

Matemática
Octavo año Básico
SEGUNDA UNIDAD DIDÁCTICA

ESTUDIANDO LA PROPORCIONALIDAD

Coordinadora
Lorena Espinoza S.

Autores

Joaquim Barbé F.	Lorena Espinoza S.
Francisco Cerda B.	Fanny Waisman C.
Grecia Gálvez P.	Ramón Ruiz O.

ÍNDICE

I	Presentación	5
II	Esquema	12
III	Orientaciones para el docente: estrategia didáctica	14
IV	Planes de clases	41
V	Pruebas y Evaluación de la Unidad	54
VI	Espacio para la reflexión personal	65
VII	Glosario	66
VIII	Fichas y materiales para alumnas y alumnos	68

SEGUNDA UNIDAD DIDÁCTICA

Estudiando la Proporcionalidad

APRENDIZAJES ESPERADOS DEL PROGRAMA

- *Establecen relaciones entre magnitudes involucradas en problemas diversos y discriminan entre las relaciones proporcionales directas e inversas apoyándose en la representación gráfica.*
- *Utilizan diversas estrategias para solucionar problemas que implican variaciones proporcionales de las magnitudes, incluida la representación gráfica.*
- *Interpretan gráficos de situaciones diversas e identifican el tipo de relación que se establece entre dos variables relacionándolas con la variación proporcional.*
- *Resuelven problemas de proporcionalidad planteados en contextos geométricos y/o numéricos aplicando adecuadamente el cociente constante o el producto constante según corresponda.*

APRENDIZAJES ESPERADOS PARA LA UNIDAD

- En situaciones diversas, establecen relaciones entre dos variables y determinan si la relación entre ambas es directamente proporcional, inversamente proporcional o no proporcional.
- Utilizan tablas y gráficos para resolver problemas de proporcionalidad directa e inversa.
- Asocian la proporcionalidad directa entre dos variables a la constancia del cociente entre valores correspondientes de dichas variables y al gráfico de una recta que pasa por el origen del sistema de coordenadas.
- Asocian la proporcionalidad inversa entre dos variables a la constancia del producto entre valores correspondientes y al gráfico de una curva que se acerca progresivamente a ambos ejes.

Aprendizajes previos:

- Resuelven problemas multiplicativos de variación proporcional.
- Organizan datos en una tabla de valores.
- Utilizan razones internas para calcular valores desconocidos en situaciones de proporcionalidad directa e inversa.
- Construyen e interpretan distintos tipos de gráficos que representan una relación entre dos variables.
- Identifican relaciones de dependencia entre dos variables.

I. Presentación de la Unidad Didáctica

Esta Unidad se centra en el estudio de la *proporcionalidad directa e inversa*. El estudio se realiza a partir de los conocimientos que niñas y niños aprendieron tanto en la unidad anterior sobre el estudio de gráficos, como en cursos anteriores sobre la *proporcionalidad*. Apoyándose en estos conocimientos los estudiantes avanzan en la apropiación de una estrategia de resolución de problemas de este campo, debiendo determinar si la relación entre las variables de la situación es de proporcionalidad directa, inversa o de otro tipo. Utilizan la comparación entre variaciones en cada una de las variables, el estudio de la relación entre valores correspondientes de ambas variables y el gráfico que sirve para identificar el tipo de relación que existe entre las variables, para obtener el valor de una variable que corresponde a un valor dado de la otra, y para describir y comprender el comportamiento global de la relación. Interesa que niños y niñas establezcan semejanzas y diferencias entre la proporcionalidad directa e inversa para que construyan una comprensión amplia y profunda de la proporcionalidad.

Es importante señalar que en la Unidad se consideran solo **valores positivos** de las variables de las situaciones que se estudian. De esta forma, el gráfico de las relaciones entre variables queda restringido al primer cuadrante del sistema de coordenadas cartesiano.

1. Tareas matemáticas

Las *tareas matemáticas* que niñas y niños realizan para lograr los aprendizajes esperados de esta Unidad son:

- Determinan si la relación entre dos variables es directamente proporcional o no proporcional.
- Reconocen gráficos que representan relaciones directamente proporcionales.
- Comparan gráficos que representan relaciones directamente proporcionales para inferir información relevante.
- Construyen tablas de valores asociadas a una relación de proporcionalidad directa.
- Realizan gráficos que representan relaciones directamente proporcionales.
- Determinan si la relación entre dos variables es inversamente proporcional o de otro tipo.
- Reconocen gráficos que representan relaciones inversamente proporcionales.
- Construyen tablas de valores asociadas a una relación de proporcionalidad inversa.
- Realizan gráficos que representan relaciones inversamente proporcionales.
- Comparan gráficos que representan relaciones inversamente proporcionales para inferir información relevante.

2. Variables didácticas

Las *variables didácticas* que se consideran para graduar la complejidad de las tareas matemáticas que niñas y niños realizan son:

- El tipo de relación entre las variables: proporcionalidad directa, proporcionalidad inversa, no proporcional.
- Origen de la proporcionalidad: situaciones que corresponden a una convención social, corresponden a una ley natural.

- El contexto de las situaciones: numérico, geométrico, físico.
- Tipo de situación: situaciones realizadas experimentalmente por los estudiantes, presentadas verbalmente.
- Tipo de registro para proporcionar los datos: tabla, pares ordenados, gráfico, fórmula.

3. Procedimientos

Los *procedimientos* que niñas y niños construyen y se apropian para realizar las tareas son:

- En la determinación de la proporcionalidad directa:
 - Determinan razones al interior de una variable y las comparan con las razones correspondientes al interior de la otra variable. Si estas razones son siempre iguales, entonces la relación entre las variables es de proporcionalidad directa.
 - Determinan variaciones *al interior de una variable* y las comparan con las variaciones correspondientes al interior de la otra variable. Si a variaciones iguales en una variable corresponden variaciones iguales en la otra, entonces la relación entre las variables es de proporcionalidad directa.
 - Comprueban que el valor correspondiente a la suma de dos valores de una de las variables ($a + b$), es igual a la suma de los valores correspondientes a cada uno de estos valores (a y b).
 - Determinan razones *entre valores* correspondientes de ambas variables. Si estas razones son siempre iguales, entonces la relación entre las variables es de proporcionalidad directa.
 - Reconocen que si el gráfico de la relación entre las variables es una recta que pasa por el origen, entonces la relación entre las variables es de proporcionalidad directa.
- En la construcción de tablas de valores asociadas a una proporcionalidad directa:
 - Determinan valores de una de las variables a partir de valores de la otra variable de forma experimental.
 - Calculan valores de una de las variables a partir de valores de la otra variable utilizando *razones al interior de las variables (razones internas)*.
 - Calculan valores de una de las variables a partir de valores de la otra variable utilizando la razón entre valores correspondientes de las variables (*constante de proporcionalidad*).
- En la determinación de la proporcionalidad inversa:
 - Determinan razones al interior de una variable y las comparan con las razones correspondientes al interior de la otra variable. Si la razón al interior de una variable es la inversa de la otra razón en todos los casos, entonces la relación entre las variables es de proporcionalidad inversa.
 - Calculan productos entre valores correspondientes de ambas variables. Si estos productos son siempre iguales, entonces la relación entre las variables es de proporcionalidad inversa.
 - Reconocen que si el gráfico de la relación entre las variables es una curva que se acerca progresivamente a los ejes de coordenadas, entonces la relación entre las variables es de proporcionalidad inversa.

- En la construcción de tablas de valores asociadas a una proporcionalidad inversa:
 - Calculan valores de una de las variables a partir de valores de la otra variable utilizando *razones al interior de las variables (razones internas)*.
 - Calculan valores de una de las variables a partir de valores de la otra variable utilizando el producto entre valores correspondientes de las variables (*constante de proporcionalidad*).

4. Fundamentos centrales de la unidad

- ◆ La relación entre dos variables puede ser de proporcionalidad directa, proporcionalidad inversa, o no proporcional, es decir, una relación de otro tipo como, por ejemplo, exponencial, cuadrática, etc.
- ◆ Cuando la relación entre dos variables es de *proporcionalidad directa*, se verifican las siguientes propiedades:
 - Si los valores de una de las variables aumentan (o disminuyen), los valores de la otra también aumentan (o disminuyen).
 - A variaciones iguales en una de las variables se producen variaciones en la otra, que también son iguales.
 - Si los valores de una de las variables se duplican, triplican, etc., los valores correspondientes de la otra variable también se duplican, triplican, etc.
 - El valor correspondiente a la suma de dos valores de una de las variables ($a + b$), es igual a la suma de los valores correspondientes a cada uno de estos valores (a y b).
 - El cociente entre valores correspondientes de ambas variables es un valor único.
 - El gráfico que representa la relación es una línea recta que pasa por el origen del sistema de coordenadas. La inclinación de esta recta está determinada por el valor del cociente entre valores correspondientes.

Las dos primeras propiedades son necesarias para determinar que la relación es de proporcionalidad directa, pero no suficientes. En cambio, las cuatro últimas sí lo son.

- ◆ La *constante de proporcionalidad directa* se obtiene realizando la división entre valores de la variable dependiente por valores de la variable independiente.
- ◆ Cuando la relación entre dos variables es de *proporcionalidad inversa*, se verifican las siguientes propiedades:
 - Si los valores de una de las variables aumentan (o disminuyen), los valores de la otra disminuyen (o aumentan).
 - Si los valores de una de las variables se duplican, triplican, etc., los valores correspondientes de la otra variable se reducen a la mitad, tercera parte, etc.
 - El producto entre valores correspondientes de ambas variables es un valor único.
 - El gráfico que representa la relación es una curva que se acerca progresivamente a ambos ejes (hipérbola).

La primera propiedad es necesaria para determinar que la relación es de proporcionalidad inversa, pero no suficiente. En cambio, las tres últimas sí lo son.

5. Descripción del proceso por etapas

En la **primera etapa** el proceso parte realizando un estudio de las propiedades fundamentales de la relación de **proporcionalidad directa**, que permite distinguirla de otras relaciones mediante la resolución de problemas y la experimentación. Este estudio se realiza en tres apartados que abordan progresivamente los aspectos esenciales de esta relación. En el primer apartado, los estudiantes van construyendo sucesivamente las propiedades de la relación de proporcionalidad directa hasta llegar, en el segundo apartado, a una caracterización completa de la proporcionalidad directa. En el apartado tres se vuelve al estudio de su representación gráfica, esta vez frente a la problemática de la graduación de los ejes coordenados. La estrategia contempla estudiar la proporcionalidad directa en contraste a otras relaciones de dependencia distintas, con la finalidad de caracterizarla y profundizar en su comprensión. Interesa que los estudiantes construyan una mirada más amplia que les permita romper con la visión dominante en la cultura de que toda relación es de proporcionalidad. Para finalizar, se aplica una prueba parcial de la Unidad que permite verificar los aprendizajes matemáticos logrados por cada niño y niña al término de esta etapa y aquellos contenidos que deberán retomarse.

En la **segunda etapa** se avanza en el estudio de la relación de **proporcionalidad inversa** entre dos variables. Se parte con el problema de cómo identificar *deductivamente* una relación de proporcionalidad inversa entre dos variables, a partir de cierta información dada. Esta deducción se puede realizar a partir de la *definición* de la relación, ya sea porque es una ley natural o porque es un conocimiento culturalmente aceptado, a partir de los valores de una tabla o de un gráfico. Niñas y niños aprenderán, además, a calcular valores de una variable conociendo el valor correspondiente de la otra variable y a construir su gráfico; concluirán el estudio con una caracterización completa de este tipo de relación. Tal como se realiza el estudio de la proporcionalidad directa, la proporcionalidad inversa se estudia en contraste a otras relaciones que no lo son.

El proceso se completa en la **tercera etapa** trabajando y profundizando los aspectos sobre la proporcionalidad directa e inversa estudiados en las etapas anteriores, sistematizando y articulando los nuevos conocimientos adquiridos con los ya conocidos. Al finalizar esta etapa se aplica una prueba de la Unidad que permite verificar los aprendizajes matemáticos logrados por cada niño y los que habrá que retomar.

6. Sugerencias para el trabajo de los aprendizajes previos

Antes de dar inicio al estudio de la Unidad, es necesario realizar un trabajo sobre los aprendizajes previos. Interesa que niños y niñas activen los conocimientos necesarios para que puedan enfrentar adecuadamente la Unidad y lograr los aprendizajes esperados en ella. El profesor o profesora debe asegurarse de que todos los estudiantes:

- **Resuelven problemas multiplicativos de variación proporcional:** este conocimiento es necesario para que puedan enfrentar los problemas de proporcionalidad, realizando cálculos en base a tres valores conocidos para determinar un cuarto valor. De esta forma, se espera que niños y niñas:
 - Reconozcan la división como la operación que permite anticipar el resultado de la acción de agrupar (o distribuir) según una medida. Para ello se les puede plantear problemas como el siguiente: *¿Cuántos paquetes de 5 betarragas se pueden hacer con 75 betarragas?*

- Reconozcan la división como la operación que permite anticipar el resultado de la acción de realizar un reparto equitativo. Para ello se les puede plantear problemas como el siguiente: *El papá de Juan compró 32 bolitas y las repartió equitativamente entre sus 4 hijos. ¿Cuántas bolitas le tocó a cada uno?*
 - Reconozcan la multiplicación como la operación que permite anticipar el resultado de la iteración (o ponderación) de una medida. Para ello se les puede plantear problemas como el siguiente: *Mi hermana compró 12 confites y yo compré el triple que ella. ¿Cuántos dulces compré yo?*
- **Organizan datos en una tabla de valores:** este conocimiento es indispensable para que puedan realizar gran parte de los problemas de esta Unidad Didáctica. En la mayoría de los casos se utiliza la tabla de valores como *medio* para determinar si la relación entre dos variables es de proporcionalidad directa, de proporcionalidad inversa o no proporcional y, en muchos de estos casos, la tabla no viene dada, sino que los alumnos deberán construirla. El profesor puede plantear problemas como el siguiente:
 - “Recopilen datos en los que se asocien dos variables del siguiente tipo:
 - En personas:* número de zapato y largo del pie en centímetros, edad y peso, edad y estatura, estatura y peso.
 - En precios de:* UF y su equivalente en pesos en un mes determinado (día a día), llamadas internacionales por minuto, u otros.
 - En mediciones:* distancia recorrida y tiempo (a una velocidad constante), perímetro y área de cuadrados por variación de la longitud de sus lados.

Luego, cada docente puede preguntar a su curso: *¿para qué sirve colocar los datos en una tabla de valores?, ¿cuándo resulta importante seguir un criterio de orden para organizar los datos?* Se espera que los estudiantes reconozcan que la tabla sirve como medio para organizar datos. Además, si está ordenada, se convierte en una herramienta potente para estudiar el tipo de relación que existe entre las variables de la situación.

- **Construyen gráficos en un sistema de coordenadas cartesianas e interpretan información a partir de ellos:** el dominio de estos conocimientos permitirá a los estudiantes abordar aspectos esenciales de la unidad como la construcción e interpretación de gráficos que representan una relación de proporcionalidad directa, inversa o no proporcional entre dos variables. En la mayor parte de los casos se deberá graficar una relación entre dos variables a partir de datos organizados o no en una tabla de valores; en los casos en que los gráficos se encuentran dados, se deberá interpretar la información que estos proporcionan en cuanto a la relación entre las variables. Como ejemplo se pueden plantear los siguientes problemas:
 - “Los datos organizados en la siguiente tabla corresponden a la altura de una determinada persona con respecto a su edad.”

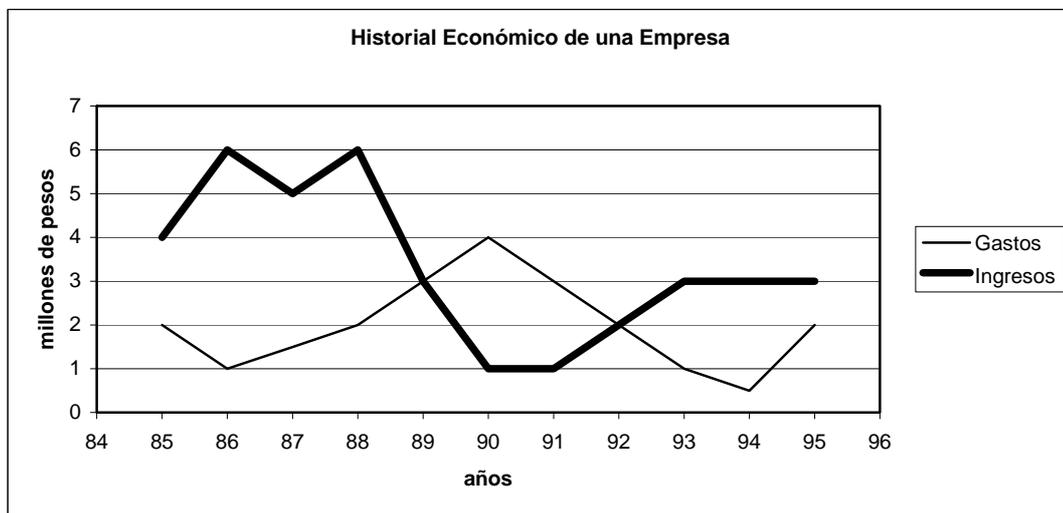
Edad (años)	Estatura (cm.)
0	50
5	110
10	150
15	165
20	175
25	180
40	180
60	180
65	175
70	170
75	165
80	165

Identifiquen las variables involucradas en la situación y representen en un gráfico la relación entre estas variables.

Una vez realizado el gráfico, el profesor(a) pide a su curso que, a partir de la lectura del gráfico, *determinen la estatura de la persona al nacer, la edad en que alcanza su estatura mayor, y la edad en que comienza a disminuir su estatura.*

Este primer problema tiene por finalidad que los estudiantes construyan un gráfico a partir de una tabla de valores y que, a partir del gráfico, interpreten la información que este proporciona.

- El siguiente gráfico muestra los ingresos y los gastos de una empresa.



El profesor realiza las siguientes preguntas: *¿Cuál fue el mayor gasto realizado por la empresa? ¿En qué período los ingresos fueron mayores que los gastos? ¿En qué períodos los ingresos fueron inferiores a los gastos? ¿En qué año los ingresos y los gastos fueron iguales?*

Este segundo problema tiene por finalidad que los estudiantes establezcan que el gráfico de una relación entre dos variables permite describir y comprender el comportamiento global de la relación, identificar valores en los que la relación tiene un comportamiento particular, así como predecir comportamientos. Generalmente, esto resulta más difícil de lograr a partir de la tabla de valores.

- **Utilizan razones internas para calcular valores desconocidos en situaciones de proporcionalidad directa e inversa:** Este aprendizaje es importante para que niñas y niños cuenten con una herramienta de apoyo para reconocer y enfrentar problemas de proporcionalidad. Se trata de un procedimiento particular, que servirá como estrategia de base para el estudio de esta Unidad. Por ejemplo: *Si US\$ 3 tienen un valor de \$1.800, ¿cuánto valen US\$ 9?* Otro problema podría consistir en *dar una tabla de valores incompleta, indicando el tipo de relación entre las variables (proporcionalidad directa o inversa), y pidiendo a los estudiantes que la completen. La condición importante aquí para que los estudiantes utilicen este procedimiento (razones internas), es que los valores de una de las variables sean múltiplos del primer valor dado.*

II. ESQUEMA

APRENDIZAJES ESPERADOS



ETAPA 3

<u>TAREAS MATEMÁTICAS</u>	<u>CONDICIONES</u>	<u>TÉCNICAS</u>	<u>FUNDAMENTOS CENTRALES</u>
<ul style="list-style-type: none"> - Determinan si la relación entre dos variables es directamente proporcional, inversamente proporcional o no proporcional. - Construyen tablas de valores y gráficos de relaciones de proporcionalidad directa, proporcionalidad inversa y no proporcionales. 	Todas las anteriores.	Las mismas técnicas descritas para las etapas 2 y 3 .	Todos los fundamentos anteriores.



