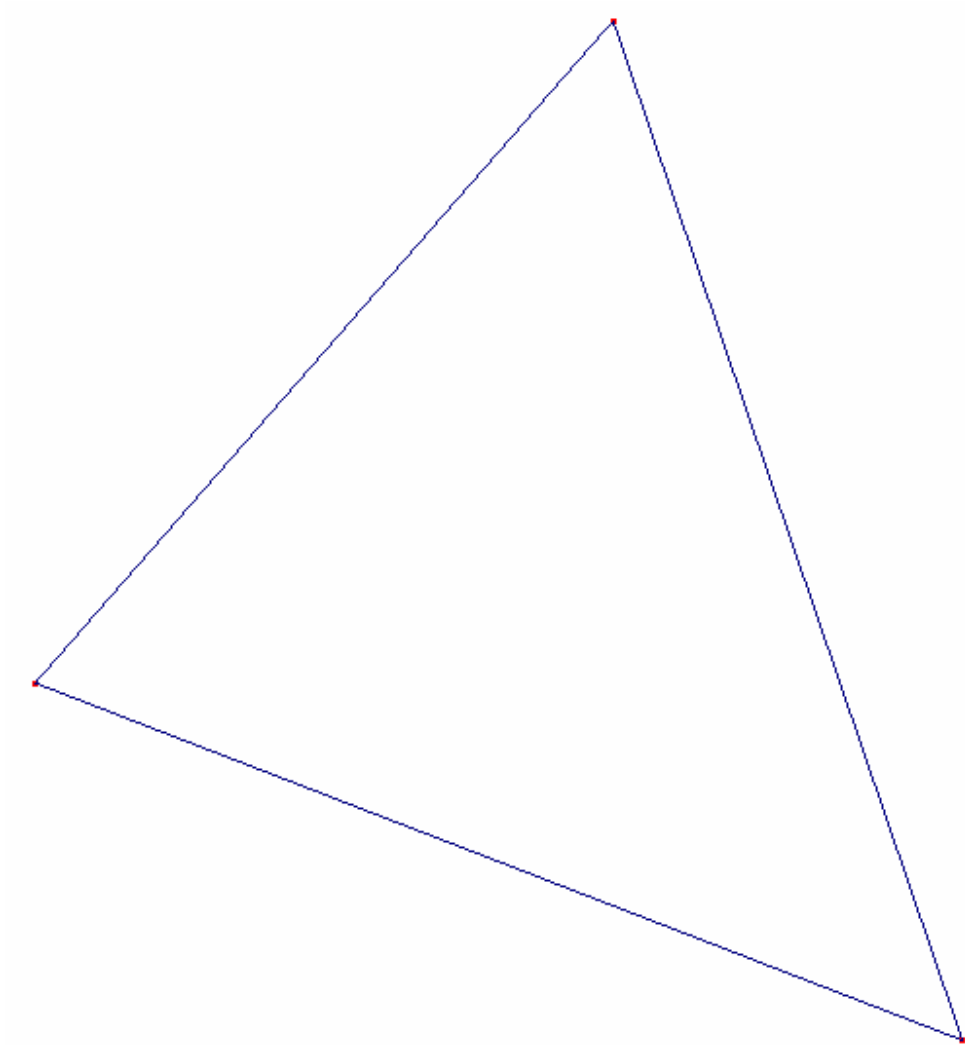


Triângulo de **Ficha 10**.

