

Material N° 38

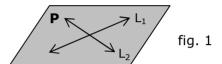
GUÍA TEÓRICO PRÁCTICA Nº 29

UNIDAD: GEOMETRÍA RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO - ÁREAS Y VOLÚMENES DE CUERPOS GEOMÉTRICOS

Determinación del plano:

Un plano queda determinado por:

* Dos rectas que se intersectan en un punto (fig. 1).



* Tres puntos no colineales (fig. 2).

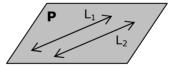


 Por una recta y un punto no perteneciente a ella (fig. 3).



fig. 4

* Por dos rectas paralelas (fig. 4).



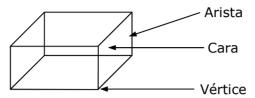
EJEMPLO

- 1. ¿Cuál de las siguientes alternativas es **falsa**?
 - A) Un plano está determinado por una recta y un punto perteneciente a la recta.
 - B) Un plano está determinado por los cuatro vértices de un cuadrilátero.
 - C) Un plano está determinado por dos rectas perpendiculares.
 - D) Un plano está determinado por dos lados no consecutivos de un rombo.
 - E) Un plano está determinado por los vértices de un triángulo rectángulo.



DEFINICIONES

POLIEDRO: Cuerpo limitado por cuatro o más polígonos donde cada polígono se denomina **cara**, sus lados son **aristas** y la intersección de las aristas se llaman **vértices**.



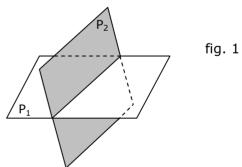
PRISMA: Poliedro limitado por paralelogramos (caras laterales del prisma) y dos polígonos congruentes cuyos planos son paralelos (bases del prisma).

ÁNGULO DIEDRO: Es el ángulo formado por dos semiplanos, que tienen una arista común y su medida es el ángulo rectilíneo formado por dos rectas perpendiculares a la arista en un mismo punto.

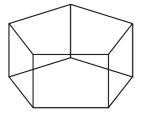


EJEMPLOS

- 1. ¿Cuánto mide el ángulo diedro formado por los planos P_1 y P_2 que se cortan perpendicularmente en la figura 1?
 - A) 30°
 - B) 45°
 - C) 54º
 - D) 90°
 - E) 108°



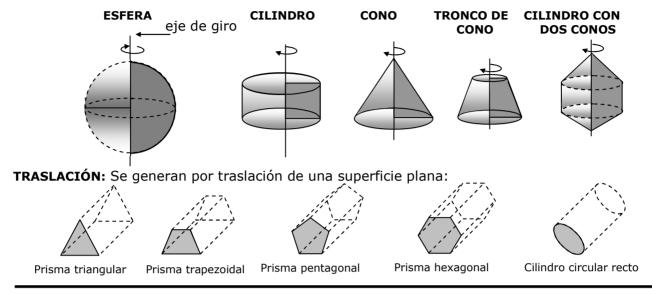
- 2. ¿Cuánto mide el ángulo diedro formado por las caras laterales del prisma de la figura 2, cuya base es un pentágono regular?
 - A) 30°
 - B) 45°
 - C) 54°
 - D) 90°
 - E) 108º





CUERPOS GENERADOS POR ROTACIÓN O TRASLACIÓN DE FIGURAS PLANAS CUERPOS DE REVOLUCIÓN

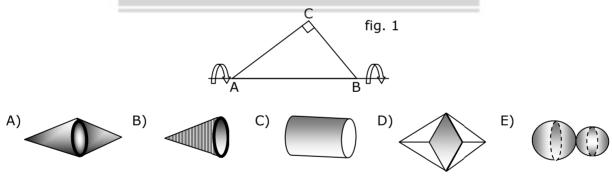
Los cuerpos de revolución se obtienen haciendo girar una superficie plana alrededor de un eje



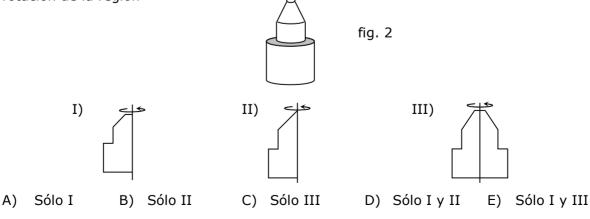
EJEMPLOS

1. Dado un triángulo ABC, rectángulo en C (fig. 1). ¿Cuál es el cuerpo generado por la rotación de dicho triángulo en torno a su hipotenusa?