ETAPA 2

<u>TAREAS MATEMÁTICAS</u>	<u>CONDICIONES</u>	<u>TÉCNICAS</u>	<u>FUNDAMENTOS CENTRALES</u>
<ul style="list-style-type: none"> - Determinan si la relación entre dos variables es inversamente proporcional o de otro tipo. - Reconocen gráficos que representan relaciones inversamente proporcionales. - Construyen tablas de valores asociadas a una relación de proporcionalidad inversa. - Realizan gráficos que representan relaciones inversamente proporcionales. - Comparan gráficos que representan relaciones inversamente proporcionales para inferir información relevante. 	<p>Relaciones de proporcionalidad inversa y de otros tipos.</p> <p>Situaciones conocidas a través de una tabla de valores o un gráfico.</p> <p>Contextos numéricos y geométricos.</p> <p>Relación entre las variables de las situaciones conocidas y no conocidas por los estudiantes.</p>	<p>Para determinar si una relación es de proporcionalidad inversa:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Verifican si las razones al interior de una variable son siempre iguales a las inversas de las razones correspondientes al interior de la otra variable. - Verifican si los productos entre valores correspondientes de ambas variables son siempre iguales. - Verifican si el gráfico de la relación entre las variables es una curva que se acerca progresivamente a los ejes de coordenadas sin cortarlos. - En la construcción de tablas de valores asociadas a una proporcionalidad inversa: <ul style="list-style-type: none"> ▪ Calculan valores de una de las variables a partir de valores de la otra variable utilizando <i>razones al interior de las variables (razones internas)</i>. ▪ Calculan valores de una de las 	<ul style="list-style-type: none"> ♦ La relación entre dos variables puede ser de proporcionalidad directa, proporcionalidad inversa o no proporcional. ♦ Cuando la relación entre dos variables es de <i>proporcionalidad inversa</i>, se verifican las siguientes propiedades: <ul style="list-style-type: none"> - Si los valores de una de las variables aumentan (o disminuyen), los valores de la otra disminuyen (o aumentan), cuando ambas variables son positivas. - Si los valores de una de las variables se duplican, triplican, etc., los valores correspondientes de la otra variable se reducen a la mitad, a la tercera parte, etc. - El producto entre valores correspondientes de ambas variables es un valor único. - El gráfico que representa la relación es una curva que se acerca progresivamente a ambos ejes sin cortarlos (hipérbola). <p>La primera propiedad es necesaria para determinar que la relación sea de proporcionalidad inversa, pero no suficiente. En cambio, las tres últimas sí lo son.</p>

		variables a partir de valores de la otra variable, utilizando el producto entre valores correspondientes de las variables (<i>constante de proporcionalidad</i>).	
--	--	---	--



ETAPA 1

<u>TAREAS</u> <u>MATEMÁTICAS</u>	<u>CONDICIONES</u>	<u>TÉCNICAS</u>	<u>FUNDAMENTOS CENTRALES</u>
<ul style="list-style-type: none"> - Determinan si la relación entre dos variables es directamente proporcional o no. - Reconocen gráficos que representan relaciones directamente proporcionales. - Comparan gráficos que representan relaciones directamente proporcionales para inferir información relevante. - Construyen tablas de valores asociadas a una relación de proporcionalidad directa. - Realizan gráficos que representan relaciones directamente proporcionales. 	<p>Relaciones de proporcionalidad directa y no proporcionales.</p> <p>Situaciones experimentales y conocidas a través de una tabla de valores o un gráfico.</p> <p>Contextos numéricos y físicos.</p> <p>Relación entre las variables de las situaciones no conocidas por los estudiantes.</p> <p>Para la comparación de dos o más gráficos de relaciones directamente proporcionales:</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ rectas con distinta pendiente. ▪ rectas con igual pendiente y ejes graduados con escalas diferentes. 	<p>Para determinar si una relación es de proporcionalidad directa:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Verifican si las razones al interior de una variable son siempre iguales a las razones correspondientes al interior de la otra variable. - Verifican si las razones entre valores correspondientes de ambas variables son siempre iguales. - Verifican si el gráfico de la relación entre las variables es una recta que pasa por el origen. - En la construcción de tablas de valores asociadas a una proporcionalidad directa: <ul style="list-style-type: none"> ▪ Determinan valores de una de las variables a partir de valores de la otra variable de forma experimental. ▪ Calculan valores de una de las variables a partir de valores de la otra variable utilizando <i>razones al interior de las variables (razones internas)</i>. ▪ Calculan valores de una de las variables a partir de valores de la otra variable utilizando la razón entre valores correspondientes de las variables (<i>constante de proporcionalidad</i>). 	<ul style="list-style-type: none"> ♦ La relación entre dos variables puede ser de proporcionalidad directa, proporcionalidad inversa, o no proporcional. ♦ Cuando la relación entre dos variables es de <i>proporcionalidad directa</i>, se verifican las siguientes propiedades: <ul style="list-style-type: none"> - Si los valores de una de las variables aumentan (o disminuyen), los valores de la otra también aumentan (o disminuyen), cuando ambas variables son positivas. - A variaciones iguales en una de las variables se producen variaciones en la otra que también son iguales. - Si los valores de una de las variables se duplican, triplican, etc., los valores correspondientes de la otra variable también se duplican, triplican, etc. - El valor correspondiente a la suma de dos valores de una de las variables ($a + b$), es igual a la suma de los valores correspondientes a cada uno de estos valores (a y b). - El cociente entre valores correspondientes de ambas variables es un valor único. - El gráfico que representa la relación es una línea recta que pasa por el origen del sistema de coordenadas. La inclinación de esta recta está determinada por el valor del cociente entre valores correspondientes. <p>Las dos primeras propiedades son necesarias para determinar que la relación sea de proporcionalidad directa, pero no suficientes. En cambio, las cuatro últimas sí lo son.</p>



APRENDIZAJES PREVIOS

III. Orientaciones para el docente: desarrollo de la estrategia didáctica

La estrategia didáctica propuesta para esta Unidad considera tres etapas que van abordando progresivamente los aspectos esenciales de la proporcionalidad directa e inversa. Las etapas son: estudiando la proporcionalidad directa; estudiando la proporcionalidad inversa; asegurando los aprendizajes estudiados.

En esta unidad didáctica se amplía el estudio sobre la proporcionalidad directa e inversa que los estudiantes realizaron en 7° Básico, incorporando un nuevo elemento que permite enriquecerlo desde la perspectiva gráfica. En efecto, el gráfico permitirá a los estudiantes profundizar en el estudio de la relación de proporcionalidad directa entre dos variables, es decir, en el estudio de las variaciones entre estas. Por ello, es muy importante que los estudiantes hayan realizado previamente un estudio asociado a la construcción y análisis de distintos tipos de gráficos, así como de los elementos relacionados a ellos, tal como propone la Primera Unidad Didáctica de 8° Básico. Entre los elementos esenciales para dicha construcción están lo que es una variable, tipos de variables, tipos de relaciones de dependencia entre dos variables, etc.

Es importante señalar que en la Unidad se consideran solo **valores positivos** de las variables de las situaciones que se estudian. De esta forma, el gráfico de las relaciones entre variables queda limitado al primer cuadrante del sistema de coordenadas cartesiano.

ETAPA I: *Estudiando la proporcionalidad directa*

La Unidad Didáctica gira en torno al estudio de la proporcionalidad directa e inversa, siendo una de sus tareas matemáticas centrales el *determinar si la relación entre las variables de una situación es de proporcionalidad directa, inversa o de otro tipo*. En esta etapa estudiaremos las propiedades fundamentales de la relación de proporcionalidad directa que permiten distinguirla de otras relaciones, en particular el gráfico asociado a ella, mediante la resolución de problemas y la experimentación.

El estudio se realiza en tres apartados que abordan sucesivamente los aspectos esenciales de esta relación. Se trata de que los estudiantes vayan construyendo progresivamente sus propiedades hasta llegar, en el segundo apartado, a una caracterización completa de la proporcionalidad directa. En el apartado tres se vuelve al estudio de su representación gráfica, esta vez frente a la problemática de la graduación de los ejes coordenados.

I.1. Existencia de la relación de proporcionalidad directa:

Nos proponemos estudiar ahora un tipo particular de relación de dependencia entre dos variables, la relación de *proporcionalidad directa*. La estrategia contempla estudiarla en contraste a otras relaciones de dependencia distintas, con la finalidad de caracterizarla y profundizar en su comprensión. No se trata aquí de hacer un estudio de todas las relaciones de dependencia existentes o posibles, sino que de proporcionar a los alumnos y alumnas una mirada más amplia que les permita romper con la visión dominante en la cultura de que toda relación es de proporcionalidad.

En este primer apartado de la etapa se enfrentarán al problema de identificar si la relación entre dos variables es de proporcionalidad directa o no. Hay dos estrategias para responder al problema de la existencia: mediante la *experimentación* o bien, mediante la *deducción*.

La primera estrategia es tratada en el subapartado **I.1.1**, en que deben predecir el comportamiento de una variable en función de valores de la otra, frente a un fenómeno poco conocido para los estudiantes y sin contar previamente con datos reales. En este caso, niñas y niños hacen sus predicciones y obtienen **experimentalmente** sus comprobaciones.

La segunda estrategia es tratada en el subapartado **I.1.2**, en que deben predecir el comportamiento de una variable en función de valores de la otra, frente a un fenómeno poco conocido para los estudiantes, pero contando previamente con datos concretos o con el gráfico asociado. En este caso, niñas y niños obtienen sus predicciones y conclusiones mediante la **deducción**.

Al final de este apartado se sistematizan los aspectos “intuitivos” sobre la proporcionalidad directa que surgieron del trabajo y que serán formalizados más tarde en el apartado **I.2** de esta etapa.

I.1.1. Determinación experimental de los valores de las variables y estudio de la relación entre estas

La situación inicial de esta etapa consiste en una actividad *experimental* que permita a alumnas y alumnos comprender que, así como existen relaciones proporcionales, existen también relaciones que no lo son. En efecto, dependiendo de las condiciones, una relación entre las mismas variables puede o no ser proporcional. Por otro lado, el estudio experimental propuesto permite a los alumnos reconocer que las matemáticas, y en particular la proporcionalidad, tiene como finalidad describir matemáticamente fenómenos que ocurren en la realidad a través de una expresión general (*modelizar*), que sirve como **medio** para estudiarlos. Esta actividad permitirá, además, que vayan reconociendo las características de los gráficos asociados a una relación de proporcionalidad directa.

La actividad que se propone es la siguiente:

Actividad 1:

Los alumnos realizan la **Ficha 1**.

El profesor(a) propone un problema para que sea resuelto grupalmente (grupos de 5 integrantes). Para ello, cada grupo dispondrá de 2 vasos distintos, uno **recto** (*diámetro constante*) y uno **curvo** (*diámetro variable*), un jarro con agua con colorante (jugo en polvo), una regla graduada (en *cm* y *mm*) y una tapita de bebida o un vasito graduado (como los que vienen en los medicamentos). Se trata de que los niños dispongan de una medida de líquido **fija**, por ejemplo la de una tapita de bebida. En el caso de usar un vasito graduado, los niños deberán usar siempre **la misma medida del vasito**, por ejemplo 20cc. En este sentido, usar una *jeringa graduada* y sacar siempre la misma medida, por ejemplo 20cc, puede ser más eficiente y práctico que usar una tapita o un vasito, porque permite mayor precisión tanto en la medida como en el trasvasije del líquido. Sin embargo, puede que no sea un material muy accesible; por esta razón, en todas las actividades similares a esta propuestas en la unidad se hace mención solo a una tapita o vasito.

La tarea matemática asociada a la actividad consiste en *predecir cómo varía la altura de líquido en el vaso, a medida que se van agregando (una a una) las tapitas (o vasitos graduados) con agua, para comprobarlo experimentalmente después.*

Dado que todos los vasos tienden a ser curvos o deformes en el fondo, previo a comenzar la actividad, es de suma importancia establecer el nivel cero desde el cual se medirá la altura del líquido en el vaso. Para ello, se deberá agregar a los vasos una cantidad de líquido tal que sobrepase las deformidades del fondo y que además **coincida con el 0 de la regla**, marcando mediante un plumón de pizarra (idealmente de punta fina) la altura que señala el **nivel cero**. Por lo general, el 0 de la regla no está ubicado al inicio de la misma. Por ello habrá que llenar el envase hasta que el nivel de líquido lo alcance.



Los vasos utilizados pueden ser distintos a los de la foto, siempre y cuando cumplan con la condición de ser uno recto y el otro curvo.

A continuación se pide a los alumnos y alumnas que agreguen al vaso **recto** una o varias tapitas de agua (un número determinado de veces, suficiente para que la diferencia de niveles sea fácilmente apreciable, alrededor de 1cm). Luego de haber agregado dicha cantidad de agua, se les pregunta: ¿Qué ocurrió al agregar este número de tapitas de agua al vaso? ¿En cuánto varió la altura del agua en el vaso? Una vez que hayan medido y dado respuesta, se les pregunta: ¿Qué pasará si agregamos otra cantidad igual de líquido al vaso? ¿Con cuántas tapitas creen que se llenará el vaso? Luego, se les invita a realizar el experimento y comprobar sus predicciones, anotando en una tabla de datos los valores que vayan obteniendo.

Una vez realizado el experimento, se les invita a responder: ¿Por qué la altura del agua varía lo mismo cada vez que se agrega una cantidad igual de agua? ¿De qué depende la altura del agua en el vaso? ¿Cuáles son las variables en juego en esta situación? Finalmente, se invita a niñas y niños a graficar la situación para que vayan reconociendo el tipo de gráfico asociado a una relación de proporcionalidad directa.

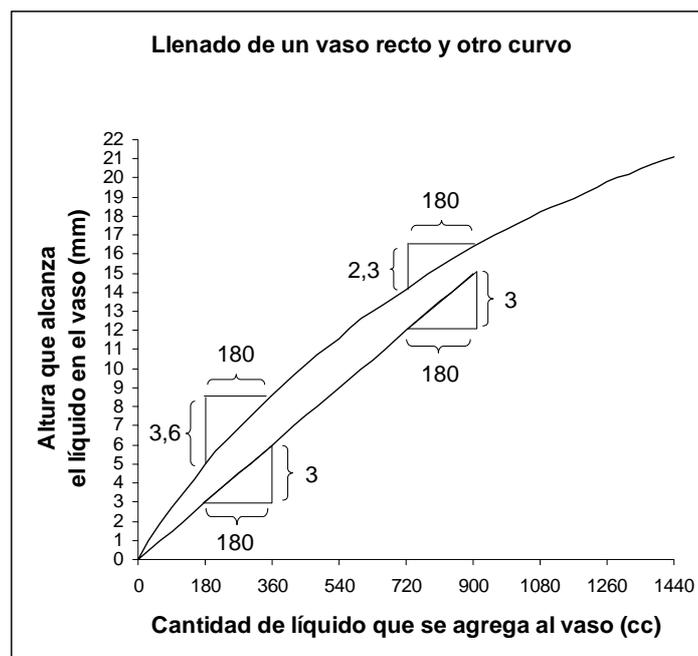
La actividad continúa pidiendo que agreguen al vaso **curvo** una o varias tapitas de agua (un número determinado de veces, suficiente para que la diferencia de niveles sea fácilmente apreciable, alrededor de 1cm). Al igual que para el caso del vaso recto, luego de haber agregado dicha cantidad de agua, se les pregunta a los estudiantes: ¿Qué ocurrió al agregar este número de tapitas de agua al vaso? ¿En cuánto varió la altura del agua en el vaso? Una vez que hayan medido y dado respuesta a las preguntas del profesor(a), se les pregunta: ¿Qué pasará si agregamos otra cantidad igual de líquido al vaso? ¿Con cuántas tapitas creen que se llenará el vaso? Luego, se les invita a realizar el experimento y comprobar sus predicciones, anotando en una tabla de datos los valores que vayan obteniendo.

Una vez realizado el experimento, se les invita a responder: ¿Por qué en este caso la altura del agua no varía lo mismo cada vez que se agrega una cantidad igual de agua? ¿De qué depende la altura del agua en el vaso? ¿Cuáles son las variables en juego en esta situación? Finalmente, se les invita a graficar la situación y a comparar el gráfico obtenido con el gráfico asociado al vaso recto.

Una vez que han terminado el trabajo pedido en la **Ficha 1**, el profesor(a) propone que compartan los resultados que obtuvieron en cada caso y los procedimientos que utilizaron. Luego, genera una discusión mediante preguntas del siguiente tipo:

- ¿Resultaron correctas o no sus predicciones? ¿Por qué?
- ¿Qué ocurría, en cada caso, con la altura del líquido cuando se agregaba agua al vaso?
- Si en ambos experimentos las variables en juego fueron las mismas (*cantidad de líquido agregado al vaso* y *altura del líquido en el vaso*), ¿por qué razón las dos relaciones entre estas variables, cada una determinada por las características del vaso, en un caso recto y en el otro curvo, se comportan de manera diferente, es decir, no son del mismo tipo?
- ¿Por qué en el caso de la primera situación el gráfico obtenido fue una línea recta, y en la segunda situación una curva?

A continuación se muestra la representación gráfica del llenado de dos vasos como los usados en el experimento, uno recto y otro curvo. Como se observa, el vaso recto se llena con 900cc, mientras que el vaso curvo se llena con 1440cc.



Se espera que alumnas y alumnos, apoyados por el profesor o profesora, puedan realizar un análisis que les permita llegar a conclusiones similares a las siguientes:

- En la primera situación, dado que el envase es **recto**, la relación entre las variables cumple:

- Al aumentar la cantidad de agua en el vaso, la altura del agua alcanzada en el vaso también aumenta.
- A incrementos iguales de la cantidad de agua que se agrega, se obtienen incrementos iguales en la altura del líquido del vaso. Así, cuando el volumen del agua en el vaso es de 180cc, la altura del agua en el vaso es de 3cm. Al incrementar el volumen en 180cc, desde 180cc, la altura se incrementa en 3cm. Del mismo modo, al incrementar el volumen en 180cc desde 720cc, la altura se incrementa también en 3cm.
- Al duplicar, triplicar, etc., la cantidad de líquido que se echa en el vaso, la altura del agua en el vaso también se duplica, triplica, etc.
- El gráfico que representa la relación entre la cantidad de líquido en el vaso y la altura del líquido es una **línea recta**.

Una relación que tiene estas características recibe el nombre de **proporcionalidad directa**. Veremos en el apartado **I.1.2.** que existen otras características que permiten de igual forma determinar si una relación es de proporcionalidad directa o no.

- ▶ En la segunda situación, dado que el envase es **curvo**, la relación entre las variables no tiene las mismas características que la relación anterior:
 - Al duplicar, triplicar, etc., la cantidad de líquido que se echa en el vaso, la altura del agua en el vaso **no siempre** se duplica, triplica, etc.
 - A incrementos iguales de la cantidad de agua que se agrega, **no siempre** se obtienen incrementos iguales en la altura del líquido del vaso. Así, cuando el volumen del agua en el vaso es de 180cc, la altura del agua en el vaso es de 3,6cm. Al incrementar el volumen en 180cc, desde 720cc, la altura se incrementa en 2,3cm. Esto muestra que los incrementos de la variable dependiente no son constantes.

Por esta razón, cuando el envase es *curvo*, la relación entre las variables **no es de proporcionalidad directa**.

- ▶ Se puede ver que tanto en el caso del vaso recto como en el vaso curvo, *al aumentar la cantidad de agua en el vaso, la altura del agua alcanzada en el vaso también aumenta*. De esto podemos deducir que esta es una condición necesaria para identificar una relación de proporcionalidad directa, pero **no es una condición suficiente**: en el caso del vaso curvo se cumple esta condición y, sin embargo, **no es** una relación de proporcionalidad directa.
- ▶ En ambas situaciones, la altura del agua en el vaso depende, además de la cantidad de agua que se agrega al vaso, de la forma del vaso, ya sea recta o curva.

I.1.2. Determinación *deductiva* de los valores de la variable: por definición de la relación, a partir de los valores de una tabla y/o a partir de un gráfico.

En esta etapa alumnas y alumnos se enfrentarán con la tarea de **deducir** si la relación entre las variables de un fenómeno es o no de proporcionalidad directa. A diferencia del apartado anterior, contarán con datos concretos para su análisis, presentados en una tabla o en el gráfico asociado. Hemos escogido situaciones problemáticas o fenómenos en los que la relación entre sus variables no es conocida por los

estudiantes, con el propósito de que se vean en la necesidad de estudiarlas, ya que de lo contrario se impondría el conocimiento cultural que poseen del fenómeno, trivializando el proceso de estudio. Este estudio permite, a su vez, que avancen en la caracterización más precisa de la proporcionalidad directa iniciada en el apartado anterior.