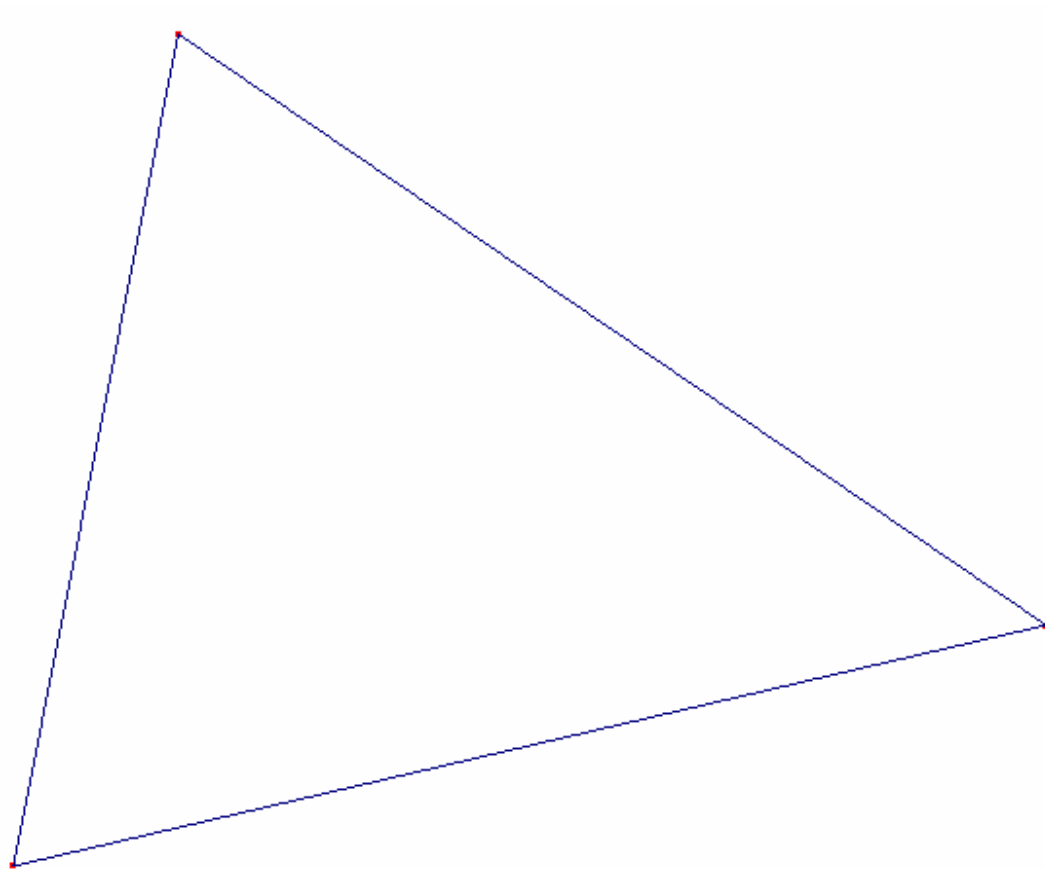


Material anexo 3	Segunda Unidad	Séptimo Básico	Material para el profesor (a)
---------------------	----------------	-------------------	-------------------------------

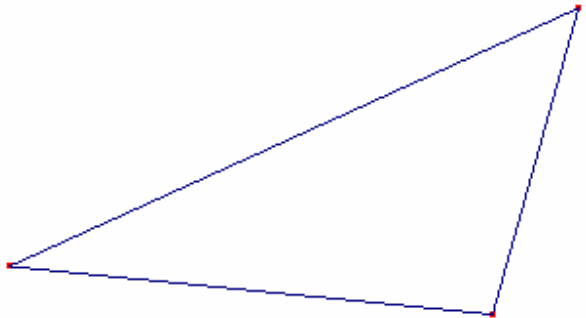
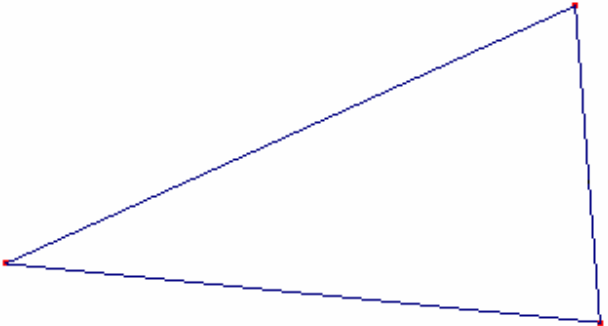
Vidrio correspondiente a la **Ficha 11**.



Vidrio correspondiente a la **Ficha 12**.