PREUNIVERSITARIO



2. En la figura 2, se muestra un cuerpo de revolución. Este cuerpo puede ser generado por la rotación de la región





CUADRO RESUMEN DE ÁREAS Y VOLÚMENES DE CUERPOS GEOMÉTRICOS

NOMBRE	FORMA	ÁREA	VOLUMEN
PARALELEPÍPEDO RECTANGULAR	h b	2(ab +bh + ah)	a · b · h
CUBO	a	6a²	a ³
PRISMA RECTO RECTANGULAR	B h	h(a + b + c)+ 2B B = área basal	Bh
CILINDRO RECTO BASE CIRCULAR		$2\pi rh + 2\pi r^2$	$\frac{\Lambda}{\pi r^2}$ · h
PIRÁMIDE RECTA BASE CUADRADA	a a	2ag + a ² g = apotema lateral	$\frac{1}{3}a^2 \cdot h$
CONO RECTO BASE CIRCULAR	h g	πrg + πr² g= generatriz	$\frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$
ESFERA		4πr²	$\frac{4}{3}\pi r^3$

Volumen

Área de la base por la altura

Volumen

Área de la base por la altura dividido por tres



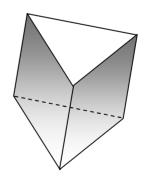
EJEMPLOS

- 1. El área de la esfera cuyo radio mide 6 cm es
 - A) $16\pi \text{ cm}^2$
 - B) $36\pi \text{ cm}^2$
 - C) $72\pi \text{ cm}^2$
 - D) $144\pi \text{ cm}^2$
 - E) $288\pi \text{ cm}^2$
- 2. ¿Cuál es el volumen del cono generado por la rotación de un triángulo rectángulo isósceles, en torno a uno de sus catetos de longitud 3 cm?
 - A) 3π cm³
 - B) 6π cm³
 - C) $9\pi \text{ cm}^3$
 - D) $27\pi \text{ cm}^3$
 - E) Se requiere información adicional

PEDRO DE VALDIVIA

3. ¿Cuál es el área y el volumen del prisma recto de base triangular de la figura 1 cuyas aristas miden 2 cm?

Área		Volumen
A)	$6 + \sqrt{3} \text{ cm}^2$	$\sqrt{3}$ cm ³
B)	$12 + \sqrt{3} \text{ cm}^2$	$\sqrt{3}$ cm ³
C)	$12 + 2\sqrt{3}$ cm ²	$\sqrt{3}$ cm ³
D)	$12 + 2\sqrt{3}$ cm ²	$2\sqrt{3}$ cm ³
E)	$12 + 2\sqrt{3} \text{ cm}^2$	$4\sqrt{3}$ cm ³

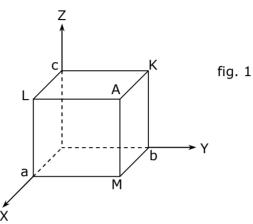




PUNTOS EN EL ESPACIO

En la figura 1 observamos tres ejes **X, Y, Z** mutuamente perpendiculares que generan también tres planos perpendiculares **XY, XZ,** y el **YZ.**

El paralelepípedo del dibujo, tiene tres de sus vértices en los ejes en tanto que el punto **K** está en el plano **YZ**, el punto **L**, en el plano **XZ** y el punto **M** en el plano **XY**, pero el punto **A** está "suspendido" en el espacio encerrado por los tres planos. Este punto **A** tiene coordenadas (a, b, c).