Actividad 2

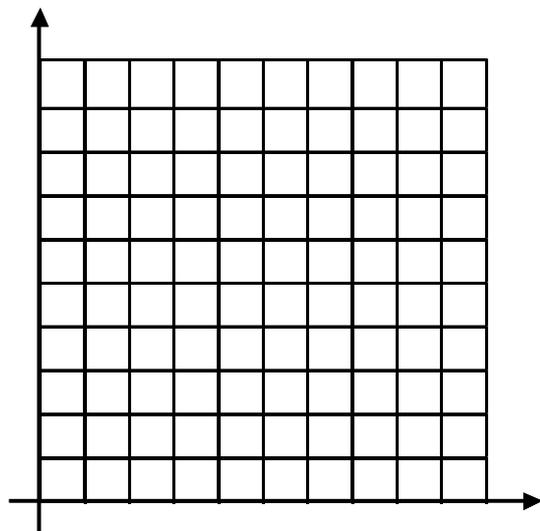
Los alumnos realizan la **Ficha 2**, que contiene los siguientes problemas:

Problema 1.

Una llave que gotea presenta la siguiente pérdida:

minutos	5	10	15	20	30	35	40
litros	0.25	0.5	0.75	1	1.5	1.75	2

- ¿Cuántos litros se pierden en 80 minutos?
- ¿Y en tres cuartos de hora?
- ¿Y en una hora?
- ¿Y en una semana?
- ¿Cuántos litros se pierden en 25 minutos? ¿Y en un minuto?
- Compara la cantidad de agua que se pierde entre 10 y 15 minutos con la que se pierde entre 25 y 30 minutos. ¿Qué puedes concluir?
- Representa gráficamente los datos de la tabla, escribiendo en cada eje la variable que se está representando.
- ¿Qué características presenta el gráfico? ¿Hay algún momento en que el goteo se hace más rápido o más lento?



Problema 2.

Dos atletas participan en una carrera de 1000 metros. El gráfico describe en forma aproximada el comportamiento de los atletas en dicha prueba.

- ¿Cuál atleta empezó la carrera más rápido, el A o el B? ¿Por qué?
- ¿En qué momento un atleta alcanzó al otro? ¿A qué distancia? ¿Quién fue el atleta alcanzado?
- ¿Quién ganó la carrera?
- ¿Por qué falló la estrategia del perdedor?
- ¿Quién mantuvo un ritmo más constante? ¿Fue realmente constante este ritmo?

Una vez que los estudiantes han resuelto los problemas de la Ficha, el docente conduce una discusión sobre las respuestas que obtuvieron en cada uno y los procedimientos que utilizaron. Dentro de esta discusión es importante detenerse en el **problema 1** y preguntar a los estudiantes: ¿cómo obtuvieron la cantidad de litros que pierde la llave en 25 minutos? Esta pregunta permite que emerja otra característica de la proporcionalidad directa. En efecto, para calcular este valor, ya que $25 = 20 + 5$, podemos sumar los valores correspondientes a 20 minutos (1cc) y a 5 minutos (0,25cc). Esta propiedad se puede enunciar de

la siguiente forma: *el valor correspondiente a la suma de dos valores de una de las variables ($a + b$), es igual a la suma de los valores correspondientes a cada uno de estos valores (a y b)*. De esta forma, en 25 minutos la llave pierde $1cc + 0,25cc = 1,25cc$. Es probable que esta propiedad no surja en forma espontánea en el estudio de los alumnos. Por esta razón es recomendable que cada docente realice preguntas que estimulen al curso a pensar en que es posible calcular valores de la variable dependiente mediante esta propiedad. Por ejemplo, preguntar si ven alguna relación entre la cantidad de agua perdida en 15 minutos y la cantidad de agua perdida a los 10 y a los 5 minutos ($15 = 10 + 5$). Luego de que hayan detectado intuitivamente esta propiedad, el profesor(a) puede invitar a los estudiantes a comprobarla calculando otros valores que aparezcan en la tabla, usando esta propiedad.

Ahora, el profesor o profesora plantea preguntas del siguiente tipo:

- ¿En qué casos se cumplieron las características de una relación de proporcionalidad directa estudiadas anteriormente? Es decir:
 - ¿Si los valores de una de las variables aumentan (o disminuyen), los valores de la otra también aumentan (o disminuyen)?
 - ¿A variaciones iguales en una de las variables, se producen variaciones en la otra que también son iguales?.
 - ¿Si los valores de una de las variables se duplican, triplican, etc., los valores correspondientes de la otra variable también se duplican, triplican, etc.?
- ¿Qué peculiaridades tiene el gráfico en aquellos casos en que se cumplen las características anteriores?

Se espera que alumnas y alumnos, apoyados por el profesor(a), puedan realizar un análisis que les permita avanzar hacia la caracterización de la proporcionalidad directa.

- ▶ En el **primer problema**, así como en el caso del corredor **B** del **segundo problema**, la relación entre las variables cumple:
 - Si los valores de una de las variables aumentan (o disminuyen), los valores de la otra también aumentan (o disminuyen).
 - A variaciones iguales en una de las variables se producen variaciones en la otra que también son iguales.
 - Si los valores de una de las variables se duplican, triplican, etc., los valores correspondientes de la otra variable también se duplican, triplican, etc.
 - El valor correspondiente a la suma de dos valores de una de las variables ($a + b$), es igual a la suma de los valores correspondientes a cada uno de estos valores (a y b).
 - El gráfico que representa la relación entre las variables es una línea recta.
 - Una relación que tiene estas características recibe el nombre de **proporcionalidad directa**.

- ▶ En el caso del corredor **A** del **problema 2**, la relación entre las variables no tiene las mismas características que la relación anterior:
 - Al duplicar, triplicar, etc., el tiempo de carrera, la distancia recorrida no se duplica, triplica, etc.

- A incrementos iguales de la cantidad de tiempo, no siempre se obtienen incrementos iguales en la cantidad de distancia recorrida.

Por esta razón la relación entre las variables **no es de proporcionalidad directa**.

El proceso continúa estudiando un *tercer problema* que permitirá seguir avanzando hacia una caracterización completa de la relación de proporcionalidad directa.

Actividad 3

Los alumnos realizan la **Ficha 3** que contiene el siguiente problema:

En el cine “Paraíso” la entrada tiene un valor de \$2.500 para el público general. Además, existe la posibilidad de ser socio del cine comprando una tarjeta con un costo anual de \$5.000, que permite asistir al cine pagando solo \$2.000 por la entrada.

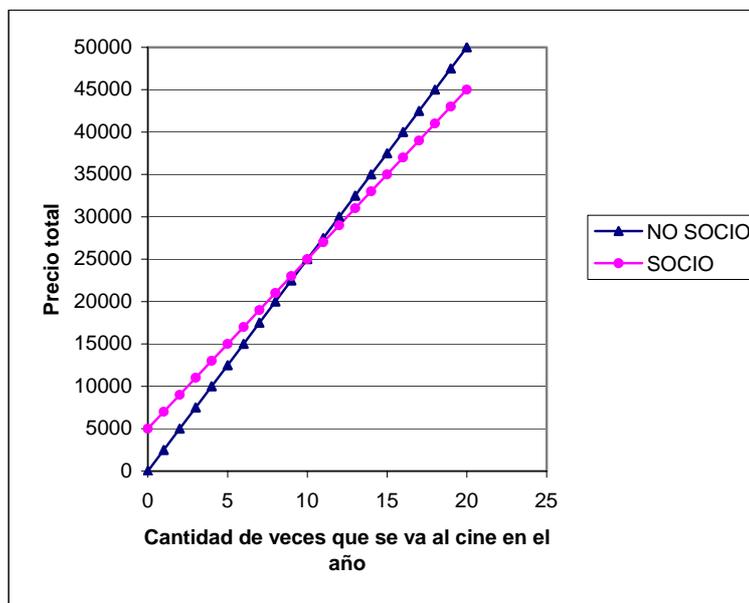
- a. Si una persona va 8 veces al cine en el año, ¿cuánto paga en total en el año si no es socio?
- b. ¿Y si es socio?
- c. Y si va el doble de veces en el año, ¿cuánto paga no siendo socio y siendo socio?
- d. Y si una persona va 20 veces en el año, ¿cuánto paga durante ese año en caso de ser socio, y en caso de no ser socio?
- e. Para que a una persona le convenga hacerse socio, ¿cuántas veces al año, como mínimo, tiene que ir al cine?
- f. Grafica la relación entre las variables del problema para el caso de un socio y para el caso de una persona que no es socia.

Este problema plantea el análisis de dos situaciones que involucran las mismas variables, pero bajo distintas condiciones. Se trata de que los estudiantes determinen en cada caso la relación que hay entre la *cantidad de veces que una persona va al cine en el año* y el *costo total en pesos en el año*.

Una vez que han resuelto la Ficha, el profesor(a) conduce una discusión sobre las respuestas a cada pregunta y los procedimientos que utilizaron. Luego, plantea preguntas del siguiente tipo:

- ¿En qué caso se cumplieron las características de una relación de proporcionalidad directa estudiadas en la etapa anterior?
- De acuerdo a la respuesta de la pregunta c, si un socio va el doble de veces en el año, ¿paga el doble en el año? Y si fuera el triple de veces en el año, ¿pagaría el triple?
- Entonces, en el caso de ser socio, ¿si los valores de una de las variables se duplican, triplican, etc., los valores correspondientes de la otra variable también se duplican, triplican, etc.?
- ¿En qué se diferencian los gráficos correspondientes a cada caso?
- ¿Cuál es el que corresponde a una relación de proporcionalidad directa? ¿Por qué?

A continuación se muestran los gráficos resultantes de cada una de estas relaciones. El punto de intersección entre ambos gráficos corresponde a la cantidad de idas al cine en las cuales el valor total cancelado es el mismo para el socio que para el no socio (10 idas al cine). De esa cantidad de idas al cine en adelante, conviene hacerse socio (esto es, a partir de 11 idas al cine). A partir de esa cantidad, para una misma cantidad de idas al cine, el valor total cancelado es siempre mayor para el no socio que para el socio:



Se espera que los estudiantes obtengan respuestas como las siguientes:

- ▶ En el caso del *no socio*, la relación entre las variables cumple:
 - Si los valores de una de las variables aumentan (o disminuyen), los valores de la otra también aumentan (o disminuyen).
 - A variaciones iguales en una de las variables se producen variaciones en la otra que también son iguales.
 - Si los valores de una de las variables se duplican, triplican, etc., los valores correspondientes de la otra variable también se duplican, triplican, etc.
 - El valor correspondiente a la suma de dos valores de una de las variables ($a + b$), es igual a la suma de los valores correspondientes a cada uno de estos valores (a y b).
 - El gráfico que representa la relación entre la *cantidad de veces que una persona va al cine en el año* y el *costo total en pesos en el año*, es una **línea recta** que, además, **pasa por el origen**. Esto es importante de destacar, porque es una de las características inherentes que la distinguen de otras relaciones, en particular de una relación cuyo gráfico también es una línea recta que **no pasa** por el origen y que por ello **no es** de proporcionalidad directa (como el caso del gráfico para un socio).

Por tener estas características, la relación es de **proporcionalidad directa**.

- ▶ En el caso del *socio*, la relación entre las variables cumple todas las características de una relación de proporcionalidad directa, menos tres que son:

- Al duplicar, triplicar, etc., la cantidad de veces que se va al cine en el año, el costo total en pesos en el año **no** se duplica, triplica, etc.
- El valor correspondiente a la suma de dos valores de una de las variables ($a + b$), **no** es igual a la suma de los valores correspondientes a cada uno de estos valores (a y b).
- El gráfico de la relación, si bien es una línea recta, **no pasa por el origen**.

Por esta razón la relación entre las variables **no es de proporcionalidad directa**.

- ▶ Se puede ver que, tanto en el caso del no socio como en el caso del socio, *a variaciones iguales en una de las variables se producen variaciones en la otra que también son iguales*. Asimismo, se verifica que *si una de las variables aumenta la otra también aumenta*. De esto podemos deducir que estas son condiciones necesarias para identificar una relación de proporcionalidad directa, pero no son condiciones suficientes: en el caso del socio, se cumplen estas dos condiciones y, sin embargo, **no** es una relación de proporcionalidad directa.

Los alumnos y alumnas, apoyados por la profesora o profesor, realizan un análisis que les permita seguir **completando** la caracterización de la proporcionalidad directa. A las características establecidas hasta el momento, se les añade una condición: el gráfico no solo es una línea recta, sino que además **pasa por el origen del sistema de coordenadas**. De esta forma, la caracterización de la relación de proporcionalidad directa hasta el momento, queda enunciada como sigue:

Cuando la relación entre dos variables es de *proporcionalidad directa*, se verifican las siguientes propiedades:

- Si los valores de una de las variables aumentan (o disminuyen), los valores de la otra también aumentan (o disminuyen).
- A variaciones iguales en una de las variables se producen variaciones en la otra que también son iguales.
- El valor correspondiente a la suma de dos valores de una de las variables ($a + b$), es igual a la suma de los valores correspondientes a cada uno de estos valores (a y b)
- Si los valores de una de las variables se duplican, triplican, etc., los valores correspondientes de la otra variable también se duplican, triplican, etc.
- El gráfico que representa la relación es una línea recta que pasa por el origen del sistema de coordenadas.

Las dos primeras propiedades son necesarias para determinar que la relación sea de proporcionalidad directa, pero no suficientes. En cambio, las tres últimas sí lo son.

Al terminar este primer apartado de la **Etapla I** del estudio, se propone que los estudiantes trabajen en la **Ficha 4** en que aparecen problemas que ponen en juego los conocimientos que han trabajado hasta el momento. Se trata de que tengan la oportunidad de lograr un dominio robusto de los procedimientos, los relacionen entre ellos y los justifiquen.

I.2. Comparación de dos relaciones de proporcionalidad directa con las mismas variables (envases rectos de distintos tipos)

La situación inicial de esta etapa consiste en una actividad *experimental*, similar a la vivida al inicio de la **Etapa I** realizada con dos vasos de distinta forma. Esta vez ambos vasos son **rectos**, es decir, tienen la misma forma (diámetro constante), pero uno es más estrecho que el otro, es decir, sus diámetros son distintos. Con esta experiencia se pretende que alumnas y alumnos comprendan que, dependiendo de las condiciones, *dos relaciones de proporcionalidad directa pueden ser distintas entre sí*. Interesa especialmente que identifiquen cuál de sus características esenciales las hace diferentes.

Esta actividad permitirá, además, que completen la caracterización de la proporcionalidad directa, al reconocer e incorporar una propiedad esencial que hasta este momento del estudio no ha sido tratada explícitamente. Es la propiedad que se relaciona con la noción de constante de proporcionalidad.

La actividad que se propone es la siguiente:

Actividad 4:

Los alumnos realizan la **Ficha 5**.

El profesor(a) propone al curso un problema para que sea resuelto grupalmente (grupos de 5 integrantes). Para ello, cada grupo dispondrá de **2 vasos rectos** (ambos con *diámetros constantes*), un vaso más estrecho que el otro (*diámetros distintos entre sí*), un jarro con agua con colorante (jugo en polvo), una regla graduada (en *cm* y *mm*) y una tapita de bebida o un vasito graduado (como los que vienen en los medicamentos).

La tarea matemática asociada a la actividad consiste en *predecir cómo varía la altura de líquido en cada vaso, a medida que se van agregando (una a una) las tapitas (o vasitos graduados) con agua, para posteriormente comprobarlo experimentalmente*.

Dado que todos los vasos tienden a ser curvos o deformes en el fondo, previo a comenzar la actividad, es de suma importancia establecer el nivel cero desde el cual se medirá la altura de líquido en el vaso. Para ello, se deberá agregar a los vasos una cantidad de líquido tal que sobrepase las deformidades del fondo y que, además, **coincida con el 0 de la regla**, marcando mediante un plumón de pizarra (idealmente de punta fina) la altura que señala el **nivel cero**. Por lo general, el 0 de la regla no está ubicado al inicio de la misma. Por ello habrá que llenar el envase hasta que el nivel de líquido lo alcance.



Los vasos utilizados pueden ser distintos a los de la foto, siempre y cuando cumplan con la condición de ser ambos rectos y de distinto diámetro. El vaso A tiene mayor diámetro que el vaso B.

A continuación se pide a los alumnos que agreguen a ambos vasos una o varias tapitas de agua (un número determinado de veces, suficiente para que la diferencia de niveles sea fácilmente apreciable, alrededor de 1cm). Luego de haber agregado dicha cantidad de agua, se les pregunta: ¿Qué ocurrió al agregar este número de tapitas de agua en cada uno de los vasos? ¿En *cuánto* varió la altura del agua en el vaso A? ¿Y en el vaso B? Una vez que hayan medido y dado respuesta, se les pregunta: ¿Qué pasará si agregamos otra cantidad igual de líquido al vaso A? ¿Y al B? ¿Con cuántas tapitas creen que se llenará cada uno de los vasos? Luego se les invita a realizar el experimento y comprobar sus predicciones, anotando en dos tablas de datos los valores que vayan obteniendo para cada vaso.

Una vez realizado el experimento, se invita a alumnas y alumnos a responder: ¿Por qué la altura del agua varía lo mismo en el vaso A cada vez que se agrega una misma cantidad de agua? ¿Sucede lo mismo en el vaso B? ¿De qué depende la altura del agua en cada vaso? ¿Cuál vaso se llena más rápido? **¿Por qué razones, si ambos vasos son rectos, uno se llena más rápido que el otro?** Finalmente, se invita a los estudiantes a representar ambas situaciones en un mismo gráfico para que puedan identificar que, siendo ambas relaciones de proporcionalidad directa y que por ello el gráfico de cada situación es una línea recta que pasa por el origen del sistema de coordenadas, las líneas rectas graficadas tienen *distinta inclinación*.

La actividad finaliza pidiendo a los alumnos que determinen cuánto aumenta la altura del líquido en el vaso A cuando se agrega **una** tapita de agua, y cuánto aumenta la altura del líquido en el vaso B al agregar **una** tapita de agua.

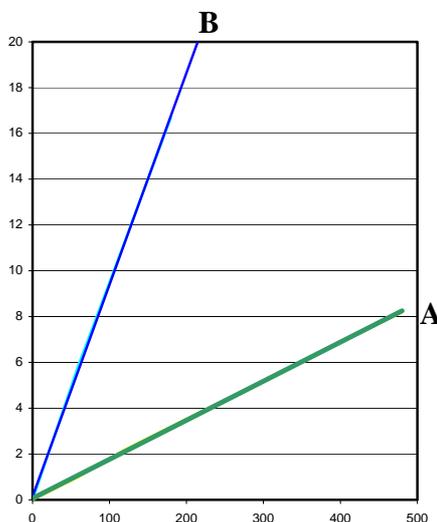
Una vez realizado el experimento, se les invita a analizar los gráficos que obtuvieron formulándoles preguntas como: ¿A qué se puede atribuir que la recta asociada al vaso B tenga mayor inclinación que la del vaso A?

En el desarrollo de esta experiencia surge un aspecto esencial de la proporcionalidad directa que no ha sido tratado explícitamente en las actividades de los apartados anteriores. Hasta el momento se ha caracterizado la proporcionalidad directa a través de comparaciones entre variaciones **al interior de cada una de las variables** de la situación. Las variaciones “internas” de una variable se pueden estudiar mediante comparaciones de tipo multiplicativo, que en algunos textos se denominan *razones internas*. Así por ejemplo, la condición: “si al duplicar, triplicar, etc., los valores de una variable, se duplican, triplican,

etc., los valores de la otra variable, entonces la relación es de proporcionalidad directa”, se puede establecer comparando variaciones internas de cada una de las variables de la situación.