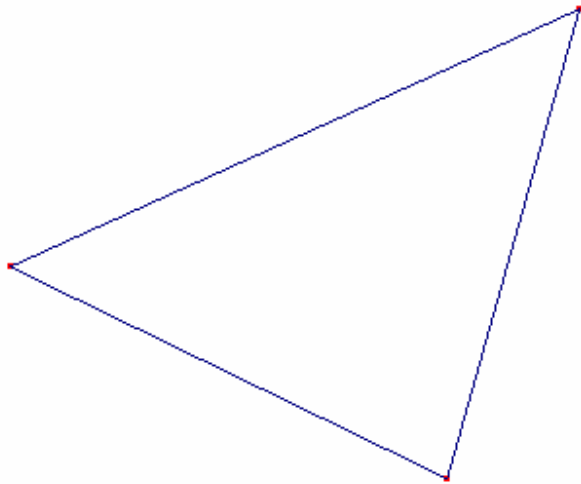
Triángulos para la actividad de **dictado al profesor, Ficha 15.**

<p>El triángulo que aparece a continuación es el correcto. Este es el triángulo que se deberá entregar en caso que los alumnos den como información cualquiera de las opciones que se muestra a continuación (o informaciones equivalentes), señalando el orden entre estos elementos:</p> <p>a) Los tres lados del triángulo; Dos lados y el ángulo comprendido entre dichos lados; Dos ángulos y el lado que dichos lados comprenden; Dos lados y el ángulo que se opone al mayor de ellos; Dos ángulos y el lado que se opone a uno de ellos.</p>	<p>Estos es el triángulo que se deberá entregar en caso que los alumnos den como información cualquiera de los datos que se muestra a continuación:</p> <p>a) Un lado mide 8,5 cm, otro lado mide 4,3 cm y el ángulo que se opone al lado de 4,3 cm, mide 30°; b) Un lado mide 8,5 cm y un ángulo adyacente a dicho lado mide 30°; c) un lado mide 8,5 cm</p>
	

Para la actividad de **dictado al profesor, Ficha 15**

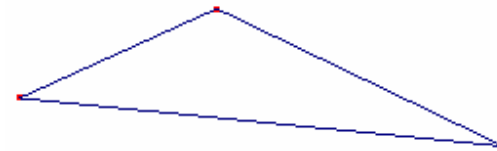
Este es el triángulo que se deberá entregar en caso que los alumnos den como información cualquiera de los datos que se muestra a continuación:

a) Un lado mide 8,5 cm, otro lado mide 6,6 cm y el ángulo que se opone al lado de 6,6 cm, mide 50° ; b) Un lado mide 8,5 cm y un ángulo adyacente a dicho lado mide 50° ; c) un lado mide 6,6 cm y el ángulo opuesto mide 50° ; d) un lado mide 6,6 cm



Este es el triángulo que se deberá entregar en caso que los alumnos den como información cualquiera de los datos que se muestra a continuación:

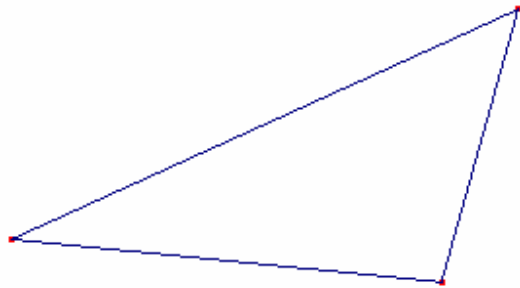
a) Un lado mide 6,6 cm, otro lado mide 4,3 cm y el ángulo que se opone al lado de 4,3 cm, mide 30° ; b) Un lado mide 6,6 cm y un ángulo adyacente a dicho lado mide 30° ; c) un lado mide 4,3 cm y el ángulo opuesto mide 30° ; d) un lado mide 4,3 cm



Para la actividad de **dictado al profesor, Ficha 15**.