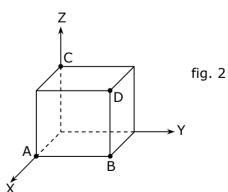


P R E U N I V E R S I T A R I O

EJEMPLOS

TEDRO DE VALDIVIA

- 1. ¿Cuál es la distancia entre el origen de coordenadas y el punto (1, 1, 1)?
 - A) 1
 - B) 3
 - C) $\sqrt{2}$
 - D) $\sqrt{3}$
 - E) ∛3
- 2. En la figura 2, las coordenadas de los vértices A, B y C del cubo son, respectivamente, (3,0,0), (3,3,0) y (0,0,3), entonces ¿cuál son las coordenadas del vértice D?
 - A) (3,3,0)
 - B) (0,3,3)
 - C) (3,0,3)
 - D) (3,3,3)
 - E) (0,0,3)





EJERCICIOS

- 1. El cuadrilátero ABCD es un rectángulo (figura 1). Si $\overline{AD} = 2\overline{DC} = 2x$, entonces el área del cilindro generado al rotar el rectángulo respecto del lado \overline{AD} es
 - A) $4\pi x^{2}$
 - B) $6\pi x^2$
 - C) $8\pi x^2$ D) $12\pi x^2$
 - E) $16\pi x^2$

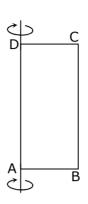


fig. 1

- 2. Un cuadrado de lado 3 cm se traslada 4 cm apoyado sobre uno de sus lados en un plano perpendicular a él, como se muestra en la figura 2. ¿Cuál es el volumen del cuerpo generado?
 - A) 9 cm³
 - B) 12 cm³
 - C) 27 cm³
 - D) 36 cm³
 - E) 64 cm³

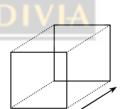
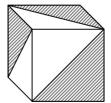


fig. 2

- 3. La mitad de cada una de las caras de un cubo se ha achurado (fig. 3). Si la superficie total achurada del cubo es de 48 cm², ¿cuál es el volumen del cubo?
 - A) 64 cm³
 - B) 96 cm³
 - C) $128\sqrt{2} \text{ cm}^3$
 - D) 192 cm³
 - E) 256 cm³





- 4. En la figura 4, ¿cuánto mide el menor ángulo diedro formado por el plano ABCD y una de las caras del paralelepípedo rectangular de aristas 4, $4\sqrt{3}$ y 10?
 - A) √3 °
 - B) $2\sqrt{3}$ o
 - C) 30°
 - D) 60°
 - E) 90°

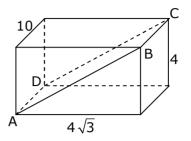


fig. 4

- 5. Dentro de una caja cúbica cuyo volumen es 216 cm³, es colocada una pelota que es tangente a las caras del cubo (fig. 5). ¿Cuál es el volumen de la pelota?
 - A) $108\pi \text{ cm}^3$
 - B) 36π cm³
 - C) $27\pi \text{ cm}^3$
 - D) $18\pi \text{ cm}^3$
 - E) 6π cm³

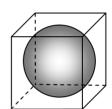


fig. 5

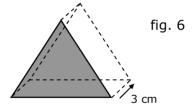
P R E U N I V E R S I T A R I O

PEDRO DE VALDIVIA

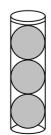
6. Al desplazar 3 cm un triángulo equilátero de altura $\sqrt{3}$ cm, se obtiene un prisma recto. ¿Cuál es el área del cuerpo, en centímetros cuadrados?