En la experiencia con ambos vasos rectos aparece otra característica esencial de la proporcionalidad directa que se establece mediante comparaciones **entre pares de valores de ambas variables**. Haciendo un paralelo con las razones internas, los cuocientes entre valores de ambas variables se pueden llamar *razones externas*. La condición establece que: *si los cuocientes entre pares de valores correspondientes a ambas variables corresponden a un único valor, entonces la relación entre ambas variables es de proporcionalidad directa*. Este valor único recibe el nombre de **constante de proporcionalidad**, que podemos designar por una letra k , y que corresponde a la **variación que experimenta la variable dependiente en una unidad de cambio de la variable independiente**. De aquí que la constante de proporcionalidad se obtenga realizando la división entre valores de la variable dependiente por valores de la variable independiente.

En el caso de esta experiencia, en ambos vasos (A y B), la relación entre *la cantidad de líquido que se agrega al vaso* y *la altura del líquido en el vaso* es de proporcionalidad directa. Al graficar ambas relaciones se obtienen dos rectas que pasan por el origen del sistema de coordenadas, tales como las que aparecen en el gráfico de más abajo. Dado que la constante de proporcionalidad indica la tasa de variación de la relación, es decir, el incremento que alcanza la altura del líquido en el vaso por una tapita de líquido, la constante de proporcionalidad en el gráfico determina la inclinación de la recta sobre el eje de las abscisas. En el caso de esta experiencia, y dado que el vaso B es más estrecho que el vaso A (diámetro de B es menor que el de A), **el vaso B se llena más rápido que el vaso A**. Es decir, la constante de proporcionalidad de la relación asociada al vaso B es mayor que la constante de proporcionalidad de la relación asociada al vaso A. Por esa razón, la recta asociada al vaso B tiene una inclinación mayor que la asociada al vaso A.



Luego de que los estudiantes terminan la actividad de los vasos así como su revisión y discusión, el profesor(a) retoma el **problema 1 de la Ficha 2** sobre la llave que gotea, recuerda el trabajo realizado con las respuestas de los alumnos y plantea que calculen la constante de proporcionalidad de la relación entre *la cantidad de líquido que pierde la llave* y *el tiempo que transcurre*, y analicen el significado de dicha constante en el contexto del problema. El objetivo que persigue este trabajo es que puedan profundizar en la comprensión y utilización del concepto de constante de proporcionalidad. También, es una buena

instancia para que el docente pueda evaluar el grado de conocimiento de dicho concepto que han logrado después de realizar la actividad de los vasos.

A continuación, el profesor o profesora puede invitar a niñas y niños a calcular la cantidad de litros de agua que se pierden para otros valores de tiempo, por ejemplo en 25 minutos, utilizando la *constante de proporcionalidad*. Para ello, como en este caso la constante de proporcionalidad es $0,25l / 5min = 0,05l/min$, y sabemos que el cociente entre valores de la variable dependiente y valores de la variable independiente es siempre este valor, entonces para calcular la cantidad de litros que se pierden en 50 minutos, debemos encontrar un número (x) que al dividirlo por 50 dé como resultado 0,05, es decir, $x/50 = 0,05$. De aquí que, de acuerdo a lo que los alumnos ya saben, x se puede obtener realizando el producto $0,05l/min \bullet 50min = 2,5l$.

Es importante señalar que para calcular la constante de proporcionalidad de la relación entre dos variables, los estudiantes podrían efectuar la división opuesta, es decir, valores de la variable independiente divididos por valores de la variable dependiente. Si este fuera el caso, habría que hacer reflexionar a los estudiantes sobre cuál es la variable dependiente y cuál es la independiente en esta situación.

Se espera que, con el estudio realizado en estas dos etapas, niñas y niños, apoyados por cada docente, puedan completar y formalizar la caracterización de la proporcionalidad directa:

- Cuando la relación entre dos variables es de *proporcionalidad directa*, se verifican las siguientes propiedades:
 - Si los valores de una de las variables aumentan (o disminuyen), los valores de la otra también aumentan (o disminuyen).
 - A variaciones iguales en una de las variables se producen variaciones en la otra que también son iguales.
 - Si los valores de una de las variables se duplican, triplican, etc., los valores correspondientes de la otra variable también se duplican, triplican, etc.
 - El valor correspondiente a la suma de dos valores de una de las variables ($a + b$), es igual a la suma de los valores correspondientes a cada uno de estos valores (a y b).
 - **El cociente entre valores correspondientes de ambas variables es un valor único.**
 - El gráfico que representa la relación es una línea recta que pasa por el origen del sistema de coordenadas. **La inclinación de esta recta está determinada por el valor del cociente entre valores correspondientes.**

Las dos primeras propiedades son necesarias para determinar que la relación sea de proporcionalidad directa, pero no suficientes. En cambio, las cuatro últimas sí lo son.

- La constante de proporcionalidad se obtiene realizando la división entre valores de la variable dependiente por valores correspondientes de la variable independiente.

Al terminar este segundo apartado de la **Etapla I** del estudio, se propone que los estudiantes trabajen en la **Ficha 6** que plantea problemas similares a los estudiados hasta el momento y que permitirán que alcancen

un dominio más profundo de los procedimientos, y puedan explicarlos y relacionarlos con otros procedimientos de manera fundamentada.

I.3. Representación gráfica de la relación de proporcionalidad directa y su *dependencia de la escala elegida*.

El estudio de la proporcionalidad directa se complementa con el estudio del problema de la graduación de los ejes para realizar la representación gráfica de una relación entre dos variables. Interesa que alumnas y alumnos comprendan que la escala que se utilice para graduar los ejes debe cumplir ciertas condiciones. De lo contrario, el gráfico puede mostrar una representación que no dé cuenta correctamente del comportamiento del fenómeno y nos conduzca a extraer conclusiones erróneas.

Para estudiar este problema se presenta la siguiente actividad:

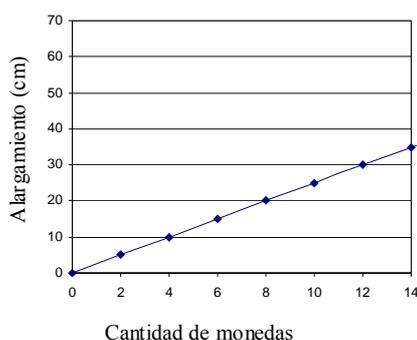
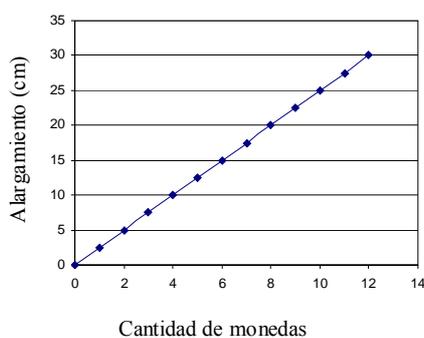
Actividad 5

Los alumnos y alumnas realizan la **Ficha 7** en parejas.

El profesor(a) parte comentando que para responder al problema de la Ficha, primero deben leer una situación de clase y luego contestar a las preguntas que se hacen sobre lo sucedido en esa clase.

En una clase de Comprensión del medio natural del 7° Básico de la escuela *Los Manzanos*, están realizando el siguiente experimento en grupos de 5 integrantes. Cada grupo dispone de un resorte del que cuelga un vaso plástico, una regla y monedas de \$10. El experimento consiste en determinar cómo se va alargando el resorte al ir agregando monedas de \$10 en el vaso. Para ello, los estudiantes realizan el experimento con una cantidad suficiente de monedas como para poder establecer alguna conclusión. Van registrando sus resultados en una tabla y luego los grafican.

El experimento concluye con la presentación de los gráficos obtenidos por tres grupos del curso. Los gráficos fueron los siguientes:



Luego de concluir la lectura de la situación de clase descrita, el profesor(a) pregunta: ¿Son iguales los resortes de estos tres grupos o son distintos? ¿Por qué? Los estudiantes discuten con su grupo y escriben sus conclusiones.

Posteriormente, el profesor(a) pide que construyan la tabla de valores correspondientes a cada gráfico del experimento y les pregunta: ¿Qué ha pasado? ¿Por qué razones una misma tabla de valores puede dar origen a distintos gráficos? ¿Estos tres grupos tienen o no resortes iguales?

Es muy probable que contesten que los grupos tenían *distintos resortes* para realizar el experimento, puesto que sus gráficos son distintos y las monedas de \$10 son siempre iguales. Al construir las tablas de valores correspondientes, los estudiantes se percatarán que los tres gráficos están asociados a una misma tabla. Esto ha sucedido porque en los gráficos se han considerado **distintas escalas para graduar los ejes**.

El profesor(a) conduce una discusión entre los estudiantes contrastando los resultados que obtuvieron y las explicaciones que dieron en cada caso. Se espera que de esta discusión se concluya que:

- Para graduar los ejes de un gráfico que representa la relación entre dos variables, se debe escoger una escala adecuada para cada eje, que permita ubicar los valores de las variables con tanta precisión como se requiera.
- Las escalas escogidas para cada uno de los ejes no tienen por qué ser iguales; va a depender de la naturaleza de la variable que se represente y de los datos que se tengan de la misma.
- Una vez escogida la escala para cada eje, se debe construir la graduación siguiendo exactamente este patrón.
- Tal como constatamos en la actividad anterior, no nos podemos fiar exclusivamente de la inclinación visual de la recta para sacar conclusiones; además, debemos chequear la relación cuantitativa entre ambas variables. Esto es, determinar qué valores le corresponden a la variable dependiente cuando la variable independiente toma valores determinados.

ETAPA II: *Estudiando la proporcionalidad inversa*

En esta segunda etapa se avanza en el estudio de la relación de **proporcionalidad inversa** entre dos variables iniciado en 7° básico. Se parte con el problema de **cómo** identificar una relación de proporcionalidad inversa entre dos variables *deductivamente*, a partir de cierta información dada. Esta deducción se puede realizar a partir de la *definición* de la relación, ya sea porque es una ley natural o porque es un conocimiento culturalmente aceptado, a partir de los valores de una tabla, o a partir de un gráfico. Además, alumnas y alumnos aprenderán a calcular valores de una variable conociendo el valor correspondiente de la otra variable y concluirán el estudio con una caracterización completa de este tipo de relación.

Tal como realizamos el estudio de la proporcionalidad directa, estudiaremos la proporcionalidad inversa en contraste a otras relaciones que no lo son.

Actividad 6

Alumnas y alumnos realizan la **Ficha 8** en parejas.

Problema 1:

Un curso de un total de 35 alumnos quiere ir a la costa para su paseo de fin de año. Ellos preguntan a una empresa de buses en la que les responden que el precio ida y vuelta por persona es de \$1.800. De acuerdo con esta información, responde:

- a) ¿Cuánto dinero deberán reunir para el paseo si en total asisten 15 alumnos?
- b) ¿Y si asisten 27 alumnos?
- c) ¿Y si asisten 20?
- d) ¿Y si va todo el curso?
- e) Organiza estos datos en una tabla de valores.
- f) ¿Cuáles son las variables de la situación?
- g) La relación entre estas variables, ¿es o no de proporcionalidad directa?, ¿por qué?
- h) ¿Cómo esperarías que fuera el gráfico de esta relación? Grafícala para comprobar tu hipótesis.

Problema 2:

Un apoderado del curso que quiere ir a la costa averiguó que el arriendo de un bus tiene un valor de \$50.000, cualquiera que sea la cantidad de alumnos que vayan. Si en el curso decidieran arrendar un bus:

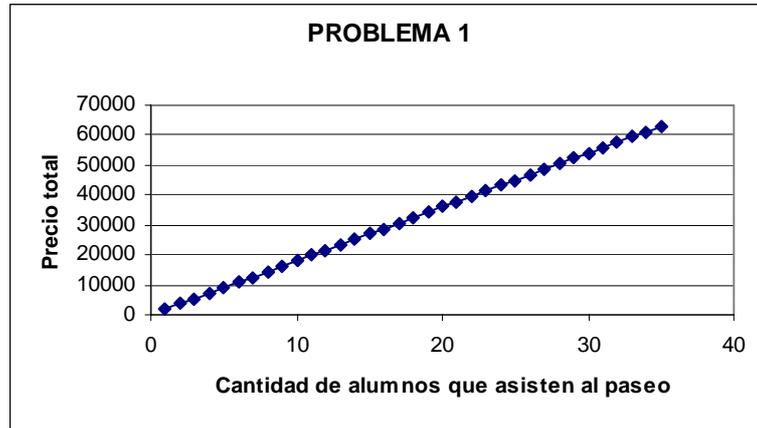
- a) ¿Cuánto dinero deberá pagar cada alumno si en total asisten 15 alumnos?
- b) ¿Y si asisten 30 alumnos?
- c) ¿Y si asisten 27?
- d) ¿Y si asisten 20? ¿Y si van 10?
- e) ¿Y si va todo el curso?
- f) Organiza estos datos en una tabla de valores.
- g) ¿Cuáles son las variables de la situación?
- h) La relación entre estas variables, ¿es o no de proporcionalidad directa?, ¿por qué?
- i) Representa gráficamente los datos de la tabla, escribiendo en cada eje la variable que se está representando.
- j) ¿Qué características presenta el gráfico?
- k) ¿Cuántos alumnos, como mínimo, tendrían que asistir al paseo para que convenga esta alternativa?

Una vez que han resuelto la Ficha, el profesor o profesora conduce una discusión sobre las respuestas que obtuvieron a cada pregunta y los procedimientos que utilizaron. Luego, plantea preguntas del siguiente tipo:

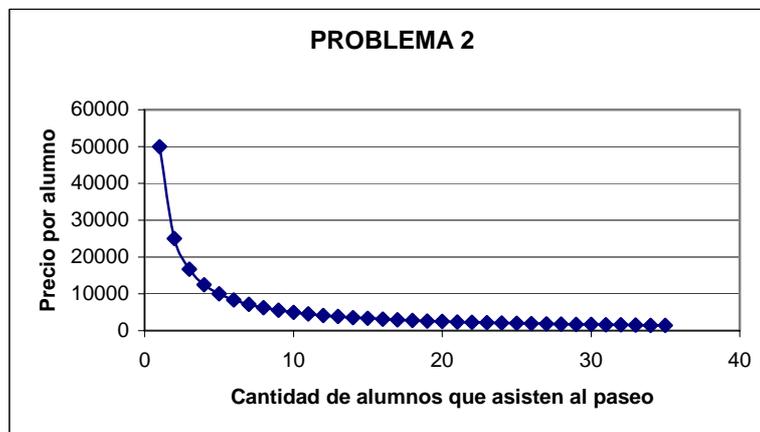
- ¿Cuáles son las variables relacionadas en la primera situación? ¿Y en la segunda? ¿Son las mismas?
- ¿Las características de una relación de proporcionalidad directa se cumplieron para alguna de las dos situaciones planteadas?
- ¿Cuál es la constante de proporcionalidad en esa situación? ¿Qué significado tiene esta constante en el contexto del problema?
- ¿Qué ocurre con el dinero que paga cada estudiante, **en el caso del bus arrendado**, cuando aumenta la cantidad de estudiantes que van al paseo?
- ¿Qué ocurre con el dinero que paga cada estudiante, **en el caso del bus arrendado**, si se duplica el número de niños que van al paseo? ¿Y si se cuadruplica?
- ¿En qué se diferencian los gráficos correspondientes a cada una de las dos situaciones planteadas?

Esta actividad plantea el análisis de dos situaciones que aparentemente son muy similares, pero que nos llevan a la obtención de dos relaciones de distinto tipo, una de **proporcionalidad directa** y la otra de **proporcionalidad inversa**.

En efecto, en el caso del **problema 1**, las variables de la situación son *cantidad de alumnos que asisten al paseo* y *precio total a pagar*. La pregunta del problema consiste en determinar cuánto es el precio total a pagar para cantidades determinadas de alumnos que asisten al paseo. La relación que existe entre estas dos variables cumple las propiedades esenciales de una **proporcionalidad directa**. El gráfico es como el siguiente:



Por otro lado, en el **problema 2**, las variables son *cantidad de alumnos(as) que asisten al paseo* y *costo por alumno*, y se pregunta cuánto debe pagar cada alumno para cantidades determinadas de alumnos que asisten al paseo. La relación que existe entre estas dos variables *no cumple* las propiedades esenciales de una proporcionalidad directa. Sin embargo, esta relación cumple otras características que hacen interesante su estudio; en particular, su gráfico es como el siguiente:



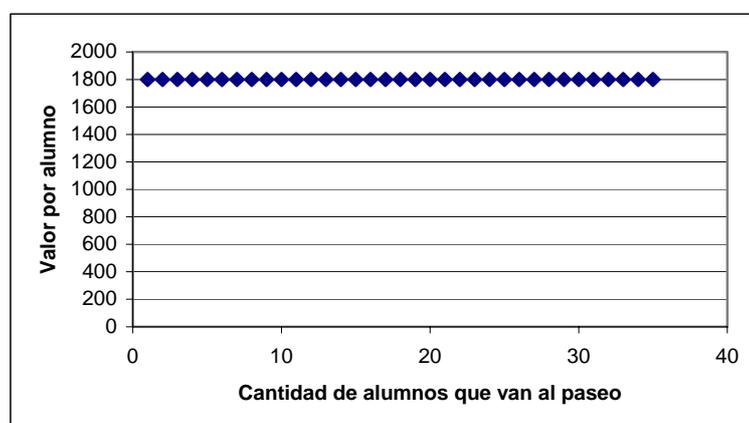
Con el estudio de estos dos problemas se espera que los estudiantes puedan dar respuestas similares a las que aparecen a continuación, y así ir caracterizando la relación de **proporcionalidad inversa** entre dos variables:

► En la primera situación, dado que la **cuota que paga cada estudiante es constante**, la relación entre el número de alumnos que asiste al paseo y el precio total a pagar **es de proporcionalidad directa**.

- ▶ En la segunda situación, dado que el **precio a pagar por el bus es constante**, la relación entre las variables cumple:
 - Al **aumentar** la cantidad de alumnos que asiste al paseo, la cuota que paga cada estudiante **disminuye**.
 - Al **duplicar, triplicar**, etc., la cantidad de alumnos que asisten al paseo, la cuota que paga cada estudiante se reduce a la **mitad**, a un **tercio**, etc.
 - El gráfico que representa la relación entre el número de alumnos que asisten al paseo y la cuota que paga cada alumno, es una **curva que se acerca progresivamente a ambos ejes**.

Una relación que tiene estas características recibe el nombre de **proporcionalidad inversa**.

Si en el contexto del **problema 1** se realizara la misma pregunta que para el **problema 2** (*¿cuánto debe pagar cada alumno para cantidades determinadas de alumnos que asisten al paseo?*), entonces el problema cambiaría totalmente. En ese caso, las variables involucradas en esta **nueva pregunta** serían las mismas que las variables involucradas en el **problema 2** (*cantidad de alumnos que asisten al paseo y costo por alumno*). Dado que en el contexto del **problema 1** el valor a pagar por cada alumno es **constante** (\$1.800), independientemente de la cantidad de alumnos que asistan al paseo, entonces el gráfico de esta nueva relación es una línea recta paralela al eje horizontal que intercepta el eje vertical en el valor \$1.800.



Este tipo de análisis es importante para responder a la pregunta **k** del **problema 2** relativa a *¿cuántos alumnos, como mínimo, tendrían que asistir al paseo para que convenga esta alternativa?* Es claro que una alternativa es más conveniente que la otra cuando el precio que cancela cada alumno es menor o bien, cuando el precio total a cancelar es menor.