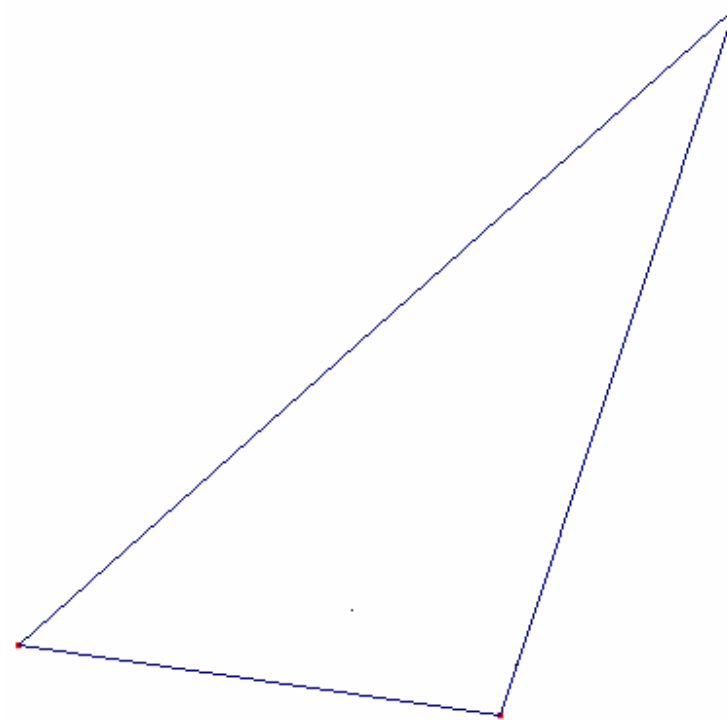
Este es el triángulo que se deberá entregar en caso que los alumnos den como información cualquiera de los datos que se muestra a continuación:

a) La medida de sus tres ángulos; b) la medida de dos cualesquiera de sus ángulos; c) la medida de uno cualquiera de sus ángulos.



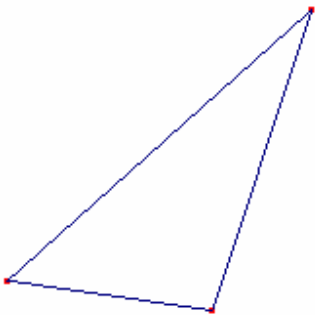
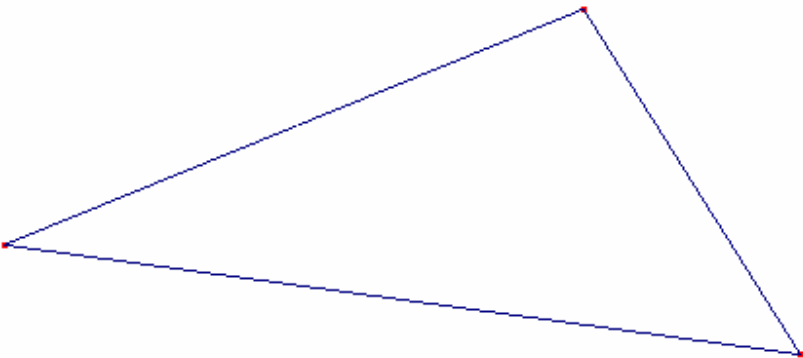
Este es el triángulo que se deberá entregar en caso que los alumnos den como información cualquiera de los datos que se muestra a continuación:

a) Un lado mide 6,6 cm, un ángulo mide 100° y otro ángulo mide 30° ; b) Un lado mide 6,6 cm, un ángulo mide 100° y otro ángulo mide 50° ; c) Un lado mide 6,6 cm, un ángulo mide 30° y otro ángulo mide 50° ; d) Un lado mide 6,6 cm y un ángulo adyacente a dicho lado mide 100° .



Material anexo 7	Segunda Unidad	Séptimo Básico	Material para el profesor (a)
---------------------	----------------	-------------------	-------------------------------