- B) $3\sqrt{3}$
- C) $6\sqrt{3}$
- D) $18 + \sqrt{6}$
- E) $18 + 2\sqrt{3}$

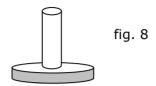


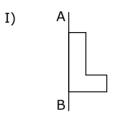
- 7. Las pelotas de tenis vienen envasadas en tarros cilíndricos en los cuales caben exactamente tres de ellas, tal como se muestra en la figura 7. ¿Cuál es el volumen del tarro si el radio de cada pelota es 4 cm? (considere $\pi=3$)
 - A) 1.152 cm³
 - B) 952 cm^3
 - C) 576 cm³
 - D) 288 cm³ E) 192 cm³

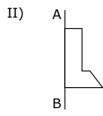


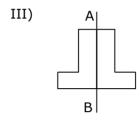


8. En la figura 8, se muestra un cuerpo de revolución. ¿Con cuál(es) de las opciones siguientes se puede generar el cuerpo al rotar la figura plana en torno al eje AB?

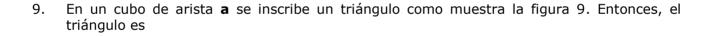








- A) Sólo con I
- B) Sólo con I y con II
- C) Sólo con I y con III
- D) Sólo con II y con III
- E) Con I, con II y con III



- A) equilátero.
- B) rectángulo isósceles.
- C) rectángulo escaleno.
- D) isósceles obtusángulo.
- E) escaleno no rectángulo.

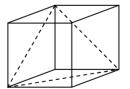


fig. 9

10. Si las alturas y las bases de un cono y de un cilindro son iguales, entonces la razón entre el volumen del cono y el volumen del cilindro, respectivamente, es

A) 1:3

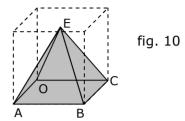
B) 3:1

C) 1:9

D) 9:1 E) 1:27



- 11. En la figura 10, la pirámide ABCOE está inscrita en el cubo. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?
 - I) La diferencia entre el volumen del cubo y la pirámide es el doble del volumen de la pirámide.
 - II) El volumen del cubo es 3 veces el volumen de la pirámide.
 - III) El área del cubo es 3 veces el área de la pirámide.
 - A) Sólo I
 - B) Sólo II
 - C) Sólo I y II
 - D) Sólo I y III
 - E) Sólo II y III



- 12. La figura 11 representa una piscina generada al trasladar **n** metros el trapecio achurado. El largo de la piscina es 8 m y tiene 1,5 m de profundidad mínima y 2,5 m de profundidad máxima. Para que el volumen de la piscina sea 56 m³ el valor de **n** debe ser
 - A) 1,5 m
 - B) 2,5 m
 - C) 3,5 m
 - D) 4,0 m
 - E) 4,5 m

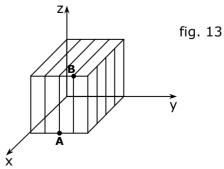


- 13. Al sumergir completamente una piedra dentro de un tubo cilíndrico de 5 cm de radio (fig. 12), el nivel del agua que contiene sube 4 cm. ¿Cuál es el volumen de la piedra? (considere $\pi = 3,14$)
 - A) 314,0 cm³
 - B) 251,2 cm³
 - C) 125,6 cm³
 - D) 31.4 cm^3
 - E) Falta información para determinarlo



fig. 12

- 14. En el cubo de la figura 13, la arista es 4 cm y un vértice está en el origen (0, 0, 0). Si el punto A tiene coordenadas (4, 2, 0) y cada arista se ha dividido en cuatro partes iguales, ¿cuáles son las coordenadas del punto B?
 - A) (3, 3, 3)
 - B) (4, 3, 4)
 - C) (3, 4, 3)
 - D) (3, 4, 4)
 - E) (4, 3, 3)

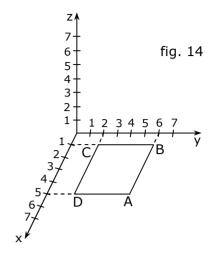




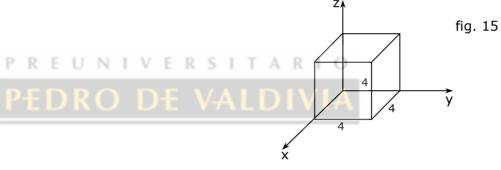
15. Los puntos A, B, C y D de la figura 14, son los vértices de la base de un cubo. ¿Cuál de los puntos de las alternativas **no** es uno de los 4 vértices que faltan del cubo?