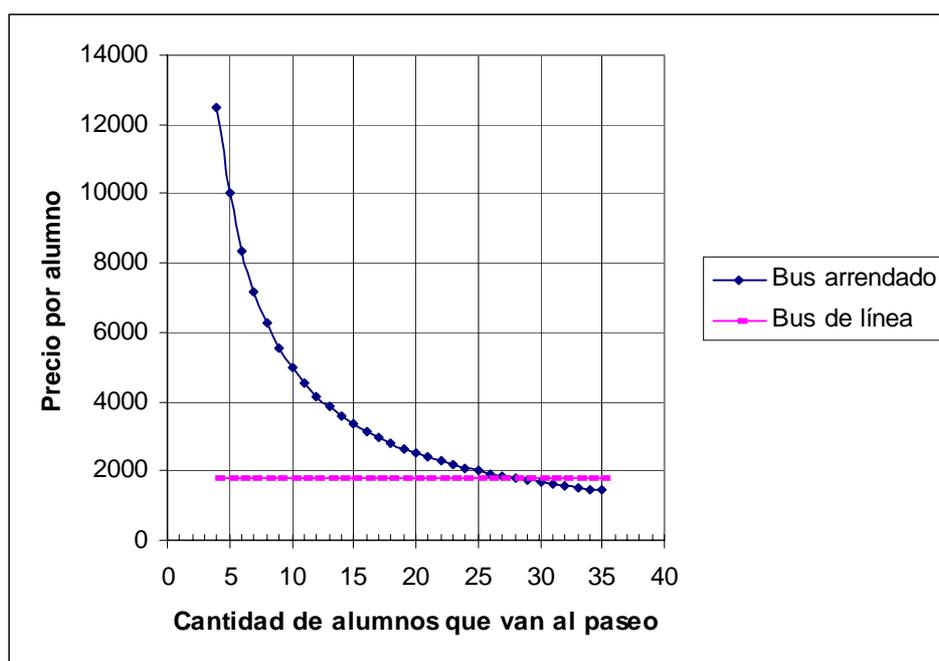
Para responder a esta pregunta los estudiantes pueden utilizar un razonamiento por aproximaciones sucesivas, tal como el siguiente:

- Si van 20 alumnos al paseo, con la **alternativa 1** en total pagan \$36.000 que es una cantidad *menor* que \$50.000. Por ello en este caso **no** conviene la **alternativa 2**.
- Si van 25 alumnos al paseo, con la **alternativa 1** en total pagan \$45.000 que sigue siendo una cantidad *menor* que \$50.000. Por ello, en este caso **no** conviene la **alternativa 2**.
- Si van 30 alumnos al paseo, con la **alternativa 1** en total pagan \$54.000 que es una cantidad *mayor* que \$50.000. Por ello, en este caso **sí** conviene la **alternativa 2**.

Hasta aquí sabemos que si van 25 alumnos conviene la **alternativa 1**, en cambio si van 30 alumnos conviene la **alternativa 2**. Debemos entonces asegurarnos de lo que sucede entre estos dos valores:

- Si van 27 alumnos al paseo, con la **alternativa 1** en total pagan \$48.600 que es una cantidad *menor* que \$50.000. Por ello en este caso **no** conviene la **alternativa 2**.
- Si van 28 alumnos al paseo, con la **alternativa 1** en total pagan \$50.400 que es una cantidad *mayor* que \$50.000. Por ello en este caso **sí** conviene la **alternativa 2**.

Así vemos que, a partir de 28 alumnos, conviene la **alternativa 2**. A continuación se presenta un gráfico que permite visualizar esta situación. En ella se muestra la intersección entre el gráfico correspondiente al **problema 2** y el gráfico que muestra el precio por alumno para el bus de línea, es decir, cuando pagan \$1.800 cada uno. Como vemos, la intersección entre ambos gráficos ocurre aproximadamente pasados los 27 alumnos, que es el mismo resultado que el obtenido por medio del análisis por aproximaciones.



Otra forma de resolver este problema consiste en calcular la cantidad de alumnos que deberían ir al paseo para que, pagando \$1.800 cada uno, el precio total a pagar sea de \$50.000. Para dar respuesta a esta pregunta se realiza la división $50.000/1.800 = 27,7$. De aquí que, si asisten 27 o menos alumnos al paseo, *el total a pagar es menos de \$50.000* por lo que conviene la **alternativa 1**. En cambio, si asisten al paseo 28 alumnos o más, *el total a pagar es más de \$50.000* por lo que conviene la **alternativa 2**.

Una vez desarrollada y discutida colectivamente esta ficha, desarrollan la siguiente actividad:

Actividad 7

Alumnas y alumnos realizan la **Ficha 9** en parejas.

Problema 1

Una embotelladora de bebidas dispone de botellas con las siguientes capacidades: $0,25l$, $0,5l$, $0,75l$, $1l$, $1,25l$, $1,5l$, $2l$, $2,5l$ y $3l$. En la embotelladora necesitan embotellar 60 litros de bebida, y quieren repartirlos en botellas de un solo tipo.

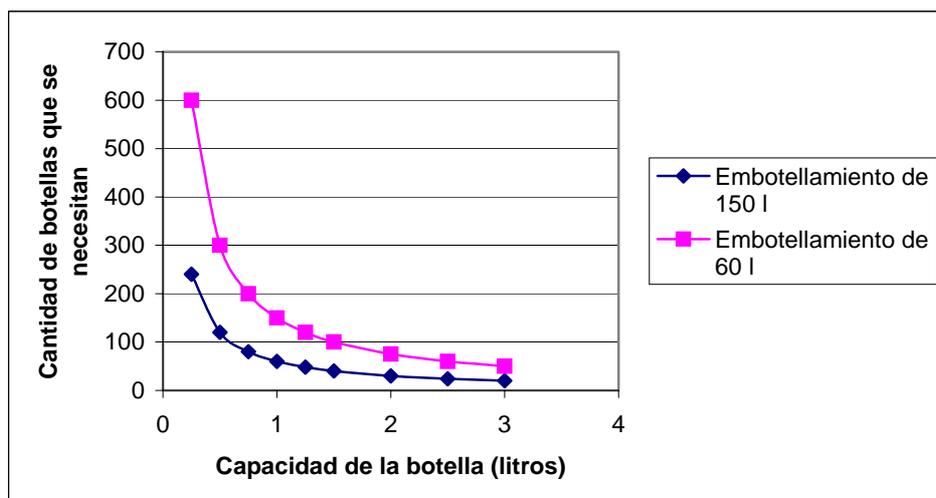
- ¿Cuántas botellas de $0,25 l$ se necesitan para embotellar los 60 litros?
- ¿Y cuántas de $1,25 l$?
- ¿Y cuántas botellas con el doble de capacidad de la anterior?
- ¿Cuáles son las variables de esta situación?
- Organiza estos datos en una tabla de valores, considerando en ella todos los tipos de botella de que dispone la embotelladora.
- A mayor capacidad de la botella, ¿se utilizarán más o menos botellas?
- ¿Cómo será el gráfico asociado a esta relación?
- Realiza el gráfico escribiendo en cada eje la variable que se está representando y comprueba tu hipótesis.
- Si se requiere que sean menos de 45 botellas, ¿qué tipo de botella se debe utilizar?

Problema 2

En esta misma embotelladora necesitan ahora embotellar 150 litros. Al igual que en el caso anterior, necesitan embotellarlos en un solo tipo de botella, de los que dispone.

- ¿Cuántas botellas de $1 l$ se necesitan para embotellar los 150 litros?
- ¿Y cuántas botellas con el triple de capacidad de la anterior?
- Organiza estos datos en una tabla de valores, considerando en ella todos los tipos de botella de que dispone la embotelladora.
- A mayor capacidad de la botella, ¿se utilizarán más o menos botellas?
- ¿Cómo será el gráfico asociado a esta relación?
- Realiza el gráfico en el mismo sistema de coordenadas utilizado en el **problema 1**.
- ¿Qué diferencia hay entre ambos gráficos? ¿A qué se pueden atribuir estas diferencias?

Uno de los propósitos que se persigue con esta actividad es introducir otra característica esencial de la proporcionalidad inversa. Se trata de que en este tipo de relación, al igual que en la proporcionalidad directa, también hay una **constante de proporcionalidad**. En la proporcionalidad inversa, la constante es el **producto de los valores correspondientes de ambas variables**. En este sentido, la pregunta **p** del **problema 2** es clave, ya que una vez realizados los gráficos de ambos problemas, se puede ver que hay una diferencia entre ambos gráficos (una curva está más abierta que la otra y desplazada), debida justamente a la *diferencia entre las constantes de proporcionalidad*, tal como muestra el siguiente gráfico:



En estricto rigor, no tiene sentido unir los puntos del gráfico en ambos problemas, ya que la embotelladora no tiene otros tipos de botellas con otras capacidades. La razón por la que hemos unido dichos puntos, al igual que en varios problemas anteriores, es para observar el comportamiento global de la relación entre las variables de la situación.

En el caso de los problemas de esta actividad, la constante de proporcionalidad es *60 litros* para el **problema 1**, y *150 litros* para el **problema 2**. En ambos problemas la constante de proporcionalidad corresponde a la cantidad de litros que se pretende embotellar. Por ello, una curva es más abierta y está desplazada. A continuación se muestran las tablas correspondientes a cada problema:

Para envasado de 60 litros	
Capacidad de la botella (litros)	Cantidad de botellas
0,25	240
0,5	120
0,75	80
1	60
1,25	48
1,5	40
2	30
2,5	24
3	20

Para envasado de 150 litros	
Capacidad de la botella (litros)	Cantidad de botellas
0,25	600
0,5	300
0,75	200
1	150
1,25	120
1,5	100
2	75
2,5	60
3	50

Apoyándose en los datos de las tablas de valores, el profesor puede invitar a los estudiantes a calcular los productos entre valores correspondientes de ambas variables en cada caso, y comprobar que estos productos son constantes para cada problema.

Para contestar a la pregunta **i** del **problema 1** relativa a qué tipo de botella se debe utilizar para embotellar los 60 litros si se requiere que sean menos de 45 botellas, los estudiantes pueden utilizar, apoyándose en la tabla de valores, un razonamiento por aproximaciones sucesivas como el siguiente:

- Si se usan botellas de 1 litro, se necesitan 60 botellas. Luego, requerimos botellas de mayor capacidad para disminuir la cantidad de botellas.
- Si se usan botellas de 1,25 litros, se necesitan 48 botellas. Como deben ser menos de 45 botellas, requerimos botellas de mayor capacidad aún para disminuir la cantidad de botellas.
- Si se usan botellas de 1,5 litros, se necesitan 40 botellas. Luego, cualquier otro tipo de botella de capacidad mayor o igual a 1,5 litros requerirá de menos de 45 botellas. Por ejemplo, para botellas de 2,5 litros requerimos de 24 botellas, etc.

Una vez que han resuelto la Ficha, el profesor(a) conduce una discusión sobre las respuestas que obtuvieron a cada pregunta y los procedimientos que utilizaron. Luego, plantea preguntas del siguiente tipo:

- Si aumenta la capacidad de las botellas, ¿qué ocurre con la cantidad de botellas que se utilizan?
- Si una botella tiene el doble de capacidad que otra, ¿alcanza la mitad de botellas para embotellar la misma cantidad de bebida? Y si tuviera el triple de capacidad, ¿alcanzaría un tercio de las botellas?
- Entonces, si los valores de una de las variables se duplican, triplican, etc., ¿los valores correspondientes de la otra variable se reducen a la mitad, un tercio, etc.?
- ¿Cómo es el gráfico en cada caso?
- ¿En qué casos se cumplieron las características de una relación de proporcionalidad inversa?
- ¿Qué diferencia hay entre ambos gráficos? ¿A qué se pueden atribuir esas diferencias?

Se espera que, con el estudio realizado en estas dos clases, los alumnos, apoyados por el docente, puedan progresar en la caracterización de la **proporcionalidad inversa**:

En ambas situaciones, dado que la cantidad de litros a embotellar es constante, la relación entre las variables cumple:

- Al **aumentar** la capacidad de las botellas, la cantidad de botellas requeridas **disminuye**.
- Al duplicar, triplicar, etc., la capacidad de las botellas, la cantidad de botellas requeridas se reduce a la mitad, a un tercio, etc.
- El gráfico que representa la relación entre la capacidad de las botellas y la cantidad de botellas requeridas, es una **curva que se acerca progresivamente a ambos ejes**.
- **El producto entre valores correspondientes de ambas variables es un valor único.**

Por estas razones estas relaciones son de **proporcionalidad inversa**.

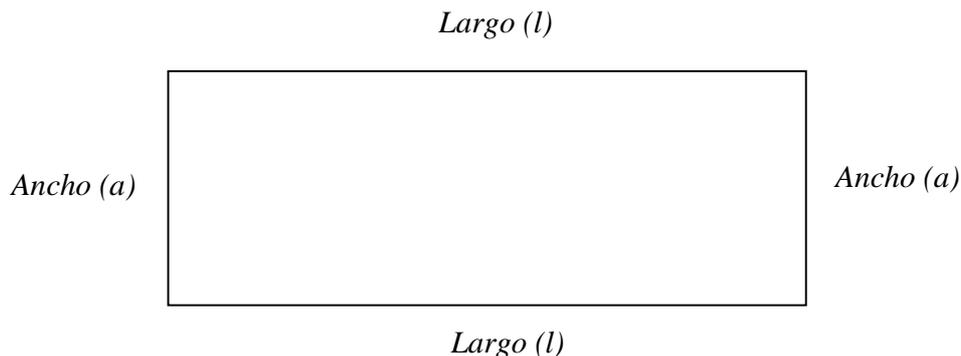
El estudio continúa profundizando en la caracterización de la relación de proporcionalidad inversa, abordando ahora el hecho de que la primera propiedad (*al aumentar la capacidad de las botellas, la cantidad de botellas requeridas disminuye*) es **necesaria** para afirmar que una relación es de proporcionalidad inversa, **pero no es suficiente**.

Actividad 8:

Alumnas y alumnos realizan la **Ficha 10** en parejas.

Problema:

Don Armando ha heredado una parcela de su abuela. Quiere construir un corral de forma rectangular para sus ovejas. Él dispone de material suficiente para construir 240 metros de cerco y quiere utilizarlo todo, sin que le falte ni sobre material. ¿Qué dimensiones puede tener el corral?



$$2 \cdot a + 2 \cdot l = \text{perímetro rectángulo}$$

Don Armando ha realizado ya algunos cálculos de posibles valores para el largo y ancho del corral, que ha anotado en la siguiente tabla de valores.

largo (m)	ancho (m)
110	10
105	15
	20
93	27
	30
85	35
80	40
	42
70	50
	58
60	60

Ayuda a don Armando a completar la tabla y luego responde las siguientes preguntas:

- Si disminuye la medida del largo del corral, ¿aumenta o disminuye la medida del ancho del corral?
- ¿Cómo será el gráfico asociado a esta relación? Realiza el gráfico.

Una vez que han resuelto la Ficha, el profesor(a) conduce una discusión sobre las respuestas que obtuvieron a cada pregunta y los procedimientos que utilizaron. Luego, plantea preguntas del siguiente tipo:

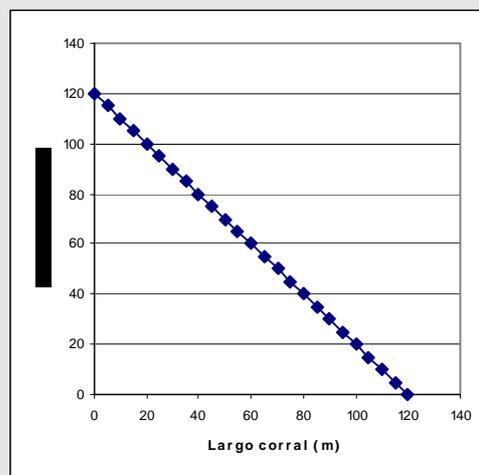
- Si aumenta la medida del largo del corral, ¿qué ocurre con la medida del ancho del corral?
- Si se duplica la medida del largo del corral, ¿disminuye la medida del ancho del corral a la mitad? Y si se triplica la medida del largo, ¿disminuye a un tercio la medida del ancho del corral?
- Entonces, ¿si los valores de una de las variables se duplican, triplican, etc., los valores correspondientes de la otra variable se reducen a la mitad, un tercio, etc.?
- ¿Cómo es el gráfico de esta relación?
- ¿Se cumplieron las características de una relación de proporcionalidad inversa? ¿Cuáles sí y cuáles no?

La respuesta a la última pregunta de la discusión, relativa a cuáles características de una relación de proporcionalidad inversa se cumplieron y cuáles no, es de crucial importancia para poder romper una concepción dominante en alumnos de básica, sobre la proporcionalidad inversa. Por lo general, para muchos estudiantes es suficiente con chequear que mientras una variable aumenta, la otra disminuye, para establecer que la relación es de proporcionalidad inversa. En el problema estudiado vemos un caso en el que las variables se comportan de esta manera (una aumenta mientras la otra disminuye) y, sin embargo, la relación **NO es de proporcionalidad inversa**.

Con esta discusión se espera que alumnas y alumnos, apoyados por el docente, obtengan respuestas como las siguientes:

En este problema, pese a que el perímetro del corral que se requiere construir es constante (240 metros), la relación entre las variables **NO es de proporcionalidad inversa** ya que:

- Al duplicar, triplicar, etc., la medida del largo del corral, la medida del ancho del corral **NO se reduce a la mitad**, a un tercio, etc.
- **El producto entre valores correspondientes de ambas variables NO es un valor único.**
- El gráfico que representa la relación entre la medida del largo del corral y la medida del ancho del corral, **NO es una curva que se acerca progresivamente a ambos ejes**. Se trata de una línea recta que no pasa por el origen del sistema de coordenadas, y que intercepta a ambos ejes en los mismos valores.



Sin embargo esta relación SÍ cumple con una de las propiedades: al **aumentar** la medida del largo del corral, la medida del ancho del corral **disminuye**. Esto pone de manifiesto que, si bien esta es una propiedad *necesaria* para que exista una relación proporcionalidad inversa, **NO es suficiente**.

Se espera que con el estudio realizado al resolver el problema de esta Ficha y los problemas anteriores de esta etapa, los alumnos, apoyados por el profesor, puedan completar y sistematizar la caracterización de la proporcionalidad inversa:

Cuando la relación entre dos variables es de **proporcionalidad inversa**, se verifican las siguientes propiedades:

- Si los valores de una de las variables aumentan (o disminuyen), los valores de la otra disminuyen (o aumentan).
- Si los valores de una de las variables se duplican, triplican, etc., los valores correspondientes de la otra variable se reducen a la mitad, tercera parte, etc.
- El producto entre valores correspondientes de ambas variables es un valor único.
- El gráfico que representa la relación es una curva que se acerca progresivamente a ambos ejes (hipérbola).

La primera propiedad **es necesaria** para determinar que la relación es de proporcionalidad inversa, pero **no suficiente**. En cambio, las tres últimas sí lo son.

Finalmente se trabaja en la **Ficha 11**, con el propósito de que alumnas y alumnos tengan la oportunidad de lograr un dominio robusto de los procedimientos que han surgido durante la etapa y relacionarlos, así como también profundizar en sus justificaciones.

ETAPA III: *Asegurando los aprendizajes estudiados*

En esta etapa alumnas y alumnos profundizan el dominio de los conocimientos estudiados en las tres etapas anteriores para resolver las tareas matemáticas de la Unidad. Realizan las **Fichas 12 y 13** en las que hay actividades que ponen en juego los aprendizajes esperados de esta Unidad.

A través de preguntas, el profesor o profesora va destacando los fundamentos matemáticos centrales de esta Unidad, que ya han sido sistematizados en las etapas anteriores.

Al finalizar el estudio de la Unidad, los estudiantes realizan una prueba de 60 minutos que recoge los aspectos fundamentales de lo trabajado y aprendido en las tres etapas. Una vez aplicada la prueba, se abre una discusión sobre las dificultades que encontraron en su desarrollo. El profesor(a) realiza comentarios sobre las respuestas correctas y pregunta a los estudiantes sobre los procedimientos que utilizaron.

Finalmente, anuncia que en 1º medio continuarán con el estudio de la proporcionalidad, incorporando el uso del lenguaje algebraico.

Planes de clases de la PRIMERA ETAPA

Materiales: 3 vasos distintos; uno curvo y dos rectos (los rectos de distinto diámetro), 1 litro de agua, colorante (jugo en polvo), un jarro, 1 tapita o vasito graduado (de los que vienen en los medicamentos) una regla graduada en cm y mm. Fichas 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7 para cada estudiante.

Tareas Matemáticas:

- Determinan si la relación entre dos variables es directamente proporcional o no proporcional.
- Reconocen gráficos que representan relaciones directamente proporcionales.
- Construyen tablas de valores asociadas a una relación de proporcionalidad directa.
- Realizan gráficos que representan relaciones directamente proporcionales.
- Comparan gráficos que representan relaciones directamente proporcionales para inferir información relevante.

Clase 1

En esta primera clase de la etapa niñas y niños se enfrentarán al problema de determinar si la relación entre dos variables es o no de proporcionalidad directa. Verificarán la existencia de este tipo de relación **mediante experimentación**, en la que deben predecir y comprobar el comportamiento de una variable en función de valores de la otra, frente a un fenómeno poco conocido para ellos y sin contar previamente con datos reales.

Actividad 1: Predecir cómo varía la altura del líquido en un vaso, a medida que se van agregando (una a una) las tapitas (o vasitos graduados) con agua, para comprobarlo experimentalmente después. El profesor(a) pide que formen grupos de 5 integrantes para trabajar en las actividades de la **Ficha 1**. Verifican que cuenten con todos los materiales necesarios para realizar la actividad; cada grupo dispondrá de 2 vasos distintos, uno recto (diámetro constante) y uno curvo (diámetro variable), un jarro con agua con colorante (jugo en polvo), una regla graduada (en cm y mm) y una tapita de bebida o un vasito graduado (como los que vienen en los medicamentos).

Inician el trabajo con la Parte I de la **Situación Experimental 1** realizando el trabajo *previo a la experimentación*, referido a establecer un nivel inicial de líquido en los frascos, en caso de que los vasos sean deformes en sus fondos. A continuación el docente pide que agreguen al **vaso recto** una o varias tapitas de agua (un número determinado de veces, suficiente para que la diferencia de niveles sea fácilmente apreciable, alrededor de 1cm). Luego de haber agregado dicha cantidad de líquido, les pide que respondan a las pregunta **a)** y **b)** de la Ficha: ¿Qué ocurrió al agregar este número de tapitas de líquido al vaso? ¿En cuánto varió la altura del líquido en el vaso? Una vez que alumnas y alumnos hayan medido y dado respuesta a estas preguntas, el profesor les pide que continúen con las preguntas **c)** y **d)** en que deberán predecir: ¿Qué pasará si agregamos otra cantidad igual de líquido al vaso? ¿Con cuántas tapitas creen que se llenará el vaso? Luego se les invita a continuar el experimento y comprobar sus predicciones, anotando en una tabla de datos los valores que vayan obteniendo. Una vez realizado el experimento, se invita a los alumnos a responder las preguntas **e)**, **f)**, **g)** y **h)** de la Ficha: ¿Por qué la altura del líquido varía lo mismo, cada vez que se agrega una cantidad igual de líquido? ¿De qué depende la altura del líquido en el vaso? ¿Cuáles son las variables en juego en esta situación? Finalmente, se invita a los alumnos a graficar la situación para que vayan reconociendo el tipo de gráfico asociado a una relación de proporcionalidad directa.

Continúan la actividad con la Parte II de la **Situación Experimental 1** realizando el trabajo *previo a la experimentación*, referido a establecer un nivel inicial de líquido en los frascos, en caso de que los vasos sean deformes en sus fondos. El profesor(a) pide que agreguen al **vaso curvo** una o

varias tapitas de líquido (un número determinado de veces, suficiente para que la diferencia de niveles sea fácilmente apreciable, alrededor de 1cm). Al igual que para el caso del vaso recto, luego de haber agregado dicha cantidad de líquido, el profesor les pide que respondan a las preguntas **a)** y **b)** de la Ficha: ¿Qué ocurrió al agregar este número de tapitas de líquido al vaso? ¿En cuánto varió la altura del líquido en el vaso? Una vez que los alumnos hayan medido y dado respuesta, el docente les pide que continúen con las preguntas **c)** y **d)** en las que deberán predecir: ¿Qué pasará si agregamos otra cantidad igual de líquido al vaso? ¿Con cuántas tapitas creen que se llenará el vaso? Luego se les invita a realizar el experimento y comprobar sus predicciones, anotando en una tabla de datos los valores que vayan obteniendo. Una vez realizado el experimento, se les invita a responder las preguntas **e)**, **f)** y **g)** de la Ficha: ¿Por qué en este caso la altura del líquido no varía lo mismo cada vez que se agrega una cantidad igual de líquido? ¿De qué depende la altura del líquido en el vaso? ¿Cuáles son las variables en juego en esta situación? Finalmente, se les invita a graficar la situación y comparar este gráfico con el del vaso recto.

Una vez que han terminado el trabajo pedido en la Ficha, el docente propone que compartan los resultados que obtuvieron en cada caso y los procedimientos que utilizaron. Luego, genera una discusión mediante preguntas del siguiente tipo:

- ¿Resultaron correctas o no sus predicciones? ¿Por qué?
- ¿Qué ocurría, en cada caso, con la altura del líquido cuando se agregaba líquido al vaso?
- Si en ambos experimentos las variables en juego fueron las mismas (cantidad de líquido agregado al vaso y altura del líquido en el vaso), ¿por qué razón las dos relaciones entre estas variables, cada una determinada por las características del vaso, en un caso recto y en el otro curvo, se comportan de manera diferente, es decir, no son del mismo tipo?
- ¿Por qué en el caso de la primera situación el gráfico obtenido fue una línea recta, y en la segunda situación una curva?

A continuación se muestra la representación gráfica del llenado de dos vasos como los usados en el experimento, uno recto y otro curvo. Como se observa, el vaso recto se llena con 900cc, mientras que el vaso curvo se llena con 1440cc.

Cierre: Se espera que alumnas y alumnos, apoyados por el profesor o profesora, puedan realizar un análisis que les permita llegar a conclusiones similares a las siguientes:

En la Parte I de la Situación Experimental 1, dado que el envase es recto, la relación entre las variables cumple:

- Al aumentar la cantidad de líquido en el vaso, la altura de este alcanzada en el vaso también aumenta.
- A incrementos iguales de la cantidad de líquido que se agrega, se obtienen incrementos iguales en la altura de este en el vaso.
- Al duplicar, triplicar, etc., la cantidad de líquido que se echa en el vaso, la altura del líquido en el vaso también se duplica, triplica, etc.
- El gráfico que representa la relación entre la cantidad de líquido en el vaso y la altura del líquido es una línea recta que pasa por el origen.

Una relación que tiene estas características recibe el nombre de **relación de proporcionalidad directa**.

En la segunda situación, dado que el envase es curvo, la relación entre las variables no tiene las mismas características que la relación anterior:

- Al duplicar, triplicar, etc., la cantidad de líquido que se echa en el vaso, la altura del líquido en el vaso no siempre se duplica, triplica, etc.
- A incrementos iguales de la cantidad de líquido que se agrega, no siempre se obtienen incrementos iguales en la altura de este en el vaso. Esto muestra que los incrementos de la variable dependiente no son constantes.

Por esta razón, cuando el envase es curvo la relación entre las variables **no es de proporcionalidad directa**.

Se puede ver que, tanto en el caso del vaso recto como en el caso del vaso curvo, al aumentar la cantidad de líquido en el vaso, la altura del líquido en el vaso también aumenta. De esto podemos deducir que esta es una condición necesaria para identificar una relación de proporcionalidad directa, pero no es una condición suficiente: en el caso del vaso curvo se cumple esta condición y, sin embargo, no es una relación de proporcionalidad directa. En ambas situaciones, la altura del líquido en el vaso, además de depender de la cantidad de líquido que se agrega al vaso, depende de la forma del vaso, ya sea recta o curva.

Clase 2

En esta segunda clase de la etapa alumnas y alumnos se enfrentarán al problema de determinar si la relación entre dos variables es o no de proporcionalidad directa. Verificarán la existencia de este tipo de relación **mediante la deducción**, en que deben predecir el comportamiento de una variable en función de valores de la otra, frente a un fenómeno poco conocido para ellos, pero contando previamente con datos concretos, o con el gráfico asociado.

Actividad 2: Alumnas y alumnos realizan la **Ficha 2** en que se enfrentarán con la tarea de deducir si la relación entre las variables de un fenómeno es o no de proporcionalidad directa. Para su análisis contarán con datos concretos, presentados en una tabla o en el gráfico asociado. Resuelven los dos problemas de la Ficha.

Una vez que han resuelto los problemas de la Ficha, el profesor o profesora conduce una discusión sobre las respuestas que obtuvieron en cada problema y los procedimientos que utilizaron. Luego de esto, plantea preguntas del siguiente tipo:

- *¿En qué casos se cumplieron las características de una relación de proporcionalidad directa estudiadas en la clase anterior?, es decir,*
- *Si los valores de una de las variables aumentan (o disminuyen), ¿ los valores de la otra también aumentan (o disminuyen)?*
- *A variaciones iguales en una de las variables, ¿ se producen variaciones en la otra que también son iguales?*
- *Si los valores de una de las variables se duplican, triplican, etc., ¿ los valores correspondientes de la otra variable también se duplican, triplican, etc.?*
- **En el problema 1, ¿ cómo obtuvieron la cantidad de litros que pierde la llave en 25 minutos?**
- *¿Qué peculiaridades tiene el gráfico en aquellos casos en que se cumplen las características anteriores?*

La pregunta del **problema 1** relativa a la cantidad de agua que pierde la llave en 25 minutos, permite hacer emerger otra característica de la proporcionalidad directa. En efecto, para calcular este valor, ya que $25 = 20 + 5$, podemos sumar los valores de la pérdida de agua correspondientes a 20 minutos (11) y a 5 minutos (0,251). Esta propiedad se puede enunciar de la siguiente forma: el valor correspondiente a la suma de dos valores de una de las variables ($a + b$), es igual a la suma de los valores correspondientes a cada uno de estos valores (a y b). De esta forma, en 25 minutos la llave pierde $11 + 0,251 = 1,251$. Es probable que esta propiedad no surja en forma espontánea de los alumnos. Por esta razón es recomendable que el profesor realice preguntas que estimulen a los alumnos a pensar que es posible calcular valores de la variable dependiente mediante esta propiedad. Por ejemplo, preguntar a los alumnos si ven alguna relación entre la cantidad de agua perdida en 15 minutos y la cantidad de agua perdida en 10 y en

5 minutos ($15 = 10 + 5$). Luego de que los alumnos hayan detectado intuitivamente esta propiedad, el profesor puede invitar a los estudiantes a comprobarla calculando otros valores que aparezcan en la tabla, usando esta propiedad.

El proceso continúa estudiando un tercer problema que permitirá seguir avanzando hacia la caracterización completa de la relación de proporcionalidad directa.

Actividad 3: Los alumnos realizan la **Ficha 3** que contiene un problema en el que se plantea el análisis de dos situaciones que involucran las mismas variables pero bajo distintas condiciones. Se trata de que los estudiantes determinen en cada caso (siendo socio y no siendo socio), la relación que hay entre la cantidad de veces que una persona va al cine al año y el costo total en pesos en el año.

Una vez que los estudiantes han resuelto la Ficha, el profesor conduce una discusión sobre las respuestas que obtuvieron a cada pregunta y los procedimientos que utilizaron. Luego, plantea preguntas del siguiente tipo:

- *¿En qué casos se cumplieron las características de una relación de proporcionalidad directa estudiadas en la etapa anterior?*
- *De acuerdo a la respuesta de la pregunta c, si un socio va el doble de veces en el año, ¿paga el doble en el año? Y si fuera el triple de veces en el año, ¿pagaría el triple?*
- *Entonces, en el caso de ser socio, si los valores de una de las variables se duplican, triplican, etc., ¿ los valores correspondientes de la otra variable también se duplican, triplican, etc.?*
- *¿En qué se diferencian los gráficos correspondientes a cada caso?*
- *¿Cuál es el que corresponde a una relación de proporcionalidad directa? ¿Por qué?*

Cierre: En la Ficha 2, la relación entre las variables del **problema 1** y del gráfico que representa al atleta **B** en el **problema 2**, y en la Ficha 3, del gráfico de los “no socios”, son de proporcionalidad directa. Se espera que los alumnos, apoyados por el profesor, puedan realizar un análisis que les permita avanzar hacia la caracterización de la relación de proporcionalidad directa. Discuten sobre las características descritas hasta el momento. En los demás problemas, la relación entre las variables no es de proporcionalidad directa. Respecto al problema de la Ficha 3, apoyados por el profesor realizan un análisis que les permita seguir completando la caracterización de la proporcionalidad directa. A las características establecidas hasta el momento, se les añade una condición: el gráfico no solo es una línea recta sino que además pasa por el origen del sistema de coordenadas. De esta forma la caracterización de la relación de proporcionalidad directa hasta el momento, queda enunciada como sigue:

Cuando la relación entre dos variables es de **proporcionalidad directa**, se verifican las siguientes propiedades:

- Si los valores de una de las variables aumentan (o disminuyen), los valores de la otra también aumentan (o disminuyen).
- A variaciones iguales en una de las variables se producen variaciones en la otra que también son iguales.
- El valor correspondiente a la suma de dos valores de una de las variables ($a + b$), es igual a la suma de los valores correspondientes a cada uno de estos valores (a y b)
- Si los valores de una de las variables se duplican, triplican, etc., los valores correspondientes de la otra variable también se duplican, triplican, etc.
- El gráfico que representa la relación es una línea recta que pasa por el origen del sistema de coordenadas.

Las dos primeras propiedades son necesarias para determinar que la relación sea de proporcionalidad directa, pero no suficientes. En cambio, las tres últimas sí lo son.

Cuando la relación entre dos variables **no es de proporcionalidad directa**, se verifica que:

- Al duplicar, triplicar, etc., los valores de una de las variables, los valores correspondientes de la otra variable no siempre se duplican, triplican, etc.
- A incrementos iguales de los valores de una de las variables, no siempre se obtienen incrementos iguales en los valores correspondientes de la otra variable.
- El gráfico no es una línea recta que pasa por el origen.

Clase 3

En esta clase se propone que los estudiantes trabajen en la **Ficha 4** en que aparecen problemas relativos al mismo tipo de tareas que las trabajadas en las clases anteriores correspondientes al estudio del primer apartado de la etapa I.

Alumnas y alumnos se reúnen en parejas para realizar una sistematización del estudio realizado hasta este momento.

Se trata de que, apoyados por el profesor(a), tengan la oportunidad de lograr un dominio robusto de los procedimientos, los relacionen entre ellos y los justifiquen.

Se enfatiza la discusión en torno a las condiciones necesarias y suficientes para que una relación entre dos variables sea de Proporcionalidad Directa y sobre las características de este tipo de relación trabajadas hasta ahora.

Cierre: Se finaliza la clase y el primer apartado de la etapa, sintetizando las ideas y fundamentos centrales trabajados hasta aquí. Se orienta este trabajo con preguntas como las siguientes, relativas a los problemas de la Ficha: ¿Podemos determinar algún tipo de relación entre las variables del problema? ¿Con qué argumentos podemos concluir que la relación entre las variables es de Proporcionalidad Directa? ¿Qué características tienen estos gráficos? ¿En qué se diferencian?

Clase 4

La situación inicial consiste en una actividad que, mediante la experimentación, pretende que alumnas y alumnos comprendan que dependiendo de las condiciones, dos relaciones de proporcionalidad directa pueden ser distintas entre sí y, además, permitirá que completen la caracterización de la proporcionalidad directa, al reconocer e incorporar una propiedad esencial que hasta este momento del estudio no ha sido tratada explícitamente. Es la propiedad que se relaciona con la noción de constante de proporcionalidad.

Actividad 4: Esta actividad consiste en predecir cómo varía la altura del líquido en cada vaso, a medida que se van agregando (una a una) las tapitas (o vasitos graduados) con agua coloreada, para comprobarlo experimentalmente después. El docente pide que formen grupos de 5 integrantes para trabajar en las actividades de la **Ficha 5**. Verifican que cuentan con todos los materiales necesarios para realizar la actividad; cada grupo dispondrá de 2 vasos rectos (ambos con diámetros constantes), un vaso más estrecho que el otro (diámetros distintos entre sí), un jarro con agua con colorante (jugo en polvo), una regla graduada (en cm y mm) y una tapita de bebida o un vasito graduado (como los que vienen en los medicamentos).

Inician el trabajo de la **Situación Experimental 2** realizando el trabajo *previo a la experimentación*, referido a establecer un nivel inicial de líquido en los frascos, en caso que los vasos sean deformes en sus fondos.

A continuación se les pide que agreguen a **ambos vasos rectos de diámetro distinto** una o varias tapitas de agua (un número determinado de veces, suficiente para que la diferencia de niveles sea fácilmente apreciable, alrededor de 1cm). Se pide a los alumnos hacer un registro de los resultados parciales en la Ficha. Luego de haber agregado dicha cantidad de agua, se les pide que respondan las preguntas **a)**, **b)** y **c)** de la Ficha: ¿Qué ocurrió al agregar este número de tapitas de líquido en cada uno de los vasos? ¿En cuánto varió la altura del líquido en el **vaso A**? ¿Y en el **vaso B**? (más estrecho). Una vez que hayan medido y dado su respuesta, se les invita a responder a las predicciones planteadas en las preguntas **d)**, **e)** y **f)**: ¿Qué pasará si agregamos otra cantidad igual de líquido al **vaso A**? ¿Y al **B**? ¿Con cuántas tapitas creen que se llenará cada uno de los vasos? Luego se les invita a continuar el experimento y comprobar sus predicciones. El profesor pide que formulen algunas hipótesis referidas a lo realizado en el experimento, respondiendo a las preguntas **g)**, **h)**, **i)**, **j)** y **k)** de la Ficha: ¿Por qué la altura del líquido varía lo mismo en el **vaso A** cada vez que se agrega una misma cantidad de líquido?, ¿Sucede lo mismo en el **vaso B**? ¿De qué depende la altura del líquido en cada vaso? ¿Cuál vaso se llena más rápido? ¿Por qué razones, si ambos vasos son rectos, uno se llena más rápido que el otro? Finalmente, se invita al curso a representar ambas situaciones en un mismo gráfico para que puedan identificar que, siendo ambas relaciones de proporcionalidad directa, y por ello el gráfico de cada situación es una línea recta que pasa por el origen del sistema de coordenadas, las líneas rectas graficadas tienen distinta inclinación.

El profesor o profesora invita a su curso a analizar los gráficos que obtuvieron para responder a las preguntas finales de la Ficha: ¿A qué se puede atribuir que la recta asociada al vaso B tenga mayor inclinación que la del vaso A? ¿Cuánto aumenta la altura del líquido en el vaso A cuando se agrega una tapita de líquido, y cuánto aumenta la altura del líquido en el vaso B al agregar una tapita de líquido?

Luego de que los estudiantes terminan la actividad de los vasos, el docente retoma el **problema 1** de la Ficha 2, sobre la llave que gotea. Recuerda el trabajo realizado con las respuestas de los alumnos y plantea que calculen la constante de proporcionalidad de la relación entre la cantidad de líquido que pierde la llave y el tiempo que transcurre, y analicen el significado de dicha constante en el contexto del problema. El objetivo que persigue este trabajo es que los estudiantes puedan profundizar en la comprensión y utilización del concepto de constante de proporcionalidad. Además, es una buena instancia para evaluar el grado de conocimiento que los estudiantes han logrado de dicho concepto después de realizar la actividad de los vasos.

Cierre: En esta experiencia con ambos vasos rectos aparece otra característica esencial de la proporcionalidad directa, que se establece mediante comparaciones entre pares de valores de ambas variables. La condición es que: si los cuocientes entre pares de valores correspondientes a ambas variables corresponden a un único valor, entonces la relación entre ambas variables es de proporcionalidad directa. Este valor único recibe el nombre de **constante de proporcionalidad**, que podemos designar por una letra **k**, y que corresponde a la variación que experimenta la variable dependiente al variar en una unidad la variable independiente.

Se espera que, con el estudio realizado en esta clase, los alumnos, apoyados por el profesor, puedan completar y sistematizar la caracterización de la proporcionalidad directa.

Cuando la relación entre dos variables es de **proporcionalidad directa**, se verifican las siguientes propiedades:

- Si los valores de una de las variables aumentan (o disminuyen), los valores de la otra también aumentan (o disminuyen).

- A variaciones iguales en una de las variables, se producen variaciones en la otra que también son iguales.
- Si los valores de una de las variables se duplican, triplican, etc., los valores correspondientes de la otra variable también se duplican, triplican, etc.
- El valor correspondiente a la suma de dos valores de una de las variables ($a + b$), es igual a la suma de los valores correspondientes a cada uno de estos valores (a y b).
- El cociente entre valores correspondientes de ambas variables es un valor único.
- El gráfico que representa la relación es una línea recta que pasa por el origen del sistema de coordenadas. La inclinación de esta recta está determinada por el valor del cociente entre valores correspondientes.

Las dos primeras propiedades son necesarias para determinar que la relación sea de proporcionalidad directa, pero no suficientes. En cambio, las cuatro últimas sí lo son.

Clase 5

En esta clase se propone que alumnas y alumnos trabajen en la **Ficha 6**, en la que aparecen problemas relativos al mismo tipo de tareas que las trabajadas en la clase anterior.

Los alumnos se reúnen en parejas para trabajar en los problemas propuestos en la Ficha 6 en la que realizarán un trabajo de sistematización que considera esencialmente la caracterización de la relación de proporcionalidad directa por medio del cociente constante.

Se trata de que los alumnos, apoyados por el profesor, tengan la oportunidad de lograr un dominio robusto de los procedimientos, los relacionen entre ellos y los justifiquen. Se espera que constaten la funcionalidad de la constante de proporcionalidad relacionándola y contrastándola con las otras propiedades estudiadas.

Cierre: Se finaliza esta clase y el segundo apartado de la etapa, sintetizando las ideas y fundamentos centrales trabajados hasta aquí. Se orienta este trabajo con preguntas como las siguientes, relativas a los problemas de la Ficha: ¿Qué puede representar este valor en el contexto de un problema? ¿Qué utilidad tiene esta nueva propiedad? ¿Cuál es la ventaja respecto a las otras propiedades de la Relación de Proporcionalidad Directa?

Clase 6

En esta clase veremos cómo el estudio de la proporcionalidad directa se complementa con el estudio del problema de la graduación de los ejes para realizar la representación gráfica de una relación entre dos variables. Interesa que los alumnos comprendan que la escala que se utilice para graduar los ejes debe cumplir ciertas condiciones. De lo contrario, el gráfico puede mostrar una representación que no dé cuenta correcta del comportamiento del fenómeno y nos conduzca a extraer conclusiones erróneas.

Actividad 5: El profesor(a) pide que trabajen en parejas en los problemas de la **Ficha 7**. Pide que lean una situación de clase, narrada en la Ficha, para luego contestar a las preguntas que se hacen sobre lo sucedido en esa clase.

Situación de clase: En una clase de Comprensión del medio natural del 7° Básico de la escuela Los Manzanos, están realizando el siguiente experimento en grupos de 5 integrantes. Cada grupo dispone de un resorte del que cuelga un vaso plástico, una regla y monedas de \$10. El experimento consiste en determinar cómo se va alargando el resorte al ir agregando monedas de \$10 en el vaso. Para ello, los estudiantes realizan el experimento con una cantidad suficiente de monedas como para poder establecer alguna conclusión. Van registrando sus resultados en una tabla y luego los grafican. El experimento concluye con la presentación de los gráficos obtenidos por tres grupos del curso.

Luego de concluir la lectura de la situación de clase descrita, el profesor(a) pide que trabajen las actividades de la Ficha. Los estudiantes discuten con su pareja y escriben sus conclusiones. El docente pondrá especial atención cuando los estudiantes tengan que construir la tabla de valores correspondientes a cada gráfico del experimento y responder a las preguntas relacionadas con este fenómeno.

Es muy probable que los estudiantes contesten que los grupos tenían distintos resortes para realizar el experimento, puesto que sus gráficos son distintos y las monedas de \$10 son siempre iguales. Al construir las tablas de valores correspondientes, se percatarán de que los tres gráficos están asociados a una misma tabla. Esto ha sucedido porque en los gráficos se han considerado distintas escalas para graduar los ejes.

Cierre: El profesor o profesora conduce una discusión entre los estudiantes contrastando los resultados que obtuvieron y las explicaciones que dan en cada caso. Se espera que de esta discusión se concluya que:

- Para graduar los ejes de un gráfico que representa la relación entre dos variables, se debe escoger una escala adecuada para cada eje, que permita ubicar, con tanta precisión como se requiera, los valores de las variables.
- Las escalas escogidas para cada uno de los ejes no tienen por qué ser iguales; va a depender de la naturaleza de la variable que se represente y de los datos que se tengan de la misma.
- Una vez escogida la escala para cada eje, se debe construir la graduación siguiendo exactamente este patrón.
- Tal como constatamos en la actividad anterior, no nos podemos fiar exclusivamente de la inclinación visual de la recta para sacar conclusiones, sino que, además, debemos chequear la relación cuantitativa entre ambas variables. Esto es, determinar qué valores le corresponden a la variable dependiente cuando la variable independiente toma valores determinados.

Clase 7

En esta última clase de la **Primera Etapa**, los estudiantes realizan la **Prueba Parcial de la Unidad** que tiene una duración de 60 minutos. Esta prueba recoge los aspectos fundamentales de lo trabajado y aprendido en esta primera etapa.

Una vez aplicada la prueba, se abre una discusión sobre las dificultades que alumnas y alumnos encontraron en su desarrollo. El profesor(a) realiza comentarios sobre las respuestas correctas y pregunta sobre los procedimientos que utilizaron.

Planes de clases de la SEGUNDA ETAPA

Materiales: Fichas 8, 9, 10 y 11 para cada estudiante.

Tareas Matemáticas:

- Determinan si la relación entre dos variables es inversamente proporcional o de otro tipo.
- Reconocen gráficos que representan relaciones inversamente proporcionales.
- Construyen tablas de valores asociadas a una relación de proporcionalidad inversa.
- Realizan gráficos que representan relaciones inversamente proporcionales.
- Comparan gráficos que representan relaciones inversamente proporcionales para inferir información relevante.

Clase 8

En esta clase comienza el estudio de la proporcionalidad inversa. Se estudian dos problemas en contextos numéricos; el primer problema involucra una relación de proporcionalidad inversa y, el otro, una relación de otro tipo. Las relaciones entre las variables de las situaciones no son conocidas por los estudiantes. Para el estudio de estas situaciones se pedirá a los alumnos que construyan las tablas de valores correspondientes a cada problema y sus gráficos. En esta clase se trabaja la **Ficha 8**. El estudio de estos dos problemas permite iniciar el trabajo de las cuatro tareas matemáticas de esta etapa.

El propósito de esta clase es que los estudiantes inicien una caracterización de la relación de proporcionalidad inversa que les permita distinguirla de otras relaciones y, en particular, contrastarla con la relación de proporcionalidad directa.

Actividad 6: Para conseguir los objetivos de esta clase, alumnas y alumnos resuelven la **Ficha 8** que contiene dos problemas de proporcionalidad, ambos relacionados con el paseo de fin de año que realiza un curso a la costa. Cada problema plantea una alternativa de transporte distinta, asociada a un determinado costo; el trabajo consiste en analizar la conveniencia de cada una de ellas. El primer problema corresponde a un problema de proporcionalidad directa, mientras que el segundo corresponde a un problema de proporcionalidad inversa.

Una vez que han resuelto la Ficha, el profesor conduce una discusión sobre las respuestas que obtuvieron a cada pregunta y los procedimientos que utilizaron. Luego, plantea preguntas del siguiente tipo: *¿Cuáles son las variables relacionadas en la primera situación? ¿Y en la segunda? ¿Son las mismas? ¿Las características de una relación de proporcionalidad directa se cumplieron para alguna de las dos situaciones planteadas? ¿Cuál es la constante de proporcionalidad en esa situación? ¿Qué significado tiene esta constante en el contexto del problema? ¿Qué ocurre con el dinero que paga cada estudiante, en el caso del bus arrendado, cuando aumenta la cantidad de estudiantes que van al paseo? ¿Qué ocurre con el dinero que paga cada estudiante, en el caso del bus arrendado, si se duplica el número de niños que van al paseo? ¿Y si se cuadruplica? ¿En qué se diferencian los gráficos correspondientes a cada una de las dos situaciones planteadas?* (Para realizar la gestión de este momento de discusión, se recomienda que el profesor(a) se apoye en la estrategia didáctica sugerida en el texto, página 29).

Cierre: Con el estudio de estos dos problemas se espera que los estudiantes puedan dar respuestas como las siguientes, y así ir caracterizando la relación de proporcionalidad inversa entre dos variables:

- En la primera situación, dado que la cuota que paga cada estudiante es constante, la relación entre el número de alumnos que asiste al paseo y el precio total a pagar es **de proporcionalidad directa**.
 - En la segunda situación, dado que el precio a pagar por el bus es constante, la relación entre las variables cumple:
 - Al **aumentar** la cantidad de alumnos que asisten al paseo, la cuota que paga cada estudiante **disminuye**.
 - Al duplicar, triplicar, etc., la cantidad de alumnos que asisten al paseo, la cuota que paga cada estudiante se reduce a la mitad, a un tercio, etc.
 - El gráfico que representa la relación entre el número de alumnos que asisten al paseo y la cuota que paga cada alumno, es una **curva que se acerca progresivamente a ambos ejes**.
- Una relación que tiene estas características recibe el nombre de **relación de proporcionalidad inversa**.

Clase 9

En esta clase se estudian dos problemas de proporcionalidad inversa en contextos numéricos. A diferencia de la clase anterior, los problemas involucran relaciones del **mismo tipo**, pero con constantes de proporcionalidad diferentes. Al igual que en la clase anterior, son problemas en los que las relaciones entre las variables de las situaciones no son conocidas por los estudiantes. Del mismo modo, para el estudio de estas situaciones se pedirá a los estudiantes que construyan las tablas de valores correspondientes a cada problema y sus gráficos. En esta clase trabajan en la **Ficha 9**. El estudio de estos dos problemas permite profundizar el trabajo de las cuatro tareas matemáticas de esta etapa.

El propósito de esta clase es que los estudiantes avancen en la caracterización de la relación de proporcionalidad inversa, incorporando a la caracterización iniciada en la clase anterior la propiedad referida a la constante de proporcionalidad.

Actividad 7: Para lograr el propósito de esta clase, los estudiantes resuelven la **Ficha 9**, que plantea dos problemas de proporcionalidad inversa relacionados con el embotellamiento de una cantidad determinada de litros de bebida. Una vez que los estudiantes han realizado las tablas de valores correspondientes a cada problema, los gráficos asociados y los análisis de las situaciones requeridos, se les pide que comparen ambas relaciones de proporcionalidad inversa, las que tienen como única diferencia sus constantes de proporcionalidad.

Una vez que los estudiantes han resuelto la Ficha, el profesor conduce una discusión sobre las respuestas que obtuvieron a cada pregunta y los procedimientos que utilizaron. Luego, el docente plantea preguntas del siguiente tipo: *Si aumenta la capacidad de las botellas: ¿Qué ocurre con la cantidad de botellas que se utilizan? Si una botella tiene el doble de capacidad que otra, ¿alcanza la mitad de botellas para embotellar la misma cantidad de bebida? Y si tuviera el triple de capacidad, ¿alcanzaría un tercio de las botellas? Entonces, si los valores de una de las variables se duplican, triplican, etc., ¿los valores correspondientes de la otra variable se reducen a la mitad, un tercio, etc.? ¿Cómo es el gráfico en cada caso? ¿En qué casos se cumplieron las características de una relación de proporcionalidad inversa? ¿Qué diferencia hay entre ambos gráficos? ¿A qué se pueden atribuir esas diferencias?* (Para realizar la gestión de este momento de discusión, se recomienda que el profesor(a) se apoye en la estrategia didáctica sugerida en el texto, página 34).

Cierre: Se espera que, con el estudio realizado en estas dos clases alumnas y alumnos, apoyados por el profesor o profesora, puedan progresar en la caracterización de la proporcionalidad inversa:

En ambas situaciones, dado que la cantidad de litros a embotellar es constante, la relación entre las variables cumple:

- Al **aumentar** la capacidad de las botellas, la cantidad de botellas requeridas **disminuye**.
- Al duplicar, triplicar, etc., la capacidad de las botellas, la cantidad de botellas requeridas se reduce a la mitad, a un tercio, etc.
- El gráfico que representa la capacidad de las botellas y la cantidad de botellas requeridas, es una **curva que se acerca progresivamente a ambos ejes**.
- **El producto entre valores correspondientes de ambas variables es un valor único.**

Por estas razones estas relaciones son de **proporcionalidad inversa**.

Clase 10

En esta clase se estudia un problema en un contexto geométrico que no involucra una relación de proporcionalidad inversa, pero que sí cumple con una de sus propiedades. La relación entre las variables de las situaciones, pese a hacer referencia a una noción geométrica básica como es el perímetro de un rectángulo, es poco conocida por los estudiantes. Por esta razón los datos son entregados en una tabla de valores que los alumnos deberán completar y, además, deberán construir el gráfico asociado. En esta clase trabajan en la **Ficha 10**. El estudio de este problema permite concluir el trabajo de las cuatro tareas matemáticas de esta etapa.

El propósito de esta clase es que los estudiantes finalicen la construcción de la caracterización de la relación de proporcionalidad inversa, reconociendo los alcances de cada una de sus propiedades. En particular, se trata de que los alumnos reconozcan que la primera propiedad (*si los valores de una de las variables aumentan o disminuyen, los valores de la otra disminuyen o aumentan respectivamente*) es necesaria para establecer que una relación es de proporcionalidad inversa, pero NO es suficiente.

Actividad 8: Para lograr el propósito de esta clase, los estudiantes resuelven la **Ficha 10**, que plantea un problema que no es de proporcionalidad inversa, relacionado con la construcción de un corral rectangular para la cual cuentan con una cantidad dada de material (se trata de determinar las medidas del largo y ancho de distintos rectángulos que tienen el mismo perímetro). Una vez que los estudiantes han completado la tabla de valores correspondiente, realizado el gráfico asociado y los análisis de la situación requeridos, el profesor conduce una discusión en torno a preguntas del siguiente tipo: *Si aumenta la medida del largo del corral, ¿qué ocurre con la medida del ancho del corral? Si se duplica la medida del largo del corral, ¿disminuye la medida del ancho del corral a la mitad? Y si se triplica la medida del largo, ¿disminuye a un tercio la medida del ancho del corral? Entonces, si los valores de una de las variables se duplican, triplican, etc., ¿los valores correspondientes de la otra variable se reducen a la mitad, un tercio, etc.? ¿Cómo es el gráfico de esta relación? ¿Se cumplieron las características de una relación de proporcionalidad inversa? ¿Cuáles sí y cuáles no?* (Para realizar la gestión de este momento de discusión, se recomienda que el profesor(a) se apoye en la estrategia didáctica sugerida en el texto, página 37).

Cierre: Se espera que, con el estudio realizado al resolver el problema de esta Ficha y los problemas anteriores de esta etapa alumnas y alumnos, apoyados por el profesor, puedan completar y sistematizar la caracterización de la relación de **proporcionalidad inversa**:

Cuando la relación entre dos variables es de *proporcionalidad inversa*, se verifican las siguientes propiedades:

- Si los valores de una de las variables aumentan (o disminuyen), los valores de la otra disminuyen (o aumentan).

- Si los valores de una de las variables se duplican, triplican, etc., los valores correspondientes de la otra variable se reducen a la mitad, tercera parte, etc.
- El producto entre valores correspondientes de ambas variables es un valor único.
- El gráfico que representa la relación es una curva que se acerca progresivamente a ambos ejes.

La primera propiedad es necesaria para determinar que la relación es de proporcionalidad inversa, pero **no suficiente**. En cambio, las tres últimas sí lo son.

Clase 11

En esta clase se estudian problemas en diversos contextos que involucran relaciones de proporcionalidad inversa. Las relaciones entre las variables de las situaciones fueron escogidas de modo que algunas resulten familiares para los estudiantes y, por lo tanto, les sea más fácil predecir el tipo de relación existente, antes de estudiarla. En algunos casos la información vendrá dada mediante gráficos y/o tablas de valores, en otros los alumnos tendrán que construirlos. En esta clase se resuelve la **Ficha 11** en la que se trabaja sobre los conocimientos que han sido abordados hasta el momento, permitiendo consolidar el estudio de las cuatro tareas matemáticas de esta etapa.

Esta clase corresponde a la última clase de la tercera etapa y su propósito es que alumnas y alumnos tengan la oportunidad de lograr un dominio robusto de los procedimientos, los relacionen entre ellos y profundicen en sus justificaciones.

Cierre: Se sistematizan todos los conocimientos construidos y adquiridos durante esta etapa.

Planes de clases de la TERCERA ETAPA

Materiales: Fichas 12 y 13 para cada estudiante.

Tareas Matemáticas: Todas las de la Unidad Didáctica.

Clase 12

En esta etapa los estudiantes inician una profundización en el dominio de los conocimientos estudiados en las tres etapas anteriores para resolver las tareas matemáticas de la Unidad. Realizan la **Ficha 12** en la que hay actividades que ponen en juego los aprendizajes esperados de esta Unidad.

Cierre: A través de preguntas, el profesor o profesora va destacando los fundamentos matemáticos centrales de esta Unidad, que ya han sido sistematizados en las etapas anteriores.

Clase 13

En esta etapa los estudiantes continúan con la profundización en el dominio de los conocimientos estudiados en las tres etapas anteriores para resolver las tareas matemáticas de la Unidad y de esta forma asegurar su apropiación. Realizan la **Ficha 13** en la que hay actividades que ponen en juego los aprendizajes esperados de esta Unidad.

Cierre: A través de preguntas, el profesor o profesora va destacando los fundamentos matemáticos centrales de esta Unidad, que ya han sido sistematizados en las etapas anteriores.

Clase 17

En esta última clase de la Unidad, los estudiantes realizan la **Prueba de la Unidad** que tiene una duración de 60 minutos. Esta prueba recoge los aspectos fundamentales de lo trabajado y aprendido en las tres etapas.

Una vez aplicada la prueba, se abre una discusión sobre las dificultades que encontraron en su desarrollo. El profesor o profesora realiza comentarios sobre las respuestas correctas y pregunta a los estudiantes sobre los procedimientos que utilizaron.

Finalmente, anuncia que en 1º medio continuarán con el estudio de la proporcionalidad, incorporando el uso del lenguaje algebraico.

PRUEBA PARCIAL DE LA SEGUNDA UNIDAD 8º BÁSICO

Nota

Nombre: _____ Escuela: _____

Curso: _____ Fecha: _____ Puntaje: _____

1. *Examina cada uno de los siguientes gráficos y determina si corresponde a una relación directamente proporcional o de otro tipo. Justifica tu respuesta.*

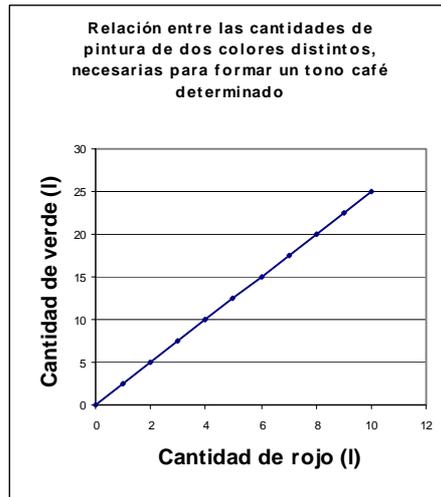
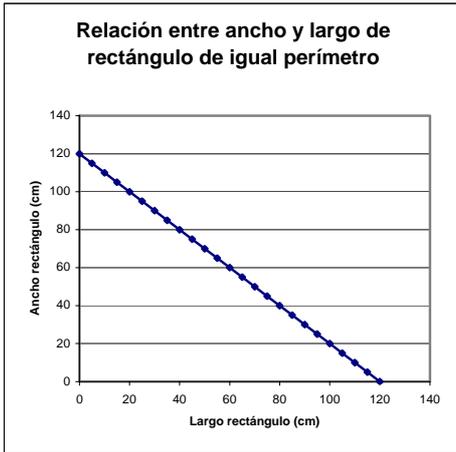


Gráfico 1: _____

Gráfico 2: _____

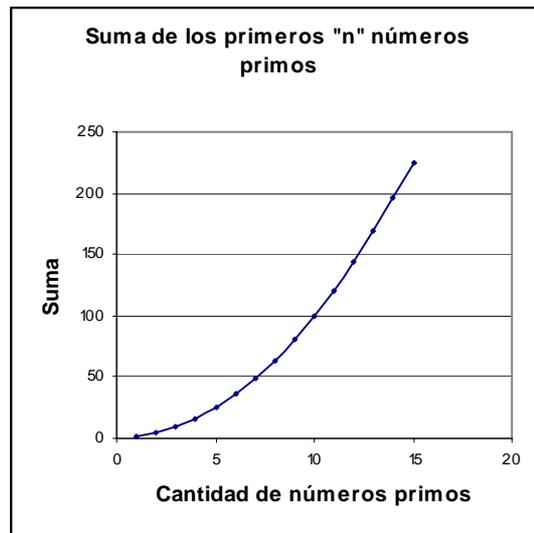


Gráfico 3: _____

2. Alberto quiere sembrar pasto y para ello ha escogido la variedad **Chépica Alemana**. La información que este pasto trae para su siembra es que se necesita $\frac{1}{4}$ kg de semillas por cada 10 m^2 .

a. Si Alberto compró una bolsa de 3 kg de semillas, ¿para cuántos metros cuadrados de terreno le alcanza?

b. ¿Y si tuviera 5 kg de semillas?

c. Completa la siguiente tabla de valores relativa a la relación entre las variables de la situación, escribiendo en la tabla dichas variables:

$\frac{1}{4}$	10
	20
$\frac{3}{4}$	
	80
3	
5	

d. La relación entre estas variables, ¿es de proporcionalidad directa o de otro tipo?, ¿por qué?