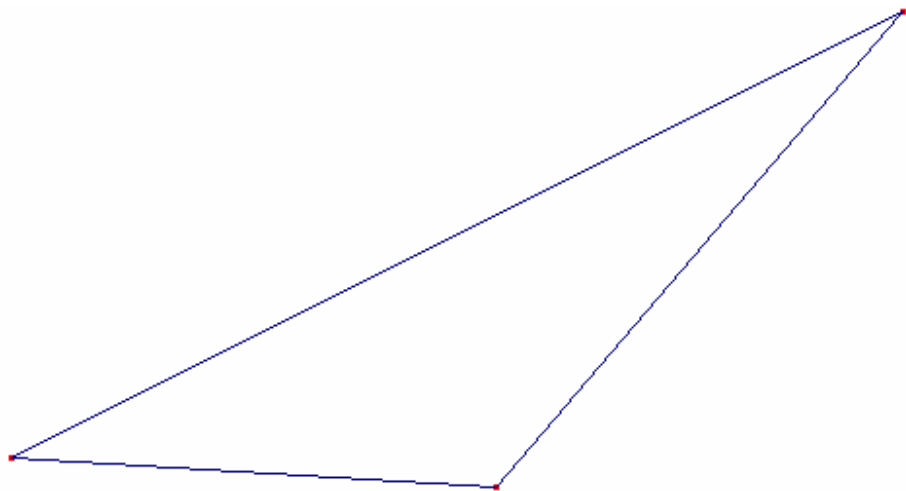
Para la actividad de **dictado al profesor, Ficha 15**.

<p>Este es el triángulo que se deberá entregar en caso que los alumnos den como información cualquiera de los datos que se muestra a continuación: a) Un lado mide 4,3 cm, un ángulo mide 100° y otro ángulo mide 50°; b) Un lado mide 4,3 cm, un ángulo mide 100° y otro ángulo mide 30°; c) Un lado mide 4,3 cm, un ángulo mide 30° y otro ángulo mide 50°; d) Un lado mide 4,3 cm y un ángulo adyacente a dicho lado mide 100°.</p>	<p>Este es el triángulo que se deberá entregar en caso que los alumnos den como información cualquiera de los datos que se muestra a continuación: a) Un lado mide 8,5 cm, un ángulo mide 30° y otro ángulo mide 50°; b) Un lado mide 8,5 cm, un ángulo mide 30° y otro ángulo mide 100°; c) Un lado mide 8,5 cm, un ángulo mide 100° y otro ángulo mide 50°;</p>
	

Para la actividad de **dictado al profesor, Ficha 15**.

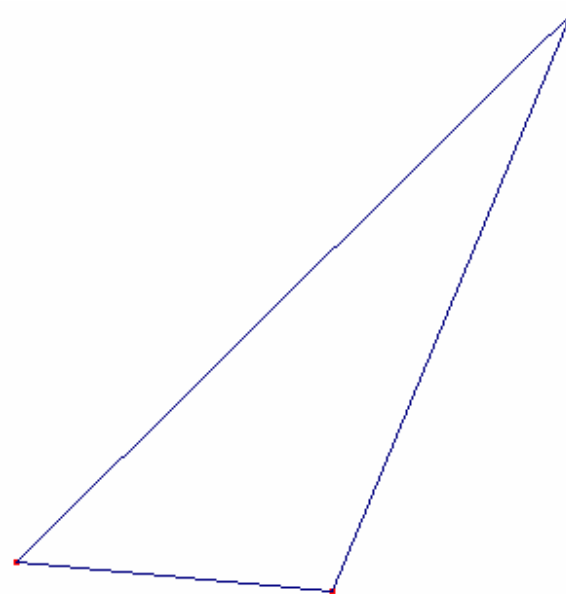
Este es el triángulo que se deberá entregar en caso que los alumnos den como información cualquiera de los datos que se muestra a continuación:

a) Un lado mide 8,5 cm, otro lado mide 6,6 cm y un ángulo mide 30°



Este es el triángulo que se deberá entregar en caso que los alumnos den como información cualquiera de los datos que se muestra a continuación:

a) Un lado mide 8,5 cm, otro lado mide 4,3 cm y un ángulo mide 50° ; b) un lado mide 4,3 cm y un ángulo adyacente a él mide 50° .



Material
anexo 9

Segunda Unidad

Séptimo
Básico

Material para el profesor (a)

Para la actividad de **dictado al profesor, Ficha 15.**

Este es el triángulo que se deberá entregar en caso que los alumnos den como información cualquiera de los datos que se muestra a continuación:

a) Un lado mide 6,6 cm, otro lado mide 4,3 cm y un ángulo mide 100°



Este es el triángulo que se deberá entregar en caso que los alumnos den como información cualquiera de los datos que se muestra a continuación:

a) un lado mide 8,5cm y un ángulo mide 100°