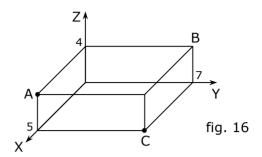
16. En la figura 15, el cubo tiene de arista 4 cm. ¿Cuáles son las coordenadas del centro de gravedad del cubo?



- 17. Se tiene un barril con capacidad de 200 litros el cual contiene agua hasta sus tres cuartas partes. Si se insertan dentro del barril ladrillos cuyas dimensiones son (10 x 20 x 40) cm, ¿cuántos de estos ladrillos serían necesarios como mínimo colocar para que el agua rebalse?
 - A) 6
 - B) 7
 - C) 8
 - D) 9
 - E) 10
- 18. Se tiene un cilindro compacto de metal de 10 cm de diámetro por 200 cm de largo. ¿Cuánto material se debe sacar para obtener un tubo de 1 cm de grosor y el mismo largo?
 - A) 1.600π cm³
 - B) 1.800π cm³
 - C) $2.500\pi \text{ cm}^3$
 - D) $3.200\pi \text{ cm}^3$
 - E) $4.800\pi \text{ cm}^3$



- 19. Las coordenadas de los puntos A, B y C de la figura 16 está representada por
 - A) (5,0,4), (0,4,7), (5,7,0)
 - B) (4,0,5), (0,7,7), (4,0,0)
 - C) (7,0,0), (0,0,0), (5,0,0)
 - D) (5,0,4), (0,7,4), (5,7,0)
 - E) (0,4,5), (0,7,4), (4,0,0)



- 20. La figura 17 muestra un paralelepípedo cuyas aristas miden 3 cm, 4 cm y 6 cm. De las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s):
 - I) El área total del cuerpo es 108 cm².
 - II) El volumen del cuerpo es 72 cm³.
 - III) La mayor longitud rectilínea entre dos vértices del paralelepípedo es $\sqrt{61}\,$ cm.
 - A) Sólo I
 - B) Sólo II
 - C) Sólo I y II
 - D) Sólo II y III
 - E) Todas ellas



- 21. Se tiene un Deltoide, cuyas diagonales están sobre los ejes coordenados. Si se hace rotar el Deltoide entorno a una de sus diagonales se obtiene
 - A) un cono.
 - B) dos conos unidos por sus bases.
 - C) una pirámide.
 - D) dos pirámides unidas por sus bases.
 - E) un cilindro.
- 22. La distancia entre el punto A (0, 5, -5) y el punto B (-5, 0, 5) es
 - A) 10
 - B) 15
 - c) 5√2
 - D) $5\sqrt{3}$
 - E) 5√6



- 23. Las pelotas de tenis vienen envasadas en cajas cilíndricas donde justo caben tres a lo alto y quedan completamente ajustadas en su interior. La razón entre el volumen ocupado por las pelotas y el volumen interior de la caja es
 - A) $\frac{4}{5}$
 - B) $\frac{3}{4}$
 - C) $\frac{2}{3}$
 - D) $\frac{3}{5}$
 - E) $\frac{1}{2}$
- 24. ¿En qué razón están respectivamente, los volúmenes de un cilindro de radio **m** y altura **n** y un cono recto de radio **n** y altura **m**?
 - A) $\frac{n}{3m}$
 - B) $\frac{3n}{m}$
 - C) $\frac{m}{3n}$
 - D) $\frac{3m}{n}$
 - E) $\frac{2m}{n}$
- 25. ABCD es un cuadrado de lado a cm y el trapecio EFBA es isósceles $\overline{AE} = \overline{BF} = a$. ¿Cuál es el volumen del cuerpo de la figura 18?