3. La tabla que se muestra a continuación es relativa al peso de un cartón por unidad de área (cm^2):

Área (cm^2)	Peso (gr)
1	0,2
1,5	0,3
2	0,4
2,5	0,5
3	0,6
3,5	0,7
4	0,8
4,5	0,9
5	1
5,5	1,1
6	1,2
6,5	1,3
7	1,4
7,5	1,5
8	1,6

En la tabla se observa que a medida que aumentan los valores de una de las variables, los valores de la otra también aumentan. Sabemos que esta no es una razón suficiente para determinar el tipo de relación existente entre ambas variables.

- a. ¿La relación entre estas variables es de proporcionalidad directa o de otro tipo?
¿Por qué?
- b. ¿Qué característica(s) de esta relación es(son) suficiente(s) para saber qué tipo de relación es?

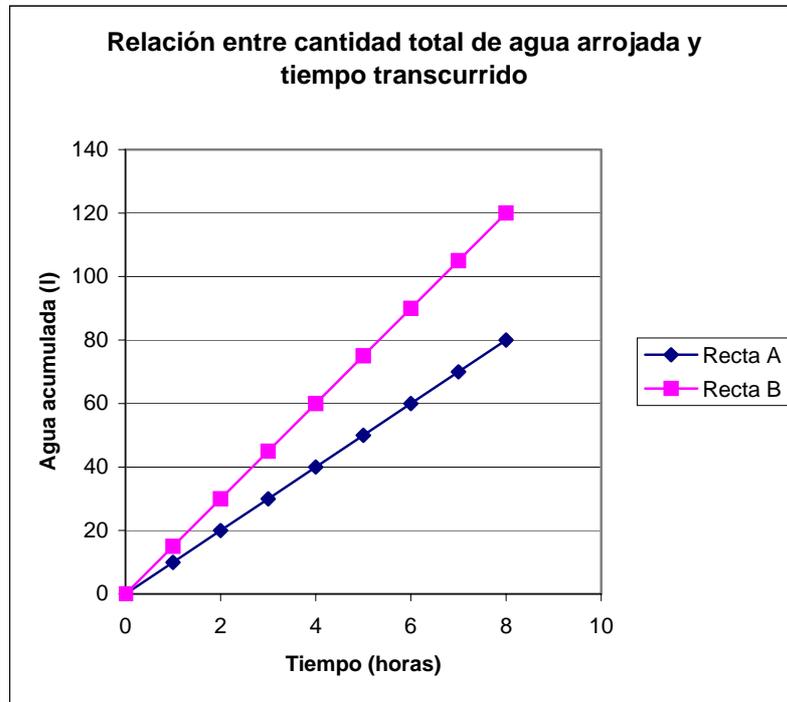
4. La cantidad de diagonales que tiene un polígono depende de la cantidad de lados del mismo. Se sabe que la cantidad de diagonales de un polígono se puede calcular a partir de la fórmula $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$, donde n representa el número de lados del polígono. La siguiente tabla muestra la relación entre la cantidad de diagonales de un polígono y el número de lados de este:

Cantidad de lados	Cantidad de diagonales
3	0
4	2
5	5
6	9
7	14
8	20
9	27
10	35
11	44
12	54
13	65
14	77
15	90

En la tabla se observa que a medida que aumentan los valores de una de las variables, los valores de la otra también aumentan. Sabemos que esta no es una razón suficiente para determinar el tipo de relación existente entre ambas variables.

- c. ¿La relación entre estas variables es de proporcionalidad directa o de otro tipo?
¿Por qué?
- d. ¿Qué característica(s) de esta relación es(son) suficiente(s) para saber qué tipo de relación es?

5. En un estadio están llenando una piscina mediante dos tuberías de agua de distinto diámetro, una de $\frac{1}{2}$ pulgada y la otra de $\frac{3}{4}$ de pulgada. El siguiente gráfico muestra la cantidad total de agua que va arrojando cada tubería en la piscina en el transcurso de algunas horas:



- a. ¿Por qué son distintas las inclinaciones de ambas rectas?
- b. ¿Cuál de las rectas corresponde a la tubería de $\frac{1}{2}$ pulgada? ¿Por qué?
- c. ¿Cuál es el valor de la constante de proporcionalidad para cada gráfico?

PRUEBA FINAL DE LA SEGUNDA UNIDAD 8° BÁSICO

Nota

Nombre: _____ Escuela: _____

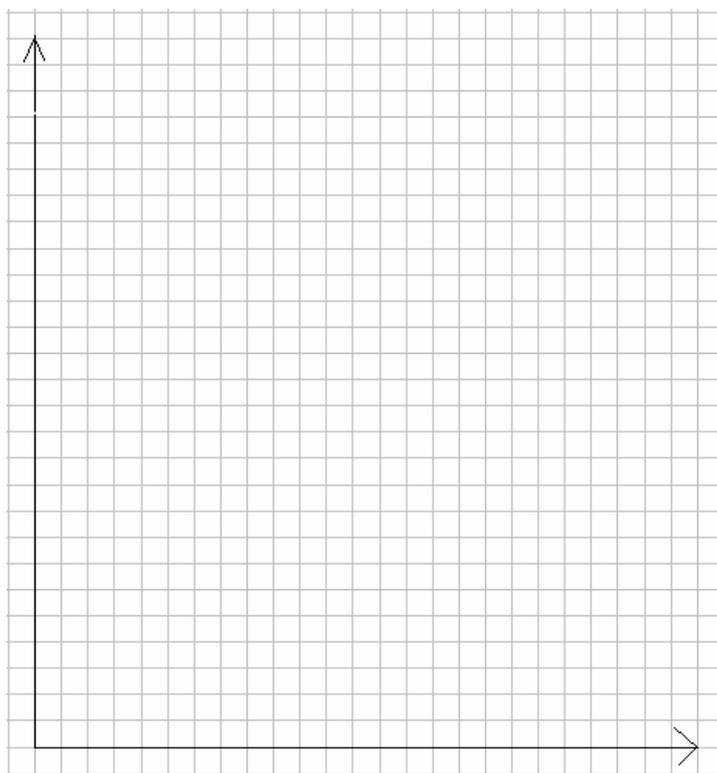
Curso: _____ Fecha: _____ Puntaje: _____

2. La tabla siguiente muestra la relación entre la velocidad de un móvil (*cm/seg*) y el tiempo transcurrido durante su desplazamiento (*seg*). Sabiendo que, para esta situación, la relación entre estas variables es de proporcionalidad directa:

a. Completa la tabla:

tiempo transcurrido (<i>seg</i>)	velocidad del móvil (<i>cm/seg</i>)
0	
2	6
3	
	18
10	30
13	
	60
30	

b. Grafica la relación entre las variables de la situación.



3. En Cartagena se ofrece una casa en arriendo. La casa tiene una capacidad para 8 personas y tiene un costo de \$33.600 por un fin de semana. Un grupo de amigos quiere ir este fin de semana distribuyéndose equitativamente los costos.

a. ¿Cuánto pagará cada uno si van 3?

b. ¿Cuánto pagará cada uno si van 6?

c. Uno de los integrantes de este grupo quiere saber si dispone del dinero suficiente para ir. Para ello necesita saber cuánto debe pagar en cada uno de los casos posibles (de 1 a 8 personas). Haz una tabla que contenga esta información.

d. ¿Qué tipo de relación existe entre las variables de la situación? ¿En qué te basas para afirmarlo?

4. Examina cada uno de los siguientes gráficos y determina si corresponde a una relación directamente proporcional, inversamente proporcional o a otro tipo. Justifica tu respuesta.

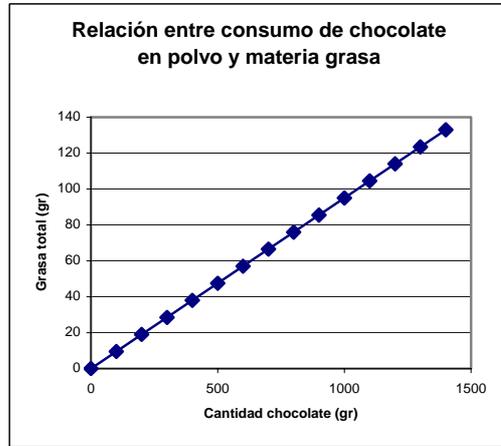


Gráfico 1: _____

Gráfico 2: _____

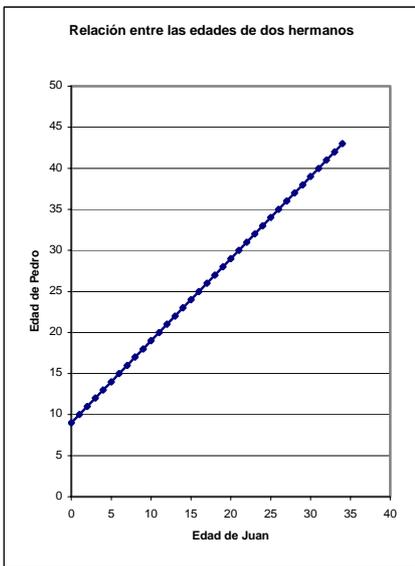


Gráfico 3: _____

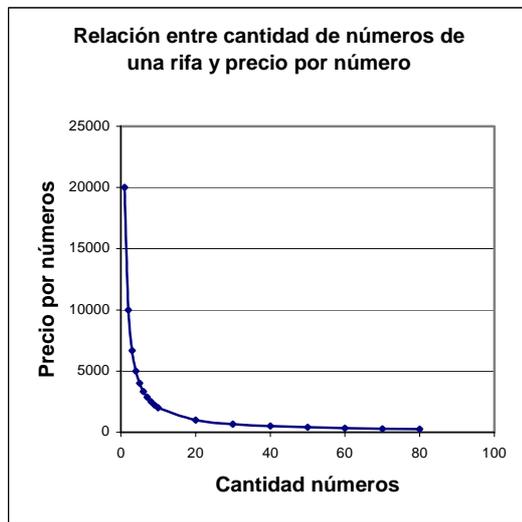


Gráfico 4: _____

5. En la siguiente tabla se muestra la relación entre la cantidad de harina que se usa en la preparación de sopaipillas y la cantidad de sopaipillas que se pueden preparar.

Harina (kg)	Cantidad de sopaipillas
$\frac{1}{4}$	10
$\frac{1}{2}$	20
1	40
3	120
5	200
6	240

En la tabla se observa que a medida que aumentan los valores de una de las variables, los valores de la otra también aumentan. Sabemos que esta no es una razón suficiente para determinar el tipo de relación existente entre ambas variables.

- a. ¿La relación que existe entre las variables de la situación es directamente proporcional, inversamente proporcional o de otro tipo?
- b. ¿Qué característica(s) de esta relación es(son) suficiente(s) para saber qué tipo de relación es?
6. Andrea tiene un plan telefónico de \$9.000 mensuales. En este plan, cada minuto que habla tiene un valor de \$180, que se van restando de los \$9.000. La siguiente tabla muestra la relación entre los minutos que Andrea habló durante el mes pasado y la cantidad de dinero disponible que iba quedando en su teléfono.

Cantidad de minutos de conversación	Saldo (\$)
0	9000
2	8640
6	7920
10	7200
14	6480
16	6120
22	5040
28	3960
30	3600
34	2880
44	1080

En la tabla se observa que a medida que aumentan los valores de una de las variables, los valores de la otra disminuyen. Sabemos que esta no es una razón suficiente para determinar el tipo de relación existente entre ambas variables.

- a. ¿La relación que existe entre las variables de la situación es directamente proporcional, inversamente proporcional o de otro tipo? ¿Por qué?

7. Una casa comercial ofrece un computador en \$400.000 que se puede pagar hasta en 36 cuotas, sin intereses ni costo de facturación. La siguiente tabla muestra la relación entre la cantidad de cuotas que pueden ser pactadas para la compra de este computador y el valor de cada cuota.

Número de cuotas	Valor de cada cuota
3	120000
4	90000
5	72000
6	60000
8	45000
9	40000
10	36000
12	30000
15	24000
18	20000
20	18000
24	15000
30	12000
32	11250
36	10000

En la tabla se observa que a medida que aumentan los valores de una de las variables, los valores de la otra disminuyen. Sabemos que esta no es una razón suficiente para determinar el tipo de relación existente entre ambas variables.

- a. ¿La relación que existe entre las variables de la situación es directamente proporcional, inversamente proporcional o de otro tipo?
- b. ¿Qué característica(s) de esta relación es(son) suficiente(s) para saber qué tipo de relación es?

Evaluación de la unidad por el curso:

Tareas matemáticas	Preg.	Cantidad de alumnos(as) que respondieron correctamente	Porcentaje de alumnos(as) que respondieron correctamente	Promedios parciales de los porcentajes de alumnos(as) que respondieron correctamente
Determinan si la relación entre dos variables es directamente proporcional, inversamente proporcional o no proporcional.	2.d.			
	4.a.			
	4.b.			
	5.a.			
	6.a.			
	6.b.			
Reconocen gráficos que representan relaciones directamente proporcionales, inversamente proporcionales o de otro tipo.	3.graf1			
	3.graf2			
	3.graf3			
	3.graf4			
Construyen tablas de valores asociadas a una relación de proporcionalidad directa.	1.a.			
Construyen tablas de valores asociadas a una relación de proporcionalidad inversa.	2.a.			
	2.b.			
	2.c.			
Realizan gráficos que representan relaciones directamente proporcionales	1.b.			
% total de logro del curso = promedio de los % parciales				

VI. Espacio de reflexión personal

Busque en el momento de cierre de cada uno de los planes de clase, el o los fundamentos centrales de la unidad con el cual se corresponde:

Reflexione sobre los principales aportes que le ha hecho esta unidad y sobre la forma en que puede utilizarlos en la planificación de sus clases:

VII. Glosario

- ◆ **Eje de las abscisas y eje de las ordenadas:** El eje de las **abscisas** es el eje en que se representan los valores de la variable **independiente** de una situación dada. Frecuentemente, es designado como *eje horizontal* debido a su dirección. El eje de las **ordenadas** es el eje en que se representan los valores de la variable **dependiente** de una situación. Acostumbra a ser designado, de igual forma, como *eje vertical*.
- ◆ **Constante de proporcionalidad:** En el caso de la **proporcionalidad directa**, corresponde al cociente entre los valores correspondientes de ambas variables. En el gráfico representa la inclinación de la línea recta asociada sobre el eje horizontal. La constante de proporcionalidad indica cuánto varía la variable dependiente por cada unidad de variación de la variable independiente. Por esta razón suele designarse también como la *tasa de variación*. En el caso de problemas de conversión, por ejemplo, cambio a monedas extranjeras, cambio de unidades de medidas de longitud, etc., la constante de proporcionalidad es justamente el factor de conversión, es decir, el número por el cual hay que multiplicar la cantidad de medida que se desea transformar para convertirla a otra. En el caso de la **proporcionalidad inversa**, corresponde al producto entre los valores correspondientes de ambas variables.
- ◆ **Ley de correspondencia entre dos variables:** Es la expresión matemática que permite calcular valores desconocidos de una de las variables a partir de valores conocidos de la otra variable.
- ◆ **Modelizar o modelización:** Es el proceso a través del cual se determina una expresión matemática que **describe las relaciones** entre las variables de un fenómeno, ya sea real (extramatemático) o de las propias matemáticas (intramatemático). Esta expresión es una representación o “metáfora” de un fenómeno, que permite estudiar su comportamiento puntual y global, así como predecir futuros comportamientos del mismo.
- ◆ **Par ordenado:** Es una pareja de números (a, b) que describe la ubicación de un punto cualquiera en el plano. El primer número representa la distancia de dicho punto al eje vertical, y el segundo, la distancia de dicho punto al eje horizontal. Así por ejemplo, el punto $(12, 7)$ queda ubicado a la distancia de 12 unidades del eje vertical y de 7 unidades del eje horizontal.
- ◆ **Proporcionalidad directa:** Es una relación entre dos variables que cumple con las siguientes propiedades:
 - Si los valores de una de las variables aumentan (o disminuyen), los valores de la otra también aumentan (o disminuyen).
 - A variaciones iguales en una de las variables se producen variaciones en la otra que también son iguales.
 - Si los valores de una de las variables se duplican, triplican, etc., los valores correspondientes de la otra variable también se duplican, triplican, etc.
 - El valor correspondiente a la suma de dos valores de una de las variables $(a + b)$, es igual a la suma de los valores correspondientes a cada uno de estos valores $(a$ y $b)$.
 - El cociente entre valores correspondientes de ambas variables es un valor único.
 - El gráfico que representa la relación es una línea recta que pasa por el origen del sistema de coordenadas. La inclinación de esta recta está determinada por el valor del cociente entre valores correspondientes, de manera que a mayor cociente corresponde mayor inclinación.Las dos primeras propiedades son necesarias para determinar que la relación es de proporcionalidad directa, pero no suficientes. En cambio, las cuatro últimas sí lo son.

- ◆ **Proporcionalidad inversa:** Es una relación entre dos variables que cumple con las siguientes propiedades:
 - Si los valores de una de las variables aumentan (o disminuyen), los valores de la otra disminuyen (o aumentan).
 - Si los valores de una de las variables se duplican, triplican, etc., los valores correspondientes de la otra variable se reducen a la mitad, tercera parte, etc.
 - El producto entre valores correspondientes de ambas variables es un valor único.
 - El gráfico que representa la relación es una curva que se acerca progresivamente a ambos ejes.
 La primera propiedad es necesaria para determinar que la relación es de proporcionalidad inversa, pero no suficiente. En cambio, las tres últimas sí lo son.

- ◆ **Relación de dependencia entre dos variables:** Existe una relación de dependencia entre dos variables cuando hay una ley de correspondencia entre ellas.

- ◆ **Sistema de coordenadas cartesiano:** Es un sistema rectangular de representación de puntos en el plano. Está formado por dos líneas rectas perpendiculares entre sí, una horizontal y otra vertical llamadas *ejes del sistema*. Cada punto sobre los ejes se corresponde con un único número del conjunto de los números reales. En este sistema la ubicación de un punto en el plano se designa mediante dos números, de modo tal que el primer número representa la distancia de dicho punto al eje vertical, y el segundo, la distancia de dicho punto al eje horizontal.

- ◆ **Variable dependiente e independiente en una relación de dos variables:** Cuando hay una ley de correspondencia entre dos variables se dice que existe una relación de dependencia entre ambas. La variable cuyos valores se obtienen a partir de los valores de la otra variable mediante la aplicación de la ley de correspondencia, se llama **variable dependiente**. La otra variable, es decir, la que determina los valores de la variable dependiente, recibe el nombre de **variable independiente**. El carácter de dependiente o independiente de las variables viene determinado por la pregunta de la situación que estas variables modelizan.

VIII FICHAS Y MATERIALES PARA ALUMNAS Y ALUMNOS