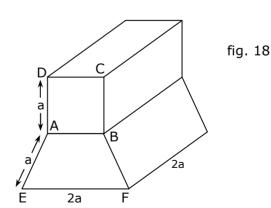
A)
$$\left(2a^2 + \frac{3}{4}a^2\sqrt{3}\right)a \text{ cm}^3$$

B)
$$\left(a + \frac{3}{4}a^2\sqrt{3}\right)2a \text{ cm}^3$$

C)
$$(1 + 3\sqrt{3})2a^3 \text{ cm}^3$$

D)
$$\left(a^2 + \frac{a^2}{4}\sqrt{3}\right) 2a \text{ cm}^3$$

E)
$$\left(1 + \frac{3}{4}\sqrt{3}\right) 2a^3 \text{ cm}^3$$



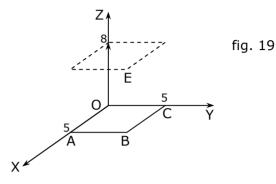


26. El cuadrado OABC está en el plano XY del sistema que muestra la figura 19, el vector dibujado en el eje Z indica la traslación que experimentará el cuadrado, ¿cuál es el volumen del cuerpo generado por esta traslación? (En unidades cúbicas)

A) 25B) 100C) 150

D) 200

E) 210



27. En la figura 20, se tiene un prisma recto cuya base es un hexágono regular de lado $\sqrt{5}$ y la altura del prisma es $\sqrt{12}$. ¿Cuál es el volumen del prisma?

A) $6 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{12}$

- B) $\frac{15}{2}\sqrt{3}$
- C) $\frac{15}{2}$
- D) $45\sqrt{3}$
- E) 45

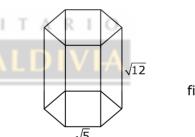


fig. 20

- 28. Las caras A y B de la caja (fig. 21) son cuadradas y el resto son rectangulares. El volumen de la caja se puede determinar si :
 - (1) El área de una de las caras cuadradas es de 36 cm².
 - (2) El perímetro de una de las caras rectangulares es de 32 cm.
 - A) (1) por sí sola
 - B) (2) por sí sola
 - C) Ambas juntas, (1) y (2)
 - D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
 - E) Se requiere información adicional

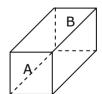
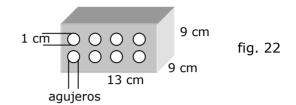


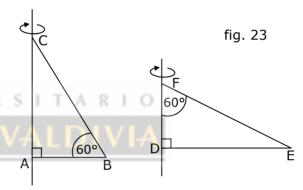
fig. 21



- 29. El peso del ladrillo de la figura 22, se puede determinar si :
 - (1) 1 cm³ del material con que ha sido fabricado pesa 2 gramos.
 - (2) Medio kilo equivale a 250 cm³ del material ocupado.
 - A) (1) por sí sola
 - B) (2) por sí sola
 - C) Ambas juntas, (1) y (2)
 - D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
 - E) Se requiere información adicional



- 30. Se puede determinar la razón entre los volúmenes de los cuerpos generados por los triángulos ABC y DEF de la figura 23, al hacerlas girar en torno al eje indicado si :
 - (1) $\triangle ABC \cong \triangle DFE$
 - (2) $\overline{BC} = \overline{EF} = 2 \text{ cm}$
 - A) (1) por sí sola
 - B) (2) por sí sola
 - C) Ambas juntas, (1) y (2)
 - D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
 - E) Se requiere información adicional





RESPUESTAS

Ejemplos Págs.	1	2	3
1	Α		
2	D	Е	
3	Α	Е	
5	D	С	D
6	D	D	

EJERCICIOS PÁG. 7

	1. B	11. C	21. B	
	2. D	12. C	22. E	
	3. A	13. A	23. C	
PRE	4. C	14. B	24. D	ARIO
	5. B	15. A	25. E	
PED	6. E	16. E	26. D	DIVIA
	7. A	17. B	27. E	
	8. C	18. D	28. C	
	9. A	19. D	29. D	
	10. A	20. E	30. D	

DMONMA38

Puedes complementar los contenidos de esta guía visitando nuestra web http://www.pedrodevaldivia.cl